

**Habilitation à diriger des recherches**

INSTITUT DE  
RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE  
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

**Jérôme Poineau**

**Des espaces de Berkovich locaux et globaux**

Soutenue le 24 octobre 2013  
devant la commission d'examen

Antoine Chambert-Loir, examinateur  
Antoine Ducros, examinateur  
Carlo Gasbarri, garant  
Kiran Kedlaya, rapporteur  
Qing Liu, examinateur  
François Loeser, rapporteur

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)





## REMERCIEMENTS

Je souhaite commencer par remercier Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros. J'ai effectué ma thèse sous leur direction, entre les années 2004 et 2007, et nous sommes, depuis cette période, toujours restés en contact, ce dont je me réjouis. J'ai pu compter sur eux pour me prodiguer des conseils avisés dans différentes occasions et ils ont, en outre, toujours généreusement partagé avec moi leurs nombreuses connaissances mathématiques. Je suis ravi qu'ils soient présents à cette soutenance.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à Vladimir Berkovich. J'étudie la théorie qui porte son nom depuis maintenant plusieurs années et il a suivi mes travaux avec attention. Lorsque j'ai décidé de me consacrer à développer une partie méconnue du domaine, il a su me soutenir par des encouragements répétés qui m'ont été précieux. Je suis honoré qu'il ait accepté d'écrire un rapport sur ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements aux deux autres rapporteurs, Kiran Kedlaya et François Loeser. Je suis heureux et flatté de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux en acceptant ainsi cette tâche quelque peu ingrate. Je voudrais associer à ces remerciements Qing Liu qui, comme eux, a accepté de prendre part au jury.

Je souhaite encore remercier Carlo Gasbarri qui a accepté de soutenir mon projet d'habilitation en s'en portant garant auprès de l'université et en profite pour lui dire combien j'ai apprécié les fréquentes conversations mathématiques que nous avons pu avoir. C'est toujours un plaisir de discuter avec quelqu'un d'aussi visiblement passionné.

Je saisis également l'occasion qui m'est donnée ici de remercier Andrea Pulita pour une collaboration aussi fructueuse en résultats qu'en rebondissements de tout ordre.

Merci aussi à l'ensemble des membres de l'IRMA et de l'UFR, pour l'ambiance agréable qui règne dans ces lieux.

Mes derniers mots seront pour Gaëlle, que je remercie de sa présence indispensable, jour après jour, à mes côtés, pour Marion, qui irradie un bonheur communicatif, sans oublier Hawaï, qui ne se lasse jamais de me rappeler que rien ne vaut une promenade au grand air pour remettre de l'ordre dans ses idées.



## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Introduction</b> .....                                                   | i  |
| <b>Bibliographie de l'auteur</b> .....                                      | xv |
| <b>1. Espaces de Berkovich globaux</b> .....                                | 1  |
| 1.1. Définitions.....                                                       | 1  |
| 1.2. Exemples d'espaces de base.....                                        | 3  |
| 1.3. Anneaux de séries.....                                                 | 7  |
| 1.4. Morphismes finis.....                                                  | 8  |
| 1.5. Théorème de division de Weierstraß.....                                | 12 |
| 1.6. Propriétés locales.....                                                | 14 |
| <b>2. Espaces de Berkovich locaux : quelques aspects topologiques</b> ..... | 21 |
| 2.1. Points universels.....                                                 | 21 |
| 2.2. Topologie et suites.....                                               | 26 |
| 2.3. Approximation polynomiale des espaces de Berkovich.....                | 28 |
| <b>3. Équations différentielles <math>p</math>-adiques</b> .....            | 35 |
| 3.1. Préliminaires sur les extensions du corps de base.....                 | 35 |
| 3.2. Quelques rappels de théorie du potentiel.....                          | 36 |
| 3.3. Sur un domaine analytique de la droite.....                            | 37 |
| 3.4. Sur une courbe.....                                                    | 48 |
| 3.5. Une démonstration alternative par la théorie du potentiel.....         | 53 |
| <b>Bibliographie</b> .....                                                  | 57 |



## INTRODUCTION

Les travaux fondateurs réalisés par J. Tate sur les courbes elliptiques dans le cadre  $p$ -adique et, en particulier, leur uniformisation (*cf.* [Tat95]) ont montré la nécessité d'étendre la théorie bien établie de la géométrie analytique complexe au cas d'autres corps de base. Ils ont permis d'ouvrir une nouvelle branche des mathématiques, connue sous le nom de géométrie analytique rigide. Ce vocable recouvre, en réalité, différentes théories, car, depuis les années 1960 et l'approche originale de J. Tate (*cf.* [Tat71]), plusieurs autres tentatives de donner un sens à la notion d'espace analytique sur  $p$ -adique se sont fait jour. Nous souhaitons mentionner ici les travaux de M. Raynaud dont le point de départ, très algébrique, est de considérer ces espaces comme des fibres génériques de schémas formels sur  $\mathbf{Z}_p$  (*cf.* [Ray74], [BL93a], [BL93b] ou [Abb10]). Plus récemment, R. Huber a proposé de les définir, sous le nom d'« espaces adiques » (*cf.* [Hub93], [Hub94]), en termes de valuations (de rang arbitraire). Ses constructions permettent notamment de retrouver tous les points du topos rigide. Plus récemment encore, K. Fujiwara et F. Kato ont proposé une approche combinant les idées des deux précédentes (*cf.* [FK13]).

C'est cependant d'une autre théorie dont nous souhaitons parler : celle développée par V. Berkovich à la fin des années 1980 (à peu près concomitamment à celle de R. Huber). Sans entrer déjà dans les détails mais faire néanmoins le lien avec les descriptions précédentes, indiquons tout de même que les espaces  $p$ -adiques qu'il introduit sont définis à l'aide de valeurs absolues, autrement dit de valuations de rang 1. Nous souhaitons mettre en lumière deux propriétés inhérentes à cette théorie.

► **Les espaces de Berkovich peuvent être définis en prenant pour base un anneau de Banach arbitraire.**

Signalons que, même si nous n'avons parlé jusqu'ici que d'espaces  $p$ -adiques, les théories présentées ci-dessus pouvaient également s'appliquer en remplaçant les corps  $p$ -adiques par des corps valués complets ultramétriques de valuation non triviale quelconques (ou des anneaux encore plus généraux dans certains cas). Cependant, l'approche de V. Berkovich reste, à ce jour, la seule à permettre de considérer des bases archimédiennes. En particulier, les espaces de Berkovich sur  $\mathbf{C}$  ont un sens, et ils ne sont autres que les espaces analytiques complexes usuels.

La définition proposée par V. Berkovich est, en réalité, encore plus générale et elle permet de choisir pour base un anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$  quelconque (c'est-à-dire un anneau muni d'une norme sous-multiplicative pour laquelle il est complet). Nous pouvons, par exemple, considérer les espaces de Berkovich sur l'anneau  $(\mathbf{Z}, |\cdot|_\infty)$ , où  $|\cdot|_\infty$  désigne la valeur absolue usuelle. On obtient alors des espaces qui se présentent naturellement comme des fibrations dont certaines fibres sont  $p$ -adiques et d'autres complexes. De tels espaces semblent intéressants d'un point de vue arithmétique. Signalons qu'une construction similaire est possible en prenant pour base n'importe quel anneau d'entiers de corps de nombres. Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude de ces espaces.

► **Les espaces de Berkovich sont munis d'une véritable topologie.**

Les propriétés ultramétriques des corps  $p$ -adiques confèrent un caractère assez pathologique à leur topologie. La définition locale naïve de fonction analytique dans ce contexte ne présente alors que peu d'intérêt. Ces remarques laissent pressentir que la topologie des espaces rigides ne peut être qu'un point délicat. Dans la théorie de J. Tate, par exemple, ce n'est pas une topologie au sens classique qui est utilisée, mais une topologie de Grothendieck : certains ouverts et certains recouvrement par ces ouverts sont déclarés admissibles et l'on s'interdit d'en utiliser d'autres.

Sur ce point également, la théorie de V. Berkovich se distingue, en ce que les espaces analytiques qu'elle définit sont munis d'une véritable topologie. Cette topologie présente des propriétés agréables, sur un corps valué complet, tout du moins, et les espaces obtenus sont localement compacts, localement connexes par arcs, localement contractiles dans de nombreux cas (et sans doute en général), etc. Dans le deuxième chapitre de ce texte, nous explorerons d'autres propriétés topologiques. Dans le troisième, consacré aux équations différentielles  $p$ -adiques sur les courbes analytiques lisses, la topologie jouera un rôle majeur car nous y utiliserons de façon essentielle la structure de graphe de ces dernières.

Présentons maintenant plus précisément, chapitre par chapitre, les résultats que nous allons exposer dans ce mémoire.

★ **Chapitre 1 : Espaces de Berkovich globaux**

Ainsi que nous l'avons mentionné précédemment, V. Berkovich a proposé une construction d'espace analytique au-dessus d'un anneau de Banach arbitraire. C'est un espace localement annelé et la définition proposée permet donc d'appréhender points, topologie et fonctions de manière uniforme, indépendamment du cadre complexe ou  $p$ -adique. Pourtant, à l'exception du premier chapitre de l'ouvrage fondateur [Ber90], qui contient les définitions et de quelques exemples isolés, comme [Ber09] ou [Nic11], seuls les espaces analytiques sur un corps valué complet ont été considérés. Dans ce cadre, la théorie est d'ailleurs bien développée et a connu de fructueuses applications dans différents domaines.

Depuis notre thèse, nous nous sommes intéressé tout particulièrement aux espaces que l'on pourrait qualifier de globaux : les espaces définis sur  $\mathbf{Z}$  et les anneaux d'entiers de corps de nombres. Il serait souhaitable de disposer, dans ce cadre également, des propriétés classiques des espaces analytiques complexes, que ce soit d'un point de vue algébrique (structure des anneaux locaux, cohérence du faisceau structural, ...), topologique (connexité par



arcs locale, . . .), cohomologique (annulation de la cohomologie cohérente en degré supérieur à 1 pour les disques et les couronnes, . . .), etc. Toutes ces propriétés sont d'ailleurs vérifiées par les espaces sur un corps valué complet.

Qui cherche à démontrer les résultats précédents pour les espaces globaux se heurte aussitôt à une première difficulté : les méthodes utilisées en géométrie complexe et  $p$ -adiques diffèrent radicalement. En effet, dans le cadre complexe, elles sont basées sur une étude locale et reposent *in fine* sur les théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Dans le cadre ultramétrique, en revanche, ce sont des espaces globaux, les espaces « affinoïdes », autrement dit, les disques fermés et leurs fermés de Zariski, qui font l'objet des premières attentions.

Quelle approche choisir ? Bien entendu, les aspects globaux de la géométrie analytique complexe ont également été développés. On sait, par exemple, que les anneaux de fonctions surconvergentes au voisinage de disques et de couronnes compacts sont noethériens. Même dans ces cas simples, c'est un théorème difficile dû à J. Frisch (*cf.* [Fri67]). Si des travaux ultérieurs ont permis d'en simplifier et éclaircir la preuve, celle-ci requiert toujours l'utilisation de plusieurs résultats non triviaux : cohérence du faisceau structural, propriétés des espaces de Stein, finitude locale du nombre de composantes connexes des parties semi-algébriques, notamment. Adopter ces techniques en vue d'étudier les espaces globaux semble voué à l'échec.

Reste l'approche locale inspirée de la géométrie analytique complexe. Cette fois-ci, bien sûr, c'est du côté ultramétrique que viendront les problèmes. En effet, si les espaces de Berkovich possèdent d'aussi bonnes propriétés topologiques, c'est parce qu'ils possèdent de nombreux points outre ceux provenant du corps de base. On peut assimiler ces points à des sortes de points génériques et l'on comprend alors qu'on ne pourra donner une description explicite des anneaux locaux aussi simple que dans le cas complexe, où n'apparaissent que des anneaux de séries convergentes. En outre, d'autres problèmes viendront s'ajouter du fait que les fibres des espaces ne sont pas définies sur des corps algébriquement clos, mais plutôt sur des corps  $p$ -adiques ou même des corps finis.

En dépit de ces difficultés, il se révèle possible d'adapter les méthodes locales de la géométrie analytique complexe aux espaces globaux. Ainsi sommes-nous parvenu, dans notre thèse, effectuée de 2004 à 2007 sous la direction d'Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros, à mener une étude assez complète de la droite affine analytique sur  $\mathbf{Z}$ . Énonçons quelques uns des résultats obtenus. Ils font l'objet des chapitres 1 à 4 de [Poi10a].

**Théorème 1.** — *La droite analytique sur  $\mathbf{Z}$  ou un anneau d'entiers de corps de nombres vérifie les propriétés suivantes.*

- i) *C'est un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs.*
- ii) *Ses anneaux locaux sont noethériens, henséliens, réguliers et excellents.*
- iii) *Son faisceau structural est cohérent.*

Il faut mentionner que la droite affine sur un anneau d'entiers de corps de nombres est un objet qui se prête encore assez bien à une description explicite. Les méthodes mises

en œuvre pour démontrer les résultats précédents tiraient un large parti de cette situation, montrant par là-même leurs limites. En effet, même sur un corps, aucune description explicite des espaces analytiques de dimension supérieure n'est connue.

À la fin de notre thèse, nous avons cherché à trouver des applications à ces premiers résultats d'apparence sans doute assez abstraite. Pour ce faire, nous avons commencé par développer les rudiments d'une théorie des espaces de Stein dans le contexte de la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$ . Notre résultat principal est le suivant. Il est démontré au chapitre 6 de [Poi10a].

**Théorème 2.** — *Toute couronne et tout disque relatifs  $C$  contenu dans la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$  ou un anneau d'entiers de corps de nombres est un espace de Stein : pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $C$ , nous avons*

- i) pour tout  $q \geq 1$ ,  $H^q(C, \mathcal{F}) = 0$  ;
- ii) en tout point  $x$  de  $C$ , la fibre  $\mathcal{F}_x$  est engendrée par les sections globales  $\mathcal{F}(C)$ .

Une fois des résultats de ce type connus, il est possible d'obtenir des applications, comme en géométrie complexe (cf. [GR04], par exemple). Avant de donner des énoncés précis, nous souhaitons montrer aux lecteurs quelques anneaux apparaissant naturellement comme anneaux de sections globales du faisceau structural sur certaines parties simples de la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$ . C'est en effet à des propriétés de ce genre d'anneaux que l'on peut espérer des applications.

Soit  $r > 0$ . Alors l'anneau des fonctions surconvergentes au voisinage du disque relatif fermé (respectivement ouvert) de rayon  $r$  est l'anneau  $\mathbf{Z}_{r+}[[T]]$  (respectivement  $\mathbf{Z}_{r-}[[T]]$ ) formé des séries à coefficients entiers dont le rayon de convergence complexe est strictement supérieur (respectivement supérieur) à  $r$ . En considérant des parties qui ne sont guère plus compliquées — des disques relatifs sur des parties strictes de la base —, on peut obtenir des séries à coefficients dans des anneaux du type  $\mathbf{Z}[1/N]$  avec des conditions de convergence imposées non seulement à la place complexe, mais également aux places  $p$ -adiques, pour tout diviseur premier  $p$  de  $N$ . Bien entendu, on peut obtenir des anneaux similaires en remplaçant  $\mathbf{Z}$  par un anneau d'entiers de corps de nombres quelconque.

Nous avons regroupé au chapitre 7 de [Poi10a] quelques exemples d'applications. En voici un, analogue au théorème de Weierstraß, permettant de prescrire les parties polaires de fonctions méromorphes, de la géométrie analytique complexe.

**Théorème 3.** — *Soient  $E$  et  $F$  deux parties disjointes, fermées et discrètes du disque ouvert unité complexe  $D$  ne contenant pas le point 0. Soient  $(n_a)_{a \in E}$  une famille d'entiers positifs et  $(P_b)_{b \in F}$  une famille de polynômes à coefficients complexes sans terme constant. Supposons que*

- a) quel que soit  $a \in E$ ,  $\bar{a} \in E$  et  $n_{\bar{a}} = n_a$  ;
- b) quel que soit  $b \in F$ ,  $\bar{b} \in F$  et  $P_{\bar{b}} = \overline{P_b}$ .

*Alors il existe  $g, h \in \mathbf{Z}_{1-}[[T]]$ , avec  $h \neq 0$ , qui vérifient les propriétés suivantes :*

- i) la fonction  $f = g/h$  est holomorphe sur  $D \setminus F$  ;
- ii) quel que soit  $a \in E$ , la fonction  $f$  s'annule en  $a$  à un ordre supérieur à  $n_a$  ;

- iii) quel que soit  $b \in F$ , on a  $f(z) - P_b\left(\frac{1}{z-b}\right) \in \mathcal{O}_b$  ;
- iv) on a  $f \in \mathbf{Z}[[T]] \cap \mathcal{O}_0$ .

Nous pouvons également démontrer un analogue du théorème de J. Frisch mentionné plus haut (en adaptant la preuve présentée dans [BS77, chapitre 5, fin de la section 3]).

**Théorème 4.** — *Quel que soit  $r > 0$ , l'anneau  $\mathbf{Z}_{r+}[[T]]$  est noethérien.*

À la suite de notre thèse, nous avons passé l'année 2007–2008 à l'université de Ratisbonne, dans l'équipe de K. Künnemann. Nous l'avons mise à profit pour reprendre et affiner nos précédents travaux en vue de préparer une publication, qui sera [Poi10a]. Signalons que le chapitre 5 de cet ouvrage, consacré aux morphismes finis, a été entièrement rédigé à cette époque.

Lors de cette année, nous avons également poursuivi nos recherches en direction d'applications possibles de la théorie des espaces de Berkovich sur  $\mathbf{Z}$  au problème inverse de Galois. En effet, il faut signaler que les anneaux de séries du type  $\mathbf{Z}_{r+}[[T]]$  et  $\mathbf{Z}_{r-}[[T]]$  sont déjà apparus, avec d'autres notations, dans des travaux de D. Harbater consacrés à ce problème. Cet auteur démontre, en particulier, le théorème suivant (cf. [Har88, corollary 3.8]).

**Théorème 5.** — *Tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps  $\text{Frac}(\mathbf{Z}_{1-}[[T]])$ .*

Nous sommes parvenus à donner une nouvelle preuve de ce théorème en tirant parti de l'interprétation géométrique de l'anneau  $\mathbf{Z}_{1-}[[T]]$ . En effet, partant d'un groupe fini  $G$ , nous parvenons à le réaliser comme groupe de Galois d'un revêtement du disque unité ouvert relatif de dimension 1 sur  $\mathbf{Z}$ . Les méthodes utilisées sont différentes de celles de D. Harbater, bien plus algébriques, et elles s'appliquent encore si l'on remplace l'anneau  $\mathbf{Z}$  par un anneau d'entiers de corps de nombres ou un anneau de polynômes en une variable sur un corps. Ces résultats font l'objet de l'article [Poi10b].

Nous ne mentionnerons plus guère désormais le cas particulier de la droite affine. Une part importante des réflexions que nous avons menées postérieurement à notre thèse a eu pour objet de généraliser les résultats sus-cités au cas d'espaces de dimension arbitraire. Nous sommes parvenu à des résultats assez complets en ce qui concerne la partie que nous voudrions qualifier d'algébrique locale, c'est-à-dire la structure des anneaux locaux et la cohérence du faisceau structural. Ils font l'objet de la publication [Poi13a]. Nous reviendrons plus précisément sur ces résultats au cours du premier chapitre de ce mémoire, où nous exposerons également les grandes lignes des preuves.

Pour le moment, contentons-nous d'indiquer les points-clés du raisonnement.

◇ *Description explicite des anneaux de fonctions surconvergentes au voisinage de disques et les couronnes relatifs.*

Ces résultats sont essentiellement présents dans [Poi10a], mais ont été généralisés dans [Poi13a]. Le recours aux fonctions surconvergentes nous semble essentiel. En effet, si les anneaux de fonctions convergentes sont bien définis et forts utiles dans le cadre ultramétrique — on retrouve alors les algèbres de Tate —, aucun analogue maniable ne nous semble s'imposer dans le cadre complexe.

À l'aide de ces résultats, nous déduirons une expression explicite, en termes de séries convergentes, des anneaux locaux du faisceau structural au voisinage des points rationnels de l'espace qui sont rationnels dans leur fibre (à une nuance près), car ces points ont un système fondamental de voisinage constitué de disques relatifs.

◇ *Étude des morphismes finis induit par un polynôme.*

Les premiers résultats à ce sujet sont tirés du chapitre 5 de [Poi10a]. Ils ont été raffinés dans [Poi13a] de façon à permettre de traiter le cas de polynômes inséparables. (Pour traiter le cas de la seule droite sur  $\mathbf{Z}$ , cette extension était superflue car les corps résiduels des points de la base, qui sont ceux qui importent, sont soit de caractéristique nulle, soit finis et donc, dans tous les cas, parfaits.)

Ces résultats seront appliqués à des endomorphismes polynomiaux des espaces. Ils permettront de ramener l'étude des points algébriques dans leur fibre (comme précédemment, à une nuance près) à ceux qui y sont rationnels.

Ils permettent en fait même d'étudier des points arbitraires. En effet, on montre que tout point possède un système fondamental de voisinages de la forme  $\{r < |P| < s\}$ , où  $r$  et  $s$  sont des nombres réels et  $P$  un polynôme, au-dessus d'une base convenable, et un tel voisinage est envoyé sur une couronne par le morphisme fini induit par  $P$ .

◇ *Théorèmes de division et de préparation de Weierstraß.*

Les descriptions des anneaux locaux obtenus sont suffisamment précises pour permettre de démontrer des théorèmes de division et de préparation de Weierstraß, au moins en les points qui sont algébriques dans leur fibre. Rappelons que ces théorèmes permettent respectivement de diviser une fonction analytique par une autre en obtenant un reste polynomial et d'écrire une fonction analytique comme le produit d'un polynôme et d'une fonction inversible. On conçoit donc aisément que ces théorèmes soient très utiles dans l'étude des anneaux locaux, en permettant de se ramener au cas bien connu des anneaux de polynômes. Signalons également que ces théorèmes sont à la base de la théorie de la géométrie analytique complexe.

◇ *Étude des propriétés des anneaux locaux par récurrence sur la dimension.*

Pour démontrer les propriétés des anneaux locaux, il semble en effet naturel d'effectuer une récurrence sur la dimension, en utilisant à chaque étape les théorèmes de Weierstraß. Cela nécessite cependant de dégager une bonne notion d'espace de base ou au moins d'anneau local au-dessus duquel les hypothèses de la récurrence seront préservées. À cette fin, nous définirons les notions de corps fort, anneau fortement de valuation discrète ou, plus généralement, anneau fortement régulier, qui sont des analogues analytiques des notions algébriques classiques.

Une fois ces étapes franchies, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 6.** — *Tout espace analytique sur  $\mathbf{Z}$  ou un anneau d'entiers de corps de nombres vérifie les propriétés suivantes.*

- i) *Ses anneaux locaux sont noethériens, henséliens et excellents. Ils sont réguliers si l'espace est localement isomorphe à un espace affine.*
- ii) *Son faisceau structural est cohérent.*

Nous souhaitons insister sur le fait que les méthodes de démonstration proposées sont bien plus générales que celles utilisées dans [Poi10a]. En particulier, nulle taxonomie des points n'est nécessaire. En outre, elles traitent de manière uniforme fibres ultramétriques et archimédiennes. Signalons encore que nous n'utilisons que peu les résultats connus au sujet des espaces analytiques sur un corps : uniquement, parfois, ceux sur la droite et, plus sérieusement, le résultat d'excellence des anneaux locaux des espaces analytiques sur un corps de caractéristique strictement positive (*cf.* [Duc09]). En particulier, nos techniques fournissent de nouvelles preuves dans le cas des espaces sur un corps ultramétrique complet. (Sur  $\mathbf{C}$ , elles sont très proches des preuves classiques.)

## ★★ Chapitre 2 : Espaces de Berkovich locaux : quelques aspects topologiques

Dans le second chapitre de ce mémoire, nous nous consacrerons aux espaces de Berkovich classiques, c'est-à-dire sur un corps valué complet. Ainsi que nous l'avons mentionné précédemment, parmi les différentes approches possibles de la géométrie analytique  $p$ -adique, celle de V. Berkovich se distingue par son traitement de la topologie.

En effet, les espaces de Berkovich sont munis d'une véritable topologie (par opposition à une topologie de Grothendieck) qui possède, en outre, de bonnes propriétés. À titre d'exemple, indiquons que ces espaces sont localement compacts, localement connexes par arcs et que l'on sait qu'ils sont localement contractiles dans de nombreux cas (*cf.* [Ber99] and [HL10]). De façon plus étonnante, la topologie peut parfois traduire certaines propriétés arithmétiques des espaces. Par exemple, ainsi que V. Berkovich l'a remarqué dès les premiers temps (*cf.* [Ber08]), une courbe elliptique sur  $\mathbf{C}_p$  a bonne réduction, si et seulement si, son analytifiée est contractile. Dans le cas contraire, celui des courbes de Tate, l'analytifiée est homotope à un cercle.

Les premiers résultats obtenus dans notre thèse, publiés dans [Poi08], concernaient la topologie des espaces de Berkovich. Il s'agissait de montrer que, un espace analytique irréductible  $X$  et une fonction  $f$  sur  $X$  étant donnés, le domaine affinoïde de  $X$  défini par l'inégalité  $|f| \geq \varepsilon$  est encore irréductible lorsque  $\varepsilon$  est assez petit. Il découle aisément de ce résultat que tout point  $x$  d'un bon espace analytique en lequel l'anneau local  $\mathcal{O}_x$  est intègre possède un système fondamental de voisinages affinoïdes irréductibles. Nous nous sommes en fait intéressé plus précisément à la variation des composantes irréductibles (ou connexes) géométriques des domaines affinoïdes  $\{|f| \geq \varepsilon\}$  en fonction de  $\varepsilon$  et avons montré qu'il existait une partition finie de  $\mathbf{R}_+^*$  en intervalles sur lesquels les inclusions entre les domaines précédents induisaient des bijections entre les ensembles de composantes.

À propos de ces constructions, signalons qu'elles possèdent également un contenu arithmétique. Le nombre de composantes connexes des domaines affinoïdes du type  $\{|f| \geq \varepsilon\}$ , et des résultats similaires aux précédents, ont en effet été utilisés par A. Abbes et T. Saito dans [AS02] pour définir et étudier une filtration de ramification dans le cas des corps locaux à corps résiduel imparfait.

Pour démontrer ce résultat, nous avons construit un morphisme entre espaces analytiques dont les fibres sont liées aux domaines affinoïdes  $\{|f| \geq \varepsilon\}$ . L'idée est alors la suivante : en choisir un modèle formel et appliquer à sa fibre spéciale les résultats de constructibilité

du nombre de composantes irréductibles (ou connexes) géométriques des fibres qui figurent dans [GD66]. Lorsque l'on cherche à réaliser cette stratégie, des complications techniques interviennent et nous avons dû recourir à des résultats difficiles tels que le théorème de la fibre réduite de S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud (*cf.* [BLR95]) ou encore le théorème d'élimination de la ramification sauvage de H. Epp (*cf.* [Epp73]).

Signalons que nous sommes récemment parvenu à démontrer le même résultat de façon beaucoup plus courte et en utilisant des techniques bien moins sophistiquées, basées essentiellement sur la réduction des espaces affinoïdes, dont nous aurons l'occasion de reparler plus loin. Un article sur le sujet est en cours de rédaction.

Nous avons eu l'occasion de nous intéresser de nouveau à la topologie des espaces de Berkovich en réfléchissant à une question, motivée par des considérations de dynamique  $p$ -adique, que nous avait posée C. Favre : les espaces analytiques compacts sont-ils séquentiellement compacts (au sens où toute suite possède une sous-suite convergente) ? Il faut ici rappeler que les espaces de Berkovich ne sont en général pas métrisables et que leur topologie n'est pas même dénombrable. Cependant, des considérations topologiques simples suffisent à se convaincre que la question précédente admet une réponse positive dans le cas des courbes. Par ailleurs, C. Favre lui-même était parvenu à généraliser ce résultat au cas d'espaces de dimension arbitraire, pourvu que le corps de base fût un corps de séries de Laurent, par des méthodes s'appuyant sur les espaces de Zariski-Riemann (*cf.* [Fav11]).

Dans la publication [Poi13b], nous sommes parvenu à démontrer le résultat en toute généralité par d'autres techniques en nous basant sur le fait que, bien que les espaces de Berkovich ne soient en général pas métrisables, ils le sont bel et bien lorsque le corps de base possède une partie dénombrable dense. Pour se ramener à ce cas, il est nécessaire de bien comprendre les liens existant entre un espace donné et l'espace obtenu après extension des scalaires. Arrêtons-nous quelques instants sur cette question.

Soit  $X$  un espace analytique sur un corps valué complet  $k$ . Dans [Ber90, section 5.2], V. Berkovich introduit la notion de « peaked point » pour désigner un point de  $X$  qui se relève canoniquement, en un sens à préciser, à  $X \hat{\otimes}_k K$ , pour toute extension valuée complète  $K$  de  $k$ . Nous qualifierons plus volontiers ces points d'universels. V. Berkovich propose également un critère permettant d'assurer qu'un point vérifie la propriété précédente : il suffit de le réaliser comme unique point du bord de Shilov d'un espace strictement affinoïde distingué dont la réduction est géométriquement réduite. Nous ne mentionnons les hypothèses précises du critère que pour mieux les supprimer.

**Théorème 7.** — *Soit  $k$  un corps valué complet algébriquement clos. Tout point d'un espace  $k$ -analytique est universel.*

Le critère précédent intervient de façon essentielle dans la démonstration de ce résultat, mais il faut le généraliser dans différentes directions. En particulier, les réductions doivent être remplacées par des réductions graduées au sens de M. Temkin (*cf.* [Tem04]). Cela nous a conduit à démontrer des résultats d'algèbre commutative graduée, dont un analogue du Nullstellensatz. Sans entrer dans les détails, mentionnons tout de même que son énoncé

diffère de l'énoncé classique : dans le cadre gradué, il existe en effet des algèbres graduées de type fini qui sont des corps sans être des algèbres finies.

Revenons maintenant au problème de compacité séquentielle qui nous occupait. Par quelques réductions faciles, on se ramène à montrer que toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'un disque fermé  $D_k$ , défini sur un corps valué complet algébriquement clos  $k$ , possède une sous-suite convergente. En utilisant de nouveau des arguments basés sur la notion de bord de Shilov, on montre qu'il existe un sous-corps algébriquement clos  $\ell$  de  $k$  assez petit tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , le relevé universel sur  $D_k$  de la projection  $v_n$  de  $u_n$  sur  $D_\ell$  ne soit autre que  $u_n$ . Le corps  $\ell$  peut être choisi suffisamment petit pour assurer que l'espace  $D_\ell$  soit métrisable. Dans ce cas, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède une sous-suite convergente et il en est donc de même pour la suite relevée  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . C'est ce que nous voulions démontrer. En raffinant quelque peu les arguments, nous obtenons le résultat plus précis suivant.

**Théorème 8.** — *Soient  $k$  un corps valué complet et  $X$  un espace  $k$ -analytique. Pour toute partie  $A$  de  $X$ , tout point de l'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$  est limite d'une suite de points de  $A$ .*

Dans une direction différente, notre intérêt pour la topologie des espaces de Berkovich a été fort éveillé par l'article [HL10], mentionné plus haut, dans lequel E. Hrushovski et F. Loeser démontrent que les espaces de Berkovich issus de variétés algébriques sont contractiles. L'approche qu'ils adoptent est très originale en ce qu'elle repose de façon cruciale sur des arguments de théorie des modèles (au sens de la logique, cette fois-ci, et non des modèles formels sur un anneau de valuation).

Afin d'expliquer l'un des points qui nous a frappé, rappelons que V. Berkovich a classifié les points de la droite affine analytique sur un corps valué complet algébriquement clos  $k$  en quatre types : type 1 pour les points  $k$ -rationnels, type 2 et 3 pour les points associés à des normes uniformes de disques (la distinction s'effectuant par une condition sur le rayon) et type 4 pour les autres. Ces derniers apparaissent comme intersections de suites décroissantes infinies de disques. Retraduite en termes de théorie des modèles, cette propriété d'infinitude montre que les points de type 4, contrairement aux autres, ne donnent pas lieu à des types dits définissables (dans la théorie ACVF des corps valués algébriquement clos de valuation non triviale). Si nous supposons maintenant que le corps de base  $k$  est non seulement algébriquement clos, mais aussi maximalelement complet, alors les points de type 4 cessent d'exister sur la droite et nous n'y trouvons plus que des points induisant des types définissables.

Cependant, les points de type 4 n'ont pas pour autant totalement disparu. En effet, si nous nous plaçons dans un plan et considérons sa projection sur une coordonnée, alors nous trouverons toujours une fibre de cette projection (isomorphe à une droite) contenant des points de type 4 et ce, quelles que soient les hypothèses sur le corps de base  $k$ . Or un résultat de [HL10] affirme que, sur un corps algébriquement clos et maximalelement complet, tous les points sont définissables. C'est ce paradoxe que nous avons voulu résoudre dans l'article [Poi13c].

Nous ne souhaitons pas énoncer ici de définitions précises de théories des modèles et nous contenterons de présenter un résultat géométrique qui est équivalent à la définissabilité des

types. Nous l'obtenons par une méthode qui ne nécessite que des raisonnements simples sur les espaces de Berkovich et l'élimination des quantificateurs dans la théorie ACVF.

**Théorème 9.** — *Soit  $k$  un corps valué maximalement complet. Soient  $n$  et  $m$  des entiers. Soient  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  et  $V$  une partie semi-algébrique de  $\mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}}$ . Notons  $\pi: \mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$  le morphisme de projection sur les  $m$  dernières coordonnées. Pour tout point  $y$  de  $\mathbf{A}_k^{m,\text{an}}(k)$ , notons  $s_y(x)$  l'unique antécédent du point  $x$  par l'isomorphisme  $\pi^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{n,\text{an}} = \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Alors, le sous-ensemble de  $\mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}}$  défini par*

$$\{y \in \mathbf{A}_k^{m,\text{an}}(k) \mid s_y(x) \in V\}$$

*est semi-algébrique.*

En d'autres termes, le point  $x$  définit une section de  $\pi$  au-dessus des  $k$ -points de  $\mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$  et l'image réciproque de  $V$  par cette section est semi-algébrique. Si nous supposons de plus que le corps  $k$  est algébriquement clos, nous pouvons utiliser les résultats sur les points universels démontrés plus haut afin de prolonger la section de  $\pi$  définie par  $x$  à  $\mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$  tout entier. (En réalité, dans [Poi13c], nous n'utilisons pas les résultats d'universalité, mais les redémontrons de façon différente et plus simple dans le cas particulier des corps algébriquement clos maximalement complets.) L'énoncé du théorème vaut encore dans cette généralité.

Nous souhaitons ajouter encore un mot sur la stratégie utilisée. Nous y pensons comme un résultat d'approximation des points lorsque l'on ne s'autorise à utiliser que des polynômes de degré borné. Munissons  $\mathbf{N}^n$  de la relation d'ordre suivante :  $(d_1, \dots, d_n) < (d'_1, \dots, d'_n)$  si

$$\sum_{i=1}^n d_i < \sum_{i=1}^n d'_i$$

ou  $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n d'_i$  et  $\exists j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall i \leq j, d_i = d'_i$  and  $d_{j+1} < d'_{j+1}$ .

Soit  $\mathbf{T}$  un  $n$ -uplet de fonctions coordonnées sur  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Pour  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n$ , notons  $k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  le  $k$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à  $\mathbf{d}$ .

**Théorème 10.** — *Soit  $k$  un corps valué maximalement complet. Soient  $n \in \mathbf{N}$  et  $x \in \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Soit  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n$ . Alors il existe  $P_1, \dots, P_u \in k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  et  $r_1, \dots, r_u \in \mathbf{R}_+$  tels que tout polynôme  $P$  de  $k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  soit borné sur*

$$S_{x,\mathbf{d}} = \bigcap_{1 \leq i \leq u} \{|P_i| \leq r_i\}$$

*et vérifie*

$$\|P\|_{S_{x,\mathbf{d}}} = |P(x)|.$$

Grossièrement parlant, le théorème montre que, si l'on n'utilise que des polynômes dont le degré est borné *a priori*, alors il est possible de remplacer un point  $x$  donné, si compliqué soit-il, par une conjonction d'inégalités simples entre polynômes. Joint à l'élimination des



quantificateurs dans la théorie ACVF, il entraîne les résultats mentionnés plus haut sans difficulté majeure.

### ★★★ Chapitre 3 : Équations différentielles $p$ -adiques

Dans le troisième et dernier chapitre de ce mémoire, nous souhaitons mentionner d'autres travaux, qui concernent les applications des espaces de Berkovich aux équations différentielles  $p$ -adiques.

Rappelons que les équations différentielles présentent des comportements fort différents dans les cadres complexe et  $p$ -adique. Le rayon de convergence en fournit un exemple frappant. En effet, il se peut que les solutions d'une équation différentielle linéaire  $p$ -adique aient un rayon de convergence fini même en l'absence de singularités de l'équation. Cela se produit déjà pour une équation aussi simple que  $y' = y$ , la série exponentielle possédant un rayon de convergence fini égal à  $|p|^{1/(p-1)}$ .

Le rayon de convergence d'une équation différentielle  $p$ -adique en tout point est une donnée dont la connaissance peut se révéler fort utile. Il a fait l'objet de nombreuses études et a donné lieu à diverses applications, telles que des théorèmes de décomposition de modules différentiels. Nos travaux se situent dans cette lignée et nous semblent difficilement compréhensibles sans connaissance préalable du sujet. Aussi avons-nous souhaité commencer par présenter dans les grandes lignes quelques résultats classiques en espérant fournir au lecteur un exposé assez autonome sur la question et lui proposer un aperçu des différentes méthodes utilisées. Cette première partie, introductive, du chapitre est basée sur les ouvrages [Chr12] de G. Christol et [Ked10] de K. Kedlaya et ne prétend nullement à l'originalité.

Les premières sections contiennent des rappels assez détaillés sur les différentes définitions de rayon de convergence (à partir du rayon de convergence d'une série, du rayon spectral d'un opérateur ou de la pente d'un polygone de Newton), de rayons subsidiaires, leurs relations et leurs propriétés de base, telle la log-sur-harmonicité du rayon de convergence ou le fait qu'il soit constant au voisinage des points rationnels (théorème de Cauchy  $p$ -adique). Le résultat suivant jouera une importance cruciale par la suite.

**Théorème 11.** — *Soit  $(\mathcal{F}, \nabla)$  un module à connexion de rang  $r$  sur une couronne  $C$ . Sur tout intervalle contenu dans  $C$ , le rayon de convergence de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  est continu, concave, log-linéaire par morceaux et ses pentes sont de la forme  $m/j$  avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .*

Pour en esquisser la démonstration, nous introduisons quelques techniques utiles, comme le push-forward par un morphisme de Frobenius.

Citons également les articles [BDV08] de F. Baldassarri et L. Di Vizio et [Bal10] de F. Baldassarri. Même si nous les mentionnerons peu par la suite, il s'agit là d'articles fondateurs qui se trouvent à la source-même de nos travaux. C'est en effet dans ceux-ci qu'apparaît la première définition que l'on pourrait qualifier de globale du rayon de convergence d'un module différentiel, c'est-à-dire la première définition valant en tout point d'un espace de Berkovich. La publication [Bal10] est consacrée spécifiquement au cas des courbes. Après avoir défini le rayon de convergence dans ce cadre, F. Baldassarri démontre

sa continuité. Il conjecture également qu'il satisfait une propriété de finitude forte, sur laquelle portent nos travaux.

Nous poursuivons notre exposé par un compte-rendu de l'article [Pul12] d'A. Pulita. Il y démontre la conjecture de finitude de Baldassarri pour le rayon de convergence (et les rayons subsidiaires) d'un module différentiel sur un domaine affinoïde de la droite affine. Nous exposons les grandes lignes de sa preuve, basée essentiellement sur des propriétés de sur-harmonicité des fonctions qui interviennent.

Nous arrivons enfin à la description de nos travaux. Il s'agit d'une collaboration avec A. Pulita qui culmine en une démonstration de la conjecture de F. Baldassarri pour tous les rayons de convergence d'un module différentiel sur une courbe quasi-lisse. Ces résultats font l'objet de l'article [PP12]. Rappelons que les courbes analytiques au sens de V. Berkovich sont naturellement des graphes.

**Théorème 12.** — *Soit  $k$  un corps valué complet. Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique quasi-lisse. Soit  $(\mathcal{F}, \nabla)$  un module à connexion sur  $X$ . Alors, le rayon de convergence de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  et ses rayons subsidiaires sont continus et localement constants hors d'un sous-graphe localement fini de  $X$ .*

Avant de nous attacher à la preuve, il faut commencer par définir les objets. Cette partie est largement inspirée de [Bal10]. Soit  $x$  un point  $k$ -rationnel de  $X$ . Le théorème des fonctions implicites assure qu'il possède un voisinage isomorphe à un disque. Cela a donc un sens de parler du plus grand disque sur lequel  $(\mathcal{F}, \nabla)$  est isomorphe au module à connexion trivial. C'est le rayon de ce disque que nous voulons appeler rayon de convergence de  $(\mathcal{F}, \nabla)$ . Les rayons intermédiaires sont définis en demandant que  $(\mathcal{F}, \nabla)$  possède des sous-modules à connexions triviaux de rangs fixés.

Si nous choisissons maintenant un point arbitraire  $x$  de  $X$ , nous ne pourrions en général trouver aucun voisinage de ce point qui soit isomorphe à un disque. L'idée est d'étendre les scalaires de façon à rendre ce point rationnel et à calculer le rayon de convergence dans l'espace obtenu.

Il reste du travail à accomplir pour rendre rigoureuses les définitions précédentes. F. Baldassarri y parvient en utilisant un modèle formel semi-stable de la courbe (qui est donc supposé exister). Quant à nous, nous utilisons le point de vue des triangulations introduit par A. Ducros (cf. [Duc]). Grossièrement parlant, il s'agit d'une façon de découper la courbe en disques et couronnes. Ce choix présente, à nos yeux, le double avantage de permettre d'étendre les définitions à toute courbe quasi-lisse, sans autre restriction, et de les exprimer exclusivement dans le langage de la géométrie analytique.

Expliquons maintenant en quelques mots la stratégie de la preuve. Puisque la courbe  $X$  est supposée quasi-lisse, tout point  $x$  possède un voisinage affinoïde  $Y$  qui s'envoie par un morphisme fini étale  $f$  sur un domaine affinoïde  $W$  de la droite analytique. Nous pouvons alors considérer le push-forward du module à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$  sur  $W$  et appliquer le théorème d'A. Pulita. Il s'agit alors de montrer que l'on peut choisir le morphisme  $f$  suffisamment finement pour pouvoir en déduire des informations sur  $Y$ .

La dernière section du chapitre est consacrée à une démonstration alternative du théorème dans un cadre plus restrictif : il concerne le premier rayon de convergence d'un module à connexion défini sur une courbe  $X$  sans bord (ou d'une connexion surconvergente). L'idée consiste à exploiter, autant que faire se peut, les propriétés d'harmonicité des fonctions qui interviennent. Le rayon de convergence d'un module à connexion est, en effet, log-sur-harmonique sur la droite et reste proche d'une telle fonction dans le cas d'une courbe quelconque. Notre preuve repose de façon essentielle sur les travaux de thèse d'A. Thuillier consacrés à la théorie du potentiel sur les courbes de Berkovich (*cf.* [Thu05]) et, en particulier, sur le fait que le laplacien d'une fonction sur-harmonique soit une mesure de Radon, ce qui peut s'interpréter comme un résultat de finitude. Des rappels de théorie du potentiel figurent au début du chapitre.



## BIBLIOGRAPHIE DE L'AUTEUR

- [Poi08] Jérôme Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques  $p$ -adiques : privilège et noethérianité. *Compos. Math.*, 144(1) :107–133, 2008.
- [Poi10a] Jérôme Poineau. La droite de Berkovich sur  $\mathbf{Z}$ . *Astérisque*, (334) :xii+284, 2010.
- [Poi10b] Jérôme Poineau. Raccord sur les espaces de Berkovich. *Algebra Number Theory*, 4(3) :297–334, 2010.
- [Poi13a] Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur  $\mathbf{Z}$  : étude locale. *Invent. Math.*, 2013. À paraître.
- [Poi13b] Jérôme Poineau. Les espaces de Berkovich sont angéliques. *Bull. Soc. Math. France*, 141(2) :267–297, 2013.
- [Poi13c] Jérôme Poineau. Polynomial approximation of Berkovich spaces and definable types. *Math. Ann.*, 2013. À paraître.
- [PP12] Jérôme Poineau and Andrea Pulita. The convergence Newton polygon of a  $p$ -adic differential equation II : Continuity and finiteness on Berkovich curves. arXiv, 2012. <http://arxiv.org/abs/1209.3663>.
- [PP13] Jérôme Poineau and Andrea Pulita. Continuity and finiteness of the radius of convergence of a  $p$ -adic differential equation *via* potential theory. *J. Reine Angew. Math.*, 2013. À paraître.
- [Poi] Jérôme Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques  $p$ -adiques II. En préparation.



## CHAPITRE 1

### ESPACES DE BERKOVICH GLOBAUX

Dans le langage courant, le terme d'espace de Berkovich désigne, le plus souvent, un espace analytique  $p$ -adique ou, tout du moins, défini sur un corps ultramétrique complet. Pourtant, dans son ouvrage fondateur [Ber90], Vladimir Berkovich a proposé une construction d'espace analytique qui vaut sur un anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$  arbitraire. Le cas de l'anneau des entiers  $\mathbf{Z}$ , muni de la valeur absolue usuelle, nous semble particulièrement digne d'intérêt et nous consacrons ce chapitre aux espaces analytiques sur  $\mathbf{Z}$ . (Les résultats exposés valent en fait encore lorsque l'on remplace  $\mathbf{Z}$  par un anneau d'entiers de corps de nombres, ou un élément d'une classe d'anneaux suffisamment simples, dans un sens que nous préciserons.) Nous nous attacherons spécialement à l'étude locale de ces espaces analytiques et montreront qu'ils jouissent des mêmes bonnes propriétés (noéthérianité des anneaux locaux, cohérence du faisceau structural, etc.) que les espaces analytiques complexes. Les résultats présentés ici sont extraits de [Poi10a], pour les plus élémentaires, et surtout de [Poi13a].

Mettons en garde le lecteur sur le fait que les définitions dans le cadre des espaces sur un anneau de Banach arbitraire diffèrent de celles utilisées pour les espaces définis sur un corps ultramétrique. Nous commencerons donc par les rappeler.

#### 1.1. Définitions

Dans cette section, nous exposons la définition générale d'espace analytique sur un anneau de Banach. Nous fixons un anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$  et un entier  $n \in \mathbf{N}$ . Nous noterons  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$  un  $n$ -uplet de variables.

**Définition 1.1.1.** — *L'espace analytique de dimension  $n$  sur  $A$  est l'ensemble des seminormes multiplicatives sur  $A[\mathbf{T}]$  qui sont bornées sur  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications de la forme*

$$|\cdot| : A[\mathbf{T}] \rightarrow \mathbf{R}_+$$

*vérifiant les propriétés suivantes :*

- i)  $|0| = 0$  et  $|1| = 1$  ;
- ii)  $\forall P, Q \in A[\mathbf{T}], |P + Q| \leq |P| + |Q|$  ;
- iii)  $\forall P, Q \in A[\mathbf{T}], |PQ| = |P||Q|$  ;

iv)  $\exists C \in \mathbf{R}, \forall a \in A, |a| \leq C\|a\|$ .

Cet ensemble sera noté  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ , ou  $\mathcal{M}(A)$  lorsque  $n = 0$ .

**Exemple 1.1.2.** — Soit  $(k, |\cdot|)$  un corps valué complet. Soit  $\alpha \in k^n$ . L'application

$$|\cdot|_\alpha: P(\mathbf{T}) \in k[\mathbf{T}] \mapsto |P(\alpha)| \in \mathbf{R}_+$$

définit un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Nous obtenons ainsi une injection de  $k^n$  dans  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ .

Comme dans le cas des espaces analytiques classiques, à tout point  $x$  de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ , on peut associer un corps résiduel  $\mathcal{H}(x)$  de la façon suivante. Le point  $x$  est associé à une semi-norme multiplicative  $|\cdot|_x$ . L'ensemble

$$\mathfrak{p}_x = \{P \in A[\mathbf{T}] \mid |P|_x = 0\}$$

est un idéal premier de  $A[\mathbf{T}]$ . Le quotient  $A[\mathbf{T}]/\mathfrak{p}_x$  est un anneau intègre et la semi-norme  $|\cdot|_x$  induit une valeur absolue sur son corps des fractions. Nous noterons  $\mathcal{H}(x)$  le complété de ce dernier. Il est naturellement muni d'une valeur absolue, que nous noterons simplement  $|\cdot|$ . Nous disposons alors d'une application naturelle

$$\chi_x: A[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{H}(x).$$

Pour tout  $P \in A[\mathbf{T}]$ , nous noterons  $P(x) = \chi_x(P)$ . Avec les notations précédentes, nous avons  $|P(x)| = |P|_x$ .

On peut également munir l'espace  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  d'une topologie.

**Définition 1.1.3.** — On munit l'espace  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  de la topologie la plus grossière qui rende continues les applications de la forme

$$x \in \mathbf{A}_A^{n,\text{an}} \mapsto |P(x)| \in \mathbf{R}_+$$

avec  $P \in A[\mathbf{T}]$ .

Venons-en maintenant à la définition du faisceau structural.

**Définition 1.1.4.** — Soit  $U$  une partie de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ . Une fraction rationnelle sans pôles sur  $U$  est une application de la forme

$$f: U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x),$$

avec  $f(x) \in \mathcal{H}(x)$  pour tout  $x \in U$ , telle qu'il existe un polynôme  $P \in A[\mathbf{T}]$  et un polynôme  $Q \in A[\mathbf{T}]$  ne s'annulant pas sur  $U$  vérifiant

$$\forall x \in U, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On note  $\mathcal{K}(U)$  l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles sur  $U$ .

**Définition 1.1.5.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ . On note  $\mathcal{O}(U)$  l'ensemble des applications de la forme

$$f: U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x),$$



avec  $f(x) \in \mathcal{H}(x)$  pour tout  $x \in U$ , qui sont localement limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles.

On vérifie que la définition précédente fournit un faisceau d'anneaux sur  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ . En outre, pour tout point  $x \in \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ , le germe  $\mathcal{O}_x$  est un anneau local d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{O}_x \mid f(x) = 0\}.$$

Ainsi venons-nous de munir l'espace  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  d'une structure d'espace localement annelé.

Énonçons maintenant la définition générale d'espace analytique sur  $A$ .

**Définition 1.1.6.** — *Un espace localement annelé  $(V, \mathcal{O}_V)$  est appelé modèle local d'un espace analytique sur  $A$  s'il existe un entier  $n$ , un ouvert  $U$  de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  et un faisceau  $\mathcal{I}$  d'idéaux de type fini de  $\mathcal{O}_U$  tels que  $(V, \mathcal{O}_V)$  soit isomorphe au support du faisceau  $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$ , muni du faisceau  $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$ .*

*Un espace analytique sur  $A$  est un espace localement annelé qui possède un recouvrement par des ouverts isomorphes à un modèle local.*

Dans la suite de ce texte, l'étude de la droite relative au-dessus d'un anneau de Banach jouera un rôle majeur. Nous fixons désormais un tel anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$ . Nous noterons  $B = \mathcal{M}(A)$ ,  $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$  (avec coordonnée  $T$ ) et  $\pi: X \rightarrow B$  le morphisme canonique.

## 1.2. Exemples d'espaces de base

Dans cette section, nous présentons plusieurs espaces de base  $\mathcal{M}(A)$ . Ce seront les exemples typiques sur lesquels nous travaillerons. Nous suggérons au lecteur de les garder en mémoire pour la suite de ce chapitre.

**1.2.1. Corps valué archimédien.** — Supposons que l'anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$  est un corps valué archimédien. Les cas possibles sont connus : il s'agit de  $(\mathbf{C}, |\cdot|_\infty)$  et  $(\mathbf{R}, |\cdot|_\infty^\varepsilon)$ , où  $|\cdot|_\infty$  désigne la valeur absolue usuelle et  $\varepsilon$  un élément de  $]0, 1]$ .

Supposons que  $(A, \|\cdot\|) = (\mathbf{C}, |\cdot|_\infty)$ . (Le choix de la puissance  $\varepsilon = 1$  ne nuit pas à la généralité.) Rappelons qu'à tout point de  $\mathbf{C}^n$ , on peut associer un point de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}}$  (cf. exemple 1.1.2).

Réciproquement, pour tout point  $x$  de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}}$ , le corps résiduel  $\mathcal{H}(x)$  est un corps valué complet contenant  $\mathbf{C}$ . D'après le théorème de Gelfand-Mazur, ce ne peut être que le corps  $\mathbf{C}$  lui-même. Le morphisme  $\chi_x: \mathbf{C}[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{H}(x)$  est donc un morphisme d'évaluation vers  $\mathbf{C}$ . L'image du  $n$ -uplet de variables  $\mathbf{T}$  fournit un élément de  $\mathbf{C}^n$ .

Cela permet de montrer que le morphisme naturel

$$\mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}}$$

est une bijection. On vérifie que c'est en fait un homéomorphisme et même un isomorphisme d'espaces annelés. Cela signifie simplement que les fonctions analytiques sont exactement les limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles.

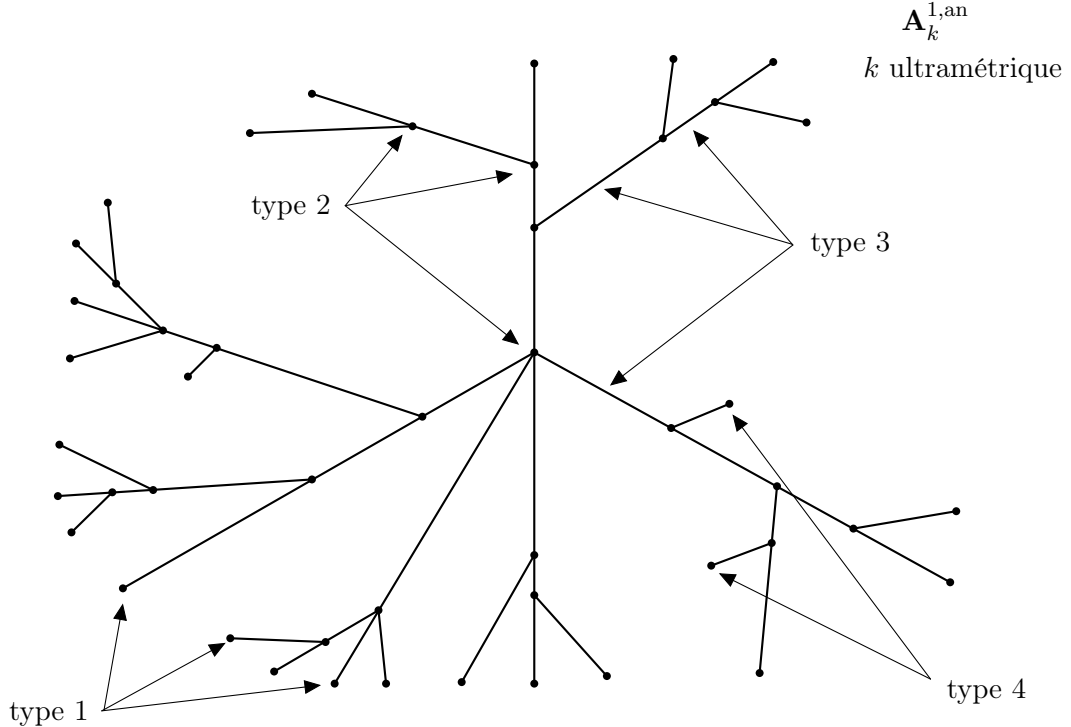
Supposons maintenant que  $(A, \|\cdot\|) = (\mathbf{R}, |\cdot|_\infty)$ . Nous avons vu à l'exemple 1.1.2 que tout point de  $\mathbf{R}^n$  définit un point de  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\text{an}}$ . Remarquons que nous pouvons dire mieux : tout point de  $\mathbf{C}^n$  définit un point de  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\text{an}}$ , par la même formule. Cependant, la situation est différente, puisque deux points conjugués de  $\mathbf{C}^n$  ont la même image dans  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\text{an}}$ .

En raisonnant comme précédemment à l'aide du théorème de Gelfand-Mazur, on montre que le morphisme naturel

$$\mathbf{C}^n / \langle \sigma \rangle \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\text{an}},$$

où  $\sigma$  désigne la conjugaison complexe, est un homéomorphisme. En un point de  $\mathbf{R}^n$ , l'anneau local est isomorphe à un anneau de séries convergentes à coefficients réels. Si l'une des coordonnées du point n'est pas réelle, alors les coefficients des séries qui apparaissent peuvent également être complexes.

**1.2.2. Corps valué ultramétrique.** — Supposons que l'anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$  est un corps valué ultramétrique, que nous noterons plutôt  $(k, |\cdot|)$ . Comme précédemment, à tout point de  $k^n$  on peut associer un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . On peut procéder de même pour les points de  $\bar{k}^n$  et  $\hat{k}^n$ , où  $\bar{k}$  et  $\hat{k}$  désignent respectivement une clôture algébrique de  $k$  et son complété. Comme dans le cas de  $\mathbf{R}$ , certains de ces points ont même image dans  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Plus précisément, on vérifie que l'espace  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  est le quotient de  $\mathbf{A}_{\hat{k}}^{n,\text{an}}$  par l'action des  $k$ -automorphismes continus de  $\hat{k}$ .



Dans le cas de la droite  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ , V. Berkovich a proposé une classification des points en quatre types. Lorsque  $k$  est algébriquement clos, un point  $x$  est dit

- de type 1 si  $\mathcal{H}(x) = k$  ;
- de type 2 si  $\deg.\text{tr.}(\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}) = 1$  et  $|\mathcal{H}(x)^*| = |k^*|$  ;
- de type 3 si  $\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \tilde{k}$  et  $\dim_{\mathbf{Q}}(\sqrt{|\mathcal{H}(x)^*|}/|k^*|) = 1$  ;
- de type 4 si  $\mathcal{H}(x) \neq k$ ,  $\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \tilde{k}$  et  $|\mathcal{H}(x)^*| = |k^*|$ .

Dans le cas général, le type d'un point de  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  est celui d'un de ses relevés dans  $\mathbf{A}_{\hat{k}}^{n,\text{an}}$ .

L'anneau local en un point de  $k$  (et donc de type 1) est un anneau de séries convergentes. Celui en un point de  $\tilde{k}$  s'y ramène. En les autres points (ceux de  $\hat{k} \setminus k$  ou ceux de type 2, 3 ou 4), l'anneau local est un corps.

**1.2.3. Corps normé.** — Soit  $(k, |\cdot|)$  un corps valué complet. Nous pouvons munir  $k$  de la norme  $\|\cdot\| = \max(|\cdot|, |\cdot|_0)$ , où  $|\cdot|_0$  désigne la valeur absolue triviale. On vérifie qu'elle fait de  $k$  un anneau de Banach. Son spectre est homéomorphe au segment  $[0, 1]$  *via* l'application

$$\epsilon \in [0, 1] \mapsto |\cdot|^\epsilon \in \mathcal{M}(k),$$

où nous avons identifié  $|\cdot|^0$  à la valeur absolue triviale  $|\cdot|_0$ . Les anneaux locaux en tous les points sont isomorphes à  $k$ .

$$\begin{array}{ccc} & (k, \max(|\cdot|_0, |\cdot|)) & \\ \mathcal{O} = k & \mathcal{O} = k & \mathcal{O} = k \\ \mathcal{H} = k & \mathcal{H} = k & \mathcal{H} = k \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ |\cdot|_0 & |\cdot|^\epsilon & |\cdot| \\ 0 & \xrightarrow{\epsilon} & 1 \end{array}$$

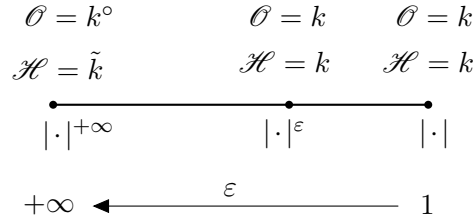
Signalons que nous ne démontrerons l'excellence des anneaux locaux des espaces analytiques au-dessus d'un tel corps que s'il est de caractéristique nulle.

**1.2.4. Anneau de valuation.** — Soit  $(k, |\cdot|)$  un corps valué complet. Considérons son anneau de valuation  $k^\circ$ . Muni de la valeur absolue  $|\cdot|$ , c'est un anneau de Banach. Son spectre est homéomorphe à un segment *via* l'application

$$\epsilon \in [1, +\infty] \mapsto |\cdot|^\epsilon \in \mathcal{M}(k^\circ),$$

où  $|\cdot|^{+\infty}$  est la semi-norme obtenue en composant l'application de réduction  $k \rightarrow \tilde{k}$  avec la valeur absolue triviale sur  $\tilde{k}$ .

$$(k^\circ, |\cdot|)$$

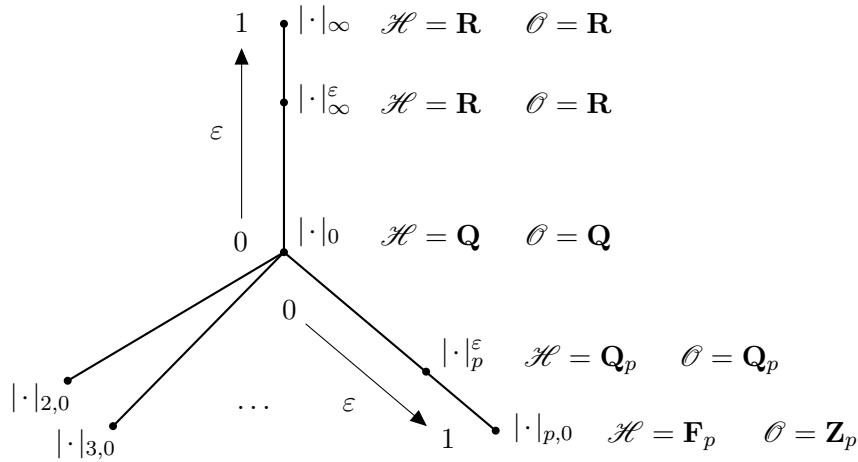


Signalons que les résultats de structure des anneaux locaux que nous obtiendrons à la fin du chapitre ne vaudront que dans le cas noethérien, c'est-à-dire le cas de valuation discrète. Il est cependant vraisemblable que la cohérence du faisceau structural vaille en toute généralité. En outre, le résultat d'excellence ne vaudra que si la caractéristique de  $k$  est nulle (mais celle de  $\tilde{k}$  n'interviendra pas).

**1.2.5. Anneau d'entiers de corps de nombres.** — Ainsi que nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, il est également possible de choisir pour anneau de Banach l'anneau  $\mathbf{Z}$  muni de la valeur absolue usuelle  $|\cdot|_\infty$ . Son spectre se compose des semi-normes suivantes :

- la valeur absolue triviale  $|\cdot|_0$  ;
- les puissances  $|\cdot|_\infty^\varepsilon$  de la valeur absolue usuelle, avec  $\varepsilon \in ]0, 1]$  ;
- pour tout  $p$ , les puissances  $|\cdot|_p^\varepsilon$  de la valeur absolue  $p$ -adique, avec  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  ;
- pour tout  $p$ , la semi-norme  $|\cdot|_{p,0}$  en composant l'application de réduction modulo  $p$  avec la valeur absolue triviale sur  $\mathbf{F}_p$ .

$$(\mathbf{Z}, |\cdot|_\infty)$$



Une construction similaire est possible pour les anneaux d'entiers de corps de nombres. Soit  $K$  un corps de nombres et notons  $A$  son anneau d'entiers. On peut le munir de la norme  $\|\cdot\| = \max_{\sigma} (|\sigma(\cdot)|)$ , où  $\sigma$  parcourt l'ensemble des plongements complexes de  $K$ . Le spectre  $\mathcal{M}(A)$  possède une description explicite proche de celle de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  : un point central associé à la valeur absolue triviale dont part une branche par place finie ou infinie.

### 1.3. Anneaux de séries

Dans notre étude des espaces analytiques sur  $A$ , il sera utile de savoir décrire explicitement certains anneaux de fonctions dans des cas simples. Dans cette section, nous nous placerons sur la droite relative  $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$  (avec variable  $T$ ) au-dessus de  $B = \mathcal{M}(A)$ .

Introduisons quelques notations supplémentaires. Pour toute partie compacte  $V$  de  $X$ , notons  $\mathcal{B}(V)$  le complété de l'anneau des fractions rationnelles sans pôles sur  $V$  pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_V$  sur  $V$ . Posons également

$$\mathcal{B}(V)^\dagger = \varinjlim_{W \supset V} \mathcal{B}(W),$$

où  $W$  décrit l'ensemble des voisinages compacts de  $V$  dans  $X$ . Remarquons que, par définition, pour tout point  $x$  de  $X$ , nous avons

$$\mathcal{B}(\{x\})^\dagger = \varinjlim_{W \ni x} \mathcal{B}(W) \simeq \mathcal{O}_x.$$

Il est pratique de pouvoir retrouver le compact  $V$  à partir de son algèbre  $\mathcal{B}(V)$ . Cela nous pousse à introduire la définition suivante.

**Définition 1.3.1.** — Une partie compacte  $V$  de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  est dite *spectralement convexe* si le morphisme naturel

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$$

induit un homéomorphisme entre  $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$  et  $V$ .

**Exemple 1.3.2.** — Les parties rationnelles de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ , c'est-à-dire celles qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\bigcap_{1 \leq i \leq u} \{x \in \mathbf{A}_A^{n,\text{an}} \mid |P_i(x)| \leq r_i |Q(x)|\}$$

où  $P_1, \dots, P_u, Q$  sont des polynômes à coefficients dans  $A$  ne s'annulant pas simultanément sur  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  et  $r_1, \dots, r_u$  des nombres réels strictement positifs, sont *spectralement convexes*.

Par définition de la topologie, tout point de  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$  possède un système fondamental de voisinages compacts de cette forme.

Soit  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  un anneau de Banach et soit  $t > 0$ . L'algèbre  $\mathcal{A}\langle |T| \leq t \rangle$  est la sous-algèbre de  $\mathcal{A}[[T]]$  constituée des séries de la forme  $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n T^n$ , où  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  telle que la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|a_n\| t^n$  converge. Cette algèbre est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{n \geq 0} a_n T^n \right\|_t = \sum_{n \geq 0} \|a_n\| t^n.$$

Soit  $V$  une partie compacte et spectralement convexe de  $B$ . Comme on l'imagine, l'algèbre  $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$  est alors reliée à l'algèbre du disque fermé

$$\overline{D}_V(t) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V, |T(x)| \leq t\}.$$

Plus précisément, on vérifie, par exemple, que le spectre de  $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$  est canoniquement homéomorphe à  $\overline{D}_V(t)$  et que  $\|\cdot\|_{\overline{D}_V(t)} \leq \|\cdot\|_t$ . Cependant, ces normes ne sont pas égales, interdisant ainsi aux anneaux de fonctions d'être isomorphes. De forts liens existent pourtant, comme en atteste le lemme qui suit.

**Lemme 1.3.3.** — *Soit  $V$  une partie compacte et spectralement convexe de  $B$ . Soient  $t, v \in \mathbf{R}$  tels que  $0 < v < t$ . Pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$ , nous avons*

$$\|f\|_v \leq \frac{t}{t-v} \|f\|_{\overline{D}_V(t)}.$$

*Démonstration.* — On peut raisonner fibre à fibre et donc se ramener au cas où  $V$  est un singleton  $\{x\}$ . Si le corps  $\mathcal{H}(x)$  est ultramétrique, le résultat découle de l'expression explicite de la norme uniforme sur un disque ; s'il est archimédien, on utilise la formule de Cauchy.  $\square$

Ce résultat permet de montrer que, même si les anneaux de fonctions diffèrent, on peut retrouver des isomorphismes en considérant des limites.

**Proposition 1.3.4.** — *Soit  $V$  une partie compacte de  $B$  qui possède un système fondamental de voisinages spectralement convexes. Soit  $t > 0$ . Alors le morphisme naturel*

$$\varinjlim_{W \supset V, t < u} \mathcal{B}(W)\langle |T| \leq u \rangle \rightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(t))^\dagger,$$

*où  $W$  décrit l'ensemble des voisinages compacts de  $V$  dans  $B$ , est un isomorphisme.*

**Corollaire 1.3.5.** — *Soit  $b$  un point de  $B$ . Notons  $0_b$  le point 0 de la fibre au-dessus de  $b$ . Nous avons un isomorphisme naturel*

$$\varinjlim_{V \ni b, t > 0} \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{0_b}.$$

**Remarque 1.3.6.** — Dans tous les arguments qui précèdent, on peut remplacer les disques par des couronnes

$$\overline{C}_V(s, t)$$

(avec  $0 < s \leq t$ ) et les anneaux de séries par des anneaux de séries de Laurent

$$\mathcal{B}(V)\langle s \leq |T| \leq t \rangle.$$

#### 1.4. Morphismes finis

Dans la section précédente, nous sommes parvenu à obtenir des descriptions explicites d'anneaux de sections au voisinage de disques ou de couronnes. Ces résultats sont malheureusement insuffisants pour étudier tous les points des espaces analytiques et il nous faudra savoir traiter le cas d'espaces plus compliqués.

Introduisons une nouvelle notation. Pour  $V \subset B$ ,  $P \in A[T]$  et  $s, t \in \mathbf{R}$ , posons

$$\overline{C}_V(P; s, t) = \{x \in X \mid s \leq |P(x)| \leq t\}.$$

**Lemme 1.4.1.** — *Soit  $x$  un point de  $X$  et soit  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $X$ . Il existe un voisinage compact et spectralement convexe  $V$  de  $b$  dans  $B$ , un polynôme  $P$  à coefficients dans  $\mathcal{B}(V)$  et des nombres réels  $s$  et  $t$  tels que  $\overline{C}_V(P; s, t)$  soit un voisinage de  $x$  dans  $U$ .*

*Démonstration.* — Notons  $y = \pi(x)$ . La fibre  $\pi^{-1}(y)$  est isomorphe à  $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{1, \text{an}}$ . La variation des polynômes sur la droite analytique admet une description simple et on en déduit qu'il existe  $P \in \mathcal{H}(y)[T]$  et  $s, t \in \mathbf{R}$  tels que  $\overline{C}_y(P; s, t)$  soit un voisinage de  $x$  dans  $U \cap \pi^{-1}(y)$ .

Précisons un peu. Quitte à restreindre  $U$ , nous pouvons supposer qu'il est connexe, que son complémentaire contient au moins une composante connexe bornée et que chacune de ces composantes bornées  $C_i$  contient un point rigide  $x_i$ . Notons  $P_i \in \mathcal{H}(y)[T]$  le polynôme minimal du point  $x_i$ . Les composantes  $C_i$  étant en nombre fini, nous pouvons considérer le polynôme  $P = \prod_i P_i$ . On vérifie alors que, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, le compact  $\overline{C}_y(P; |P(x)| - \varepsilon, |P(x)| + \varepsilon)$  convient.

Par définition de  $\mathcal{H}(y)$ , on peut approcher chaque coefficient du polynôme  $P$  avec une précision arbitraire par un quotient d'éléments de  $A$  sans pôle en  $x$  et donc par un élément de  $\mathcal{B}(V)$  pour un voisinage compact  $V$  de  $b$  dans  $B$  bien choisi. Nous pouvons donc supposer que  $P \in \mathcal{B}(V)[T]$ . Un argument de compacité montre alors qu'il existe un voisinage  $W$  de  $b$  dans  $V$ , que nous pouvons de plus supposer compact et spectralement convexe, tel que

$$\overline{C}_W(P; |P(x)| - \varepsilon, |P(x)| + \varepsilon) \subset U.$$

□

Le lemme précédent indique qu'une bonne compréhension des anneaux des lemniscates  $\overline{C}_V(P; s, t)$  nous permettrait de contrôler les germes du faisceau structural  $\mathcal{O}_X$  en tout point. Or l'endomorphisme de la droite  $X_V$  défini par le polynôme  $P$  induit un morphisme fini de  $\overline{C}_V(P; s, t)$  dans  $\overline{C}_V(s, t)$ . Nous allons donc consacrer cette section à l'étude de certains morphismes finis.

Fixons le cadre. Soit  $\mathcal{A}$  un anneau de Banach et soit  $G \in \mathcal{A}[S]$  un polynôme unitaire de degré  $d \geq 1$ . Nous porterons notre attention sur le morphisme  $\varphi_G: Z_G \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ , où  $Z_G$  désigne le fermé de Zariski de  $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$  défini par l'équation  $G = 0$ . Le cas mentionné précédemment correspond aux données  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\overline{C}_V(s, t))$  (avec variable  $T$ ) et  $G(S) = P(S) - T$ .

Considérons l'anneau  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ . Nous pouvons naturellement le munir de plusieurs normes. En utilisant une division euclidienne, on montre que  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  est isomorphe à  $\mathcal{A}^d$  et l'on en déduit une première norme  $\|\cdot\|_{\text{div}}$  en prenant le maximum des normes des coordonnées. L'anneau  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  est complet pour cette norme. En revanche, la norme n'est pas une norme d'algèbre puisqu'elle n'est pas sous-multiplicative.

Soit  $t > 0$ . Nous pouvons plonger  $\mathcal{A}[S]$  dans  $\mathcal{A}(\langle S \rangle \leq t)$ . Nous pouvons alors munir  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  de la semi-norme quotient  $\|\cdot\|_{t, \text{rés}}$  induite par  $\|\cdot\|_t$ . Par définition, pour tout

$F \in \mathcal{A}[S]/(G(S))$ , nous avons

$$\|F\|_{t,\text{rés}} = \inf \left( \left\{ \max_{0 \leq i \leq e} (\|a_i\|t^i), \sum_{i=0}^e a_i S^i = F \pmod{G}, e \in \mathbf{N} \right\} \right).$$

Cette semi-norme est une semi-norme de  $\mathcal{A}$ -algèbres, mais il n'est pas évident que ce soit une norme ni qu'elle rende l'espace  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  complet lorsqu'elle l'est.

Heureusement, la norme et la semi-norme précédente se comparent facilement lorsque  $t$  est assez grand. Cette dernière condition est naturelle puisqu'il faut assurer que le fermé de Zariski  $Z_G$  soit contenu dans le disque relatif de rayon  $t$ . La preuve de la proposition qui suit est basée sur un théorème de division de Weierstraß que nous ne détaillerons pas.

**Proposition 1.4.2.** — *Pour tout  $t$  assez grand, la semi-norme  $\|\cdot\|_{t,\text{rés}}$  sur  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\text{div}}$ .*

*En particulier, la semi-norme  $\|\cdot\|_{t,\text{rés}}$  est une norme et elle rend l'algèbre  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  complète.*

Dans la suite de ce texte, nous fixerons un tel  $t$  assez grand et nous contenterons d'écrire  $\|\cdot\|_{\text{rés}}$ .

Nous pouvons maintenant considérer le spectre  $\mathcal{M}(\mathcal{A}[S]/(G(S)))$ . Cela fait apparaître une nouvelle semi-norme sur l'anneau  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  : il s'agit de la semi-norme spectrale, celle induite par la semi-norme uniforme sur ce spectre.

**Définition 1.4.3.** — *Nous dirons que l'algèbre  $\mathcal{A}$  satisfait la condition  $(N_G)$  si la norme résiduelle  $\|\cdot\|_{\text{rés}}$  sur  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  est équivalente à la semi-norme spectrale.*

En vertu de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie au-dessus d'un corps valué complet, la condition précédente est valable lorsque  $\mathcal{A}$  est un corps valué et que la semi-norme spectrale sur  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  est une norme, autrement dit, lorsque le polynôme  $G$  est sans facteurs multiples. De façon plus générale, la condition est valable lorsque  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  est une algèbre affinoïde réduite (cf. [Ber90, proposition 2.1.4 (ii)]).

**Proposition 1.4.4.** — *Notons  $Y = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Si  $\mathcal{A}$  satisfait la condition  $(N_G)$ , alors nous avons un isomorphisme naturel*

$$\mathcal{B}(Y)[S]/(G(S)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\varphi_G^{-1}(Y)),$$

où  $\mathcal{B}(\varphi^{-1}(Y))$  est calculé en considérant  $\varphi^{-1}(Y)$  comme partie de  $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ .

*En outre, ce morphisme et son inverse sont bornés.*

Nous ne connaissons aucun résultat général permettant d'affirmer l'équivalence entre norme résiduelle et semi-norme spectrale, mais pouvons énoncer deux conditions suffisantes. Dans la première, on se ramène à des cas connus.

**Définition 1.4.5.** — *Soit  $V$  une partie compacte de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Un bord analytique de  $V$  est une partie fermée  $\Gamma$  de  $V$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{B}(V)$ , on ait  $\|f\|_V = \|f\|_{\Gamma}$ .*



**Définition 1.4.6.** — Un point  $x$  de  $B$  est dit *ultramétrique* si la valeur absolue canonique définie sur le corps  $\mathcal{H}(x)$  est ultramétrique.

On appelle *partie ultramétrique* de  $B$ , et on note  $B_{\text{um}}$ , l'ensemble des points ultramétriques de  $B$ . Une partie  $V$  de  $B$  est dite *ultramétrique* si elle est contenue dans  $B_{\text{um}}$ .

**Proposition 1.4.7.** — Soit  $V$  une partie compacte et spectralement convexe de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Supposons, en outre, qu'elle soit ultramétrique et possède un bord analytique fini. Alors, pour toute partie de la forme  $C = \overline{D}(t)$ , avec  $t > 0$ , ou  $C = \overline{C}(s, t)$ , avec  $0 < s \leq t$ , l'algèbre  $\mathcal{B}(C)$  satisfait la condition  $(N_G)$ .

*Démonstration.* — Traitons le cas où  $C = \overline{D}(t)$ . L'hypothèse sur la finitude du bord analytique permet de se ramener à démontrer un résultat similaire en remplaçant  $\mathcal{B}(V)$  par un corps valué  $\mathcal{H}(\gamma)$  avec  $\gamma$  dans le bord de  $V$ . L'anneau  $\mathcal{H}(\gamma)[S]/(G(\gamma)(S))$  est alors l'anneau de la lemniscate  $\overline{D}(G; t)$ . En particulier, il est réduit et le résultat classique d'équivalence des normes s'applique donc.  $\square$

Nous utiliserons cette proposition lorsque nous serons en présence de valeurs absolues ultramétriques. En effet, dans ce contexte, les espaces ont tendance à avoir des bords analytiques finis. Elle sera particulièrement adaptée au voisinage de points ayant un corps résiduel de caractéristique  $p > 0$ . En effet, en un tel point, on a  $p = 0$  et la condition  $|p| < 1$  en définit un voisinage dont tous les points sont ultramétriques.

Les hypothèses précises dont nous aurons besoin figurent dans la définition suivante.

**Définition 1.4.8.** — Un point de  $B$  est dit *ultramétrique typique* s'il est contenu dans l'intérieur de la partie ultramétrique de  $B$  et s'il possède un système fondamental de voisinages compacts, spectralement convexes et admettant un bord analytique fini.

Il est aisé de vérifier que, dans les exemples d'espaces de base  $B$  qui apparaissent à la section 1.2, les points de l'intérieur de la partie ultramétrique de  $B$  sont tous ultramétriques typiques.

La seconde condition suffisante fait intervenir une hypothèse de séparabilité. La semi-norme uniforme d'un élément  $f$  de  $\mathcal{A}[S]/(G(S))$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{A}[S]/(G(S))) \simeq Z_G$  se calcule en prenant le supremum des valeurs prises par  $f$  sur les racines du polynôme  $G$  dans chaque fibre. Si le polynôme  $G$  est séparable, son nombre de racines est égal à son degré et nous pouvons aisément retrouver  $f$  lui-même à l'aide de ses valeurs aux racines de  $G$  via la formule d'interpolation de Lagrange. Le critère qui suit se démontre en suivant cette idée.

**Proposition 1.4.9.** — Supposons qu'en tout point  $x$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , le polynôme  $G(x)(S) \in \mathcal{H}(x)[S]$  soit séparable. Alors l'algèbre  $\mathcal{A}$  satisfait la condition  $(N_G)$ .

Nous utiliserons cette proposition pour traiter des points dont le corps résiduel est de caractéristique nulle. En un tel point  $x$ , on peut facilement imposer à un polynôme  $G$  d'être séparable et il le reste alors sur un voisinage, comme on peut le voir en utilisant la continuité du résultant, par exemple.

Dans le cas mentionné plus haut, lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\overline{C}_V(s, t))$  (avec variable  $T$ ) et  $G(S) = P(S) - T$ , la condition  $(N_G)$  entraîne un isomorphisme

$$(1.4.1) \quad \mathcal{B}(\overline{C}_V(s, t))[S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\overline{C}_V(P; s, t))$$

qui est borné, ainsi que son inverse. Dans la suite de ce texte, nous utiliserons cet isomorphisme sans plus de précisions, en assurant le lecteur que nous en avons scrupuleusement vérifié les conditions d'application.

### 1.5. Théorème de division de Weierstraß

Notre étude locale des espaces analytiques est basée, comme en géométrie analytique complexe, sur le théorème de division de Weierstraß : un résultat qui permet d'écrire une fonction analytique comme la somme d'un multiple d'une autre et d'un reste polynomial. Il permet de déduire certaines propriétés des algèbres analytiques (noéthérianité, régularité, etc.) des mêmes propriétés des algèbres de polynômes, cadre dans lequel elles sont bien connues. Nous détaillerons quelques applications à la prochaine section.

Énonçons maintenant le théorème.

**Théorème 1.5.1 (de division de Weierstraß).** — *Soit  $b$  un point de  $B$ . Soit  $P(S) \in \mathcal{H}(b)[S]$  un polynôme irréductible et unitaire de degré  $d$ . Si le polynôme  $P$  est inséparable et si le corps résiduel  $\mathcal{H}(b)$  est trivialement valué, supposons que le point  $b$  est ultramétrique typique.*

*Notons  $x$  le point rigide de la fibre  $X_b$  défini par l'équation  $P = 0$ . Soit  $G$  un élément de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Supposons que son image dans  $\mathcal{O}_{X_b,x}$  n'est pas nulle et notons  $n$  sa valuation  $P$ -adique.*

*Alors, pour tout  $F \in \mathcal{O}_{X,x}$ , il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathcal{O}_{X,x}^2$  tel que*

*i)  $F = QG + R$ ;*

*ii)  $R \in \mathcal{O}_{B,b}[S]$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $nd$ .*

Nous allons présenter les grandes lignes de la preuve de ce théorème en distinguant plusieurs cas.

#### ♦ Le point $x$ est le point 0 de la fibre $X_b$ .

D'après le corollaire 1.3.5, nous pouvons alors décrire explicitement l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  comme un anneau de séries convergentes.

Les fonctions  $F$  et  $G$  possèdent des représentants dans  $\mathcal{B}(V)\langle |S| \leq r \rangle$  avec  $V$  voisinage compact de  $b$  et  $r > 0$  bien choisis. La fonction  $G$  s'écrit sous la forme  $G = \sum_{i \geq 0} g_i S^i$  avec  $g_0(b) = \dots = g_{n-1}(b) = 0$  et  $g_n(b) \neq 0$ . La fonction  $g_n$  est donc inversible au voisinage de  $b$ . Quitte à remplacer  $V$  par un voisinage plus petit et à diviser par  $g_n$ , nous pouvons supposer que  $g_n = 1$ .

Soient  $U$  un voisinage compact de  $b$  dans  $V$  et  $s \in ]0, r]$ . Tout élément  $\varphi$  de  $\mathcal{B}(U)\langle |S| \leq s \rangle$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\varphi = \alpha(\varphi)S^n + \beta(\varphi)$ , avec  $\alpha(\varphi) \in \mathcal{B}(U)\langle |S| \leq s \rangle$  et  $\beta(\varphi) \in \mathcal{B}(U)[S]$  de degré inférieur à  $n - 1$ . Remarquons que nous avons alors

$$\|\varphi\| = \|\alpha(\varphi)\|s^n + \|\beta(\varphi)\|.$$

Considérons l'application linéaire

$$A: \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(U)\langle |S| \leq s \rangle & \rightarrow & \mathcal{B}(U)\langle |S| \leq s \rangle \\ \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi)G + \beta(\varphi) \end{array}.$$

Pour démontrer le résultat, il suffit de démontrer que  $A$  est un isomorphisme lorsque  $U$  et  $s$  sont assez petits. Puisque  $\mathcal{B}(U)\langle |S| \leq s \rangle$  est un anneau de Banach, il suffit de démontrer que  $\|A - \text{Id}\| < 1$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme subordonnée, autrement dit, qu'il existe une constante  $C \in [0, 1[$  telle que, pour tout élément  $\varphi$  de  $\mathcal{B}(U)\langle |S| \leq s \rangle$ , on ait  $\|A(\varphi) - \varphi\| \leq C\|\varphi\|$ .

Or, nous avons

$$\begin{aligned} \|A(\varphi) - \varphi\| &= \|\alpha(\varphi)(G - S^n)\| \\ &\leq \|\alpha(\varphi)\| \left( \left\| \sum_{i=0}^{n-1} g_i S^i \right\| + s^{n+1} \left\| \sum_{i \geq n+1} g_i S^{i-n-1} \right\| \right) \\ &\leq s^{-n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \|g_i\|_U s^i \right) \|\varphi\| + s \left( \sum_{i \geq n+1} \|g_i\|_U s^{i-n-1} \right) \|\varphi\|. \end{aligned}$$

La somme  $\sum_{i \geq n+1} \|g_i\|_U s^{i-n-1}$  est bornée par la norme de  $G$ . Le terme  $s \left( \sum_{i \geq n+1} \|g_i\|_U s^{i-n-1} \right)$  peut donc être rendu arbitrairement petit en choisissant convenablement  $s$ .

Pour  $i \in [0, n-1]$ , nous avons  $g_i(b) = 0$ . Une fois  $s$  fixé, le terme  $s^{-n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \|g_i\|_U s^i \right)$  peut donc, lui aussi, être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de  $U$ .

Le résultat s'ensuit.

♦ **Le point  $x$  est un point rigide épais.**

Cela signifie que son polynôme minimal unitaire  $P$  est à coefficients dans  $\mathcal{O}_{B,b}$ .

Il existe alors un voisinage compact  $V$  de  $b$  dans  $B$  tels que les coefficients de  $P$  appartiennent à  $\mathcal{B}(V)$ . La famille  $(\overline{D}_U(P; s))_{(U,s)}$  où  $U$  décrit l'ensemble des voisinages compacts de  $b$  dans  $V$  et  $s$  décrit  $\mathbf{R}_+^*$ , forme alors un système fondamental de voisinages de  $x$  dans  $X$ . Nous pouvons alors adapter les arguments précédents en utilisant les isomorphismes mentionnés à la section 1.4.

♦ **Le point  $x$  est un point rigide maigre.**

Cela signifie que son polynôme minimal unitaire  $P$  est à coefficients dans  $\mathcal{H}(b)$ , mais pas  $\mathcal{O}_{B,b}$ .

Dans ce cas, il n'est plus possible d'utiliser le polynôme  $P$  pour définir une base de voisinage explicite du point  $x$ . Remarquons cependant que nos arguments reposent sur des techniques d'algèbres de Banach et des majorations. Si nous perturbons peu les données du problème, les résultats resteront valables. L'idée consiste alors à remplacer le polynôme  $P$  par un polynôme  $P_\varepsilon$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_{B,b}$  suffisamment proche de  $P$ . Nous passons sous silence les détails techniques. Remarquons que cette méthode ne peut s'appliquer si le corps  $\mathcal{H}(b)$  est de valuation triviale, mais que, dans ce cas, le morphisme naturel  $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{H}(b)$  est surjectif.

Du théorème de division de Weierstraß, nous pouvons déduire, par la méthode habituelle, le théorème de préparation. Remarquons que, cette fois-ci, nous imposons au polynôme  $P$  d'être défini au voisinage du point  $b$  de la base. Autrement dit, nous ne considérons que le cas de points rigides épais.

**Théorème 1.5.2 (de préparation de Weierstraß).** — Soit  $b$  un point de  $B$ . Soit  $P(S) \in \kappa(b)[S]$  un polynôme unitaire de degré  $d$  dont l'image dans  $\mathcal{H}(b)[S]$  est irréductible. Si le polynôme  $P$  est inséparable et si le corps résiduel  $\mathcal{H}(b)$  est trivialement valué, supposons que le point  $b$  est ultramétrique typique.

Notons  $x$  le point rigide de la fibre  $X_b$  défini par l'équation  $P = 0$ . Soit  $G$  un élément de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Supposons que son image dans  $\mathcal{O}_{X_b,x}$  n'est pas nulle et notons  $n$  sa valuation  $P$ -adique.

Alors, il existe un unique couple  $(\Omega, E) \in \mathcal{O}_{X,x}^2$  tel que

- i)  $\Omega \in \mathcal{O}_{B,b}[S]$  est un polynôme unitaire de degré  $nd$  vérifiant  $\Omega(b)(S) = P(S)^n$  dans  $\mathcal{H}(b)[S]$  ;
- ii)  $E$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  ;
- iii)  $G = \Omega E$ .

*Démonstration.* — En appliquant le théorème de division de Weierstraß avec les polynômes  $P^n$  et  $G$ , nous obtenons une égalité de la forme  $P^n = QG + R$ , où  $R$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $nd$ . On vérifie alors que  $Q$  est inversible au voisinage de  $x$  et que les éléments  $E = Q^{-1}$  et  $\Omega = P^n - R$  conviennent.  $\square$

## 1.6. Propriétés locales

Les théorèmes de division et de préparation de Weierstraß étant à notre disposition, nous pouvons maintenant mener une étude détaillée de la structure des anneaux locaux des espaces de Berkovich.

**1.6.1. Le cas de la droite.** — Soient  $b$  un point de  $B$  et  $x$  un point de  $X_b$ . Nous cherchons à obtenir des informations sur  $\mathcal{O}_{X,x}$  en fonction de  $\mathcal{O}_{B,b}$ .

♦ **L'anneau local  $\mathcal{O}_{X_b,x}$  est un corps.**

Cela signifie que le point  $x$  est de type 2, 3 ou 4 dans sa fibre  $X_b$  ou bien qu'il est de type 1 transcendant, c'est-à-dire que le corps  $\mathcal{H}(x)$  se plonge dans le complété d'une clôture algébrique du corps  $\mathcal{H}(b)$ , mais pas dans la clôture algébrique elle-même.

Nous ne savons pas relier les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{B,b}$  et  $\mathcal{O}_{X,x}$  en général, mais pouvons néanmoins y parvenir dans quelques cas particuliers.

Supposons que  $\mathcal{O}_{B,b}$  est un corps. Il semble alors raisonnable de chercher à montrer que  $\mathcal{O}_{X,x}$  en est un également. Pour cela, il suffit de montrer que tout élément  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$  qui s'annule en  $x$  est, en réalité, identiquement nul au voisinage de  $x$ .

Soit  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$  tel que  $f(x) = 0$ . Supposons, pour simplifier, que  $f$  soit définie sur une couronne relative  $\overline{C}_V(s, t)$ , où  $V$  est un voisinage compact et spectralement convexe de  $b$

dans  $B$  et  $s$  et  $t$  des nombres réels tels que  $0 < s \leq t$ . Dans ce cas, la fonction possède un développement en série de Laurent convergente sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n.$$

Par hypothèse, nous avons  $f(x) = 0$ . Puisque  $\mathcal{O}_{X_b, x}$  est un corps, nous en déduisons que la restriction de  $f$  à la fibre  $X_b$  est nulle, autrement dit, que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $a_n(b) = 0$ . Puisque l'anneau local  $\mathcal{O}_{B, b}$  est, lui aussi, un corps, cela implique que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $a_n$  est nulle au voisinage de  $b$ . Cependant, cela ne suffit pas pour conclure que la série  $f$  est nulle, puisque le voisinage précédent dépend *a priori* de  $n$ . Il nous faudra imposer une condition supplémentaire pour parvenir à nos fins.

**Définition 1.6.1.** — Soit  $C$  une partie de  $B$ . Nous dirons qu'un système fondamental de voisinages  $\mathcal{U}$  de  $C$  est fin s'il contient un système fondamental de voisinages de tous ses éléments.

**Définition 1.6.2.** — Nous dirons que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B, b}$  est un corps fort s'il existe un système fondamental fin  $\mathcal{U}$  de voisinages compacts et spectralement convexes de  $b$  dans  $B$  vérifiant la propriété suivante : pour tout voisinage compact  $V$  de  $b$  dans  $B$ , tout élément  $g \in \mathcal{B}(V)$  tel que  $g(b) = 0$  et tout  $U \in \mathcal{U}$  inclus dans  $\overset{\circ}{V}$ , on a  $g = 0$  dans  $\mathcal{B}(U)$ .

**Remarque 1.6.3.** — Remarquons que, si  $B$  est localement connexe et si le principe du prolongement analytique y vaut, alors tout anneau local  $\mathcal{O}_{B, b}$  qui est un corps est un corps fort. Cette condition est toujours vérifiée dans nos exemples.

Si nous supposons maintenant que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B, b}$  est un corps fort, alors il existe un voisinage  $W$  de  $b$  dans  $V$  sur lequel tous les  $a_n$  sont nuls. La fonction  $f$  est alors nulle sur  $\overline{C}_W(s, t)$ , et donc dans  $\mathcal{O}_{X, x}$ .

En général, la fonction  $f$  n'est pas définie sur une couronne relative, mais sur une lemniscate relative. Ce cas se ramène au précédent à l'aide de l'isomorphisme 1.4.1. Nous venons de démontrer le résultat suivant.

**Proposition 1.6.4.** — Si  $\mathcal{O}_{X_b, x}$  est un corps et si  $\mathcal{O}_{B, b}$  est un corps fort, alors  $\mathcal{O}_{X, x}$  est un corps.

Nous pouvons mettre en œuvre une stratégie similaire en supposant que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B, b}$  est un anneau de valuation discrète. Notons  $\pi$  une uniformisante de cet anneau.

Soit  $f \in \mathcal{O}_{X, x}$  tel que  $f(x) = 0$ . En reprenant le raisonnement précédente, on parvient à une situation où tous les coefficients  $a_n$ , avec  $n \in \mathbf{Z}$  sont divisibles par  $\pi$ . Il faut encore s'assurer de deux choses : qu'ils sont divisibles par  $\pi$  sur un même voisinage et que la série obtenue en divisant chaque  $a_n$  par  $\pi$  reste convergente. Pour cela, nous allons demander que la norme du quotient soit majorée en fonction de la norme de l'élément à l'aide d'une constante qui ne dépend que du voisinage.

**Définition 1.6.5.** — Nous dirons que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,b}$  est un anneau fortement de valuation discrète s'il existe un système fondamental fin  $\mathcal{U}$  de voisinages compacts et spectralement convexes de  $b$  dans  $B$  vérifiant la propriété suivante : pour tout voisinage compact  $V$  de  $b$  dans  $B$ , il existe une famille de nombre réels strictement positifs  $(K_{U,V})_{U \in \mathcal{U}}$  telle que, pour tout élément  $g \in \mathcal{B}(V)$  tel que  $g(b) = 0$  et tout  $U \in \mathcal{U}$  inclus dans  $\overset{\circ}{V}$ , il existe  $h \in \mathcal{B}(U)$  tel que  $g = \pi h$  dans  $\mathcal{B}(U)$  et  $\|h\|_U \leq K_{U,V} \|g\|_V$ .

**Proposition 1.6.6.** — Si  $\mathcal{O}_{X_b,x}$  est un corps et si  $\mathcal{O}_{B,b}$  est un anneau fortement de valuation discrète, alors  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau fortement de valuation discrète.

**Remarque 1.6.7.** — On peut en fait montrer que les versions fortes des propriétés sont encore vérifiées par l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Comme on l'imagine, on peut prendre pour système fondamental de voisinages fins des disques, couronnes ou lemniscates relatifs. Les propriétés requises se démontrent alors à l'aide de la majoration du lemme 1.3.3 et du caractère borné de l'isomorphisme (1.4.1).

**Remarque 1.6.8.** — Il est possible de généraliser la définition de corps fort et d'anneau fortement de valuation discrète en une notion d'anneau fortement régulier de dimension  $n$  quelconque. Grossièrement parlant, on demande alors que l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de l'anneau de dimension  $n$  en question soit engendré par  $n$  éléments  $f_1, \dots, f_n$  et que tout élément  $f$  de  $\mathfrak{m}$  puisse s'écrire comme combinaison linéaire des  $f_i$  avec des coefficients dont la norme est majorée en fonction de celles des  $f_i$ . La définition précise, qui ressemble à celle d'anneau fortement de valuation discrète, fait intervenir de nombreux quantificateurs et son écriture est assez pénible.

♦ **Le point  $x$  est un point rigide maigre.**

Notons  $P \in \mathcal{H}(b)[T]$  le polynôme minimal unitaire du point  $x$ . Par hypothèse, il n'appartient pas à  $\kappa(b)[T]$ . Cette condition impose qu'aucun polynôme non nul à coefficients dans  $\mathcal{O}_{B,b}$  ne peut s'annuler au point  $x$ . En d'autres termes, le point  $x$  définit un fermé de Zariski de la fibre  $X_b$  qui ne s'étend à aucun voisinage. Ce cas est en réalité très proche du précédent.

**Lemme 1.6.9.** — Soit  $b$  un point de  $B$ . Si son corps résiduel  $\mathcal{H}(b)$  est imparfait et trivialement valué, supposons que le point  $b$  est ultramétrique typique. Soit  $x$  un point rigide maigre de  $X_b$ . Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{O}_{X,x}$  tel que  $f(x) = 0$ . Alors  $f$  est nul dans  $\mathcal{O}_{X_b,x}$ .

*Démonstration.* — Notons  $d$  le degré de  $P$ . Supposons, par l'absurde, que  $f$  n'est pas nul dans l'anneau de valuation discrète  $\mathcal{O}_{X_b,x}$  et notons  $n$  sa valuation  $P$ -adique. Les hypothèses de l'énoncé permettent d'appliquer le théorème de Weierstraß avec  $F = S^{nd}$  et  $G = f$ . On en déduit qu'il existe un polynôme  $R$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_{B,b}$  et de degré strictement inférieur à  $nd$  tel que  $F = Qf + R$ . En particulier, le polynôme non nul  $F - R$  s'annule en  $x$ , et nous aboutissons à une contradiction.  $\square$

Nous pouvons alors adapter les démonstrations des propositions 1.6.4 et 1.6.6 dans ce cadre.

◊ **Le point  $x$  est un point rigide épais.**

Notons  $P \in \kappa(b)[T]$  le polynôme minimal unitaire du point  $x$ . Nous pouvons le relever en un polynôme à coefficients dans  $\mathcal{O}_{B,b}$ .

Comme précédemment, on peut traiter facilement les cas où l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,b}$  est de petite dimension. Lorsque  $\mathcal{O}_{B,b}$  est un corps fort, l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau (fortement) de valuation discrète d'uniformisante  $P$ . Lorsque  $\mathcal{O}_{B,b}$  est un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante  $\pi$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau (fortement) régulier de dimension 2 d'idéal maximal  $(\pi, P)$ .

Contrairement aux cas précédents, ici, le théorème de division de Weierstraß nous permet également de traiter le cas d'anneaux  $\mathcal{O}_{B,b}$  plus compliqués.

Expliquons sur un exemple comment procéder. Considérons un idéal  $I$  de  $\mathcal{O}_{X,x}$  et supposons qu'il contient un élément  $G$  dont l'image dans  $\mathcal{O}_{X_b,b}$  n'est pas nulle. Alors le théorème de division de Weierstraß assure que l'on a  $I = (G) + I \cap \mathcal{O}_{B,b}[T]$ . Si l'on sait déjà que l'anneau  $\mathcal{O}_{B,b}$  est noethérien, alors l'anneau  $\mathcal{O}_{B,b}[T]$  l'est aussi et son idéal  $I \cap \mathcal{O}_{B,b}[T]$  est donc de type fini. On en déduit que l'idéal  $I$  est également de type fini.

Ce genre de techniques permet de déduire la noethérianité de  $\mathcal{O}_{X,x}$  de celle de  $\mathcal{O}_{B,b}$ . Des méthodes similaires, plus ou moins élaborées, s'appliquent pour la régularité, la dimension de Krull, l'excellence, etc.

**1.6.2. Le cas général.** — Pour étudier les anneaux locaux des espaces affines, nous allons maintenant procéder par récurrence. Les espaces de base  $B$  que nous allons considérer seront assez simples. Nous allons imposer que tous leurs anneaux locaux soient des corps forts ou des anneaux fortement de valuation discrète.

**Définition 1.6.10.** — *Un anneau de Banach  $(A, \|\cdot\|)$  est dit de base si, pour tout point  $b$  de son spectre  $B = \mathcal{M}(A)$ , il existe un système fondamental fin de voisinages compacts et spectralement convexes  $\mathcal{U}_b$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) *l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,b}$  est un corps fort ou un anneau fortement de valuation discrète ;*
- ii) *si  $\mathcal{H}(b)$  est de caractéristique non nulle et trivialement valué, tout élément de  $\mathcal{U}_b$  est contenu dans  $B_{um}$  et possède un bord analytique fini (ce qui entraîne que le point  $b$  est ultramétrique typique).*

On vérifie sans peine que les exemples présentés à la section 1.2 sont des anneaux de Banach de base dans ce sens. Nous supposons désormais que l'anneau de Banach  $A$  que nous considérons est un anneau de Banach de base.

Considérons l'espace affine  $X_n = \mathbf{A}_A^{n, \text{an}}$  avec coordonnées  $T_1, \dots, T_n$ . Soit  $x \in \mathbf{A}_A^{n, \text{an}}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , notons  $X_i = \mathbf{A}_A^{i, \text{an}}$ , avec coordonnées  $T_1, \dots, T_i$ , et  $x_i$  la projection de  $x$  sur  $X_i$ . Quitte à permuter les coordonnées, nous pouvons supposer qu'il existe  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ , l'extension  $\kappa(x_{i+1})/\kappa(x_i)$  soit transcendante (autrement dit que le point  $x_{i+1}$  soit un point de type 2, 3 ou 4 ou de type 1 transcendant ou rigide maigre dans sa fibre au-dessus de  $x_i$ ) et que, pour tout  $i \in \llbracket m, n-1 \rrbracket$ , l'extension  $\kappa(x_{i+1})/\kappa(x_i)$  soit finie (autrement dit que le point  $x_{i+1}$  soit un point rigide épais dans sa fibre au-dessus de  $x_i$ ).

Supposons que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,x_0}$  soit un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète). On montre alors par récurrence, à l'aide des résultats de la section précédente, que, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{X_i, x_i}$  est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète).

Pour étudier les anneaux locaux en les points suivants  $x_{m+1}, \dots, x_n$ , on applique la méthode exposée à la section précédente et basée sur le théorème de division de Weierstraß. Pour ce faire, il importe de vérifier que les fonctions à considérer ne s'annulent pas dans les anneaux locaux au sein des différentes fibres.

Expliquons en quelques mots comment procéder pour démontrer la noethérianité. Considérons un idéal  $I$  de  $\mathcal{O}_{X_n, x}$ . Rappelons que  $\mathcal{O}_{X_m, x_m}$  est un corps fort ou un anneau fortement de valuation discrète. Commençons par traiter le cas où tout élément de  $I$  est nul dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{(X_m)_{x_m}, x}$ . Si  $\mathcal{O}_{X_m, x_m}$  est un corps fort, on montre que  $I$  est nul. Si  $\mathcal{O}_{X_m, x_m}$  est un anneau fortement de valuation discrète, on montre que  $I$  est soit nul, soit de la forme  $\pi^n J$ , où  $J$  est un idéal dont l'image dans  $\mathcal{O}_{(X_m)_{x_m}, x}$  n'est pas nulle.

Nous pouvons maintenant supposer qu'il existe un élément  $G$  de  $I$  dont l'image dans  $\mathcal{O}_{(X_m)_{x_m}, x_m}$  n'est pas nulle. Cependant, pour appliquer une récurrence, c'est son image dans  $\mathcal{O}_{(X_{n-1})_{x_{n-1}}, x}$  qui nous intéresse. Un changement de variable simple permettra d'assurer qu'elle satisfait les propriétés voulues.

**Lemme 1.6.11.** — *Soit  $G$  un élément de  $\mathcal{O}_{X_n, x}$  dont l'image dans  $\mathcal{O}_{(X_n)_{x_m}, x}$  n'est pas nulle.*

*Alors il existe un changement de variables de la forme*

$$\begin{cases} T_{m+1} & \mapsto T_{m+1} + T_n^{u_1}, \\ & \vdots \\ T_{n-1} & \mapsto T_{n-1} + T_n^{u_{n-1}}, \\ T_n & \mapsto T_n, \end{cases}$$

*avec  $u_{m+1}, \dots, u_{n-1} \in \mathbf{N}$  tel que, après ce changement de variables, si l'on note  $y \in X_{n-1}$  le projeté de  $x$  sur ses  $n-1$  premières coordonnées, l'image de  $G$  dans  $\mathcal{O}_{(X_n)_y, x}$  ne soit pas nulle.*

Nous pouvons alors appliquer le théorème de division de Weierstraß et mettre en œuvre la stratégie exposée à la fin de la section précédente.

Nous avons expliqué comment démontrer la noethérianité des anneaux locaux des espaces affines, et donc de tout espace. La régularité se démontre par des méthodes très semblables.

**Théorème 1.6.12.** — *Soit  $A$  un anneau de Banach de base au sens de la définition 1.6.10. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors, en tout point  $x$  de  $\mathbf{A}_A^{n, \text{an}}$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_A^{n, \text{an}}, x}$  est noethérien et (fortement) régulier.*

*Soit  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  un espace analytique sur  $A$ . Alors, en tout point  $z$  de  $Z$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{Z, z}$  est noethérien et universellement caténaire.*

Passons maintenant à l'excellence des anneaux locaux. Remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat pour les espaces affines puisque l'excellence passe au quotient. Seule



nous manque la régularité géométrique des fibres formelles de l'anneau local. Puisque notre intérêt réside principalement dans l'étude des espaces sur  $\mathbf{Z}$  ou les anneaux d'entiers de corps de nombres, nous nous autoriserons à supposer que les anneaux locaux de l'espace de base sont de caractéristique nulle.

Soit  $b$  un point de  $B$  tel que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,b}$  soit un corps fort de caractéristique nulle. Soit  $x$  un point de  $X_n$  au-dessus de  $b$ . Une récurrence et des arguments basés sur le théorème de préparation de Weierstraß que nous ne détaillerons pas permettent de se ramener à montrer que l'algèbre

$$\widehat{\mathcal{O}_{X_n,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_n,x}} \text{Frac}(\mathcal{O}_{X_n,x})$$

est géométriquement régulière sur  $\text{Frac}(\mathcal{O}_{X_n,x})$ . Puisque le corps  $\mathcal{O}_{B,b}$  est de caractéristique nulle, il suffit de montrer qu'elle est régulière. L'algèbre considérée étant un localisé de  $\widehat{\mathcal{O}_{X_n,x}}$ , le résultat découle alors du théorème précédent.

Soit  $b$  un point de  $B$  tel que l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,b}$  soit un anneau fortement de valuation discrète dont le corps des fractions est de caractéristique nulle. Choisissons-en une uniformisante  $\pi$ . Soit  $x$  un point de  $X_n$  au-dessus de  $b$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $\mathcal{O}_{X_n,x}$ . Nous voulons montrer que l'algèbre  $\widehat{\mathcal{O}_{X_n,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_n,x}} \kappa(\mathfrak{p})$  est géométriquement régulière sur  $\kappa(\mathfrak{p})$ . Si  $\mathfrak{p}$  ne contient pas  $\pi$ , le corps  $\kappa(\mathfrak{p})$  contient  $\mathcal{O}_{B,b}$  et est de caractéristique nulle. On conclut alors par des arguments similaires aux précédents. Si  $\mathfrak{p}$  ne contient pas  $\pi$ , en revanche, le corps  $\kappa(\mathfrak{p})$  peut être de caractéristique positive, mais on se ramène à démontrer l'excellence d'un anneau local dans un espace analytique au-dessus de  $\mathcal{H}(b)$ . On conclut alors par [Duc09, théorème 2.13].

**Théorème 1.6.13.** — *Soit  $A$  un anneau de Banach de base au sens de la définition 1.6.10. Supposons, en outre, qu'en tout point  $b$  de  $B$ , le corps des fractions de l'anneau local  $\mathcal{O}_{B,b}$  soit de caractéristique nulle. Soit  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  un espace analytique sur  $A$ . Alors, en tout point  $z$  de  $Z$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{Z,z}$  est excellent.*

Pour être complets, signalons que les anneaux locaux des espaces analytiques sont également henséliens. Cette propriété vaut en toute généralité et peut se démontrer directement en adaptant la démonstration classique du lemme de Hensel.

**Théorème 1.6.14.** — *Soit  $A$  un anneau de Banach. Soit  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  un espace analytique sur  $A$ . Alors, en tout point  $z$  de  $Z$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{Z,z}$  est hensélien.*

D'après [Pop86], les anneaux locaux henséliens et excellents satisfont l'approximation d'Artin. Nous pouvons en tirer des conséquences amusantes. Considérons, par exemple, l'anneau local  $\mathcal{O}_0$  au point 0 de la fibre de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$  au-dessus de la valeur absolue triviale. Il est constitué des séries de la forme

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{N} \right] \llbracket \mathbf{T} \rrbracket,$$

l'entier  $N$  dépendant de la série, qui possèdent un rayon de convergence strictement positif en toutes les places. Le résultat mentionné précédemment montre alors que tout système d'équations polynomiales à coefficients dans  $\mathcal{O}_0$  (par exemple un système à coefficients

dans  $\mathbf{Q}[T]$ ) qui possède une solution dans  $\widehat{\mathcal{O}_0} = \mathbf{Q}[[T]]$  en possède une dans  $\mathcal{O}_0$ , et même que l'on peut trouver une solution dans  $\mathcal{O}_0$  arbitrairement proche (pour la topologie  $T$ -adique) d'une solution formelle donnée. C'est une vaste généralisation d'un théorème d'Eisenstein concernant le cas d'une équation en une variable.

Pour terminer, signalons que, comme en géométrie analytique complexe, le théorème de division de Weierstraß peut également être utilisé pour démontrer la cohérence du faisceau structural. Au préalable, il faut cependant disposer d'un principe du prolongement analytique. Ajoutons quelques mots à ce sujet.

**Définition 1.6.15.** — Soit  $(S, \mathcal{O}_S)$  un espace localement annelé. Soit  $s$  un point de  $S$ . Nous dirons que le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de  $s$  si, pour tout élément non nul  $f$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $s$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $f$  est définie sur  $U$  ;
- ii) pour tout point  $t$  de  $U$ , l'image de  $f$  dans  $\mathcal{O}_{S,t}$  n'est pas nulle.

Nous dirons que le principe du prolongement analytique vaut sur  $S$  s'il vaut au voisinage de tous ses points.

On vérifie immédiatement que le principe du prolongement analytique vaut au voisinage d'un point en lequel l'anneau local est un corps. Tel est encore le cas si l'anneau local est un anneau de valuation discrète dont l'uniformisante ne s'annule pas au voisinage du point considéré. On montre également que, si le principe du prolongement analytique vaut au voisinage d'un point  $b$  de  $B$ , il vaut encore au voisinage du point  $x = 0$  de  $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$  au-dessus de  $b$ . Cela découle en effet de la description explicite de l'anneau local comme algèbre de séries convergentes. Le cas d'un point  $x$  rigide épais dans sa fibre au-dessus de  $b$  se ramène au précédent. Une récurrence comme celle mise en œuvre au début de la section permet de traiter le cas général.

**Théorème 1.6.16.** — Soit  $A$  un anneau de Banach de base au sens de la définition 1.6.10 et supposons que le principe du prolongement analytique vaut sur  $\mathcal{M}(A)$ . Alors, quel que soit  $n \in \mathbf{N}$ , le principe du prolongement analytique vaut sur  $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ .

Une fois le principe du prolongement analytique connu, il devient possible d'adapter les démonstrations classiques de cohérence du faisceau structural.

**Théorème 1.6.17.** — Soit  $A$  un anneau de Banach de base au sens de la définition 1.6.10 et supposons que le principe du prolongement analytique vaut sur  $\mathcal{M}(A)$ . Soit  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  un espace analytique sur  $A$ . Alors le faisceau structural  $\mathcal{O}_Z$  est cohérent.

## CHAPITRE 2

### ESPACES DE BERKOVICH LOCAUX : QUELQUES ASPECTS TOPOLOGIQUES

Le second chapitre de ce mémoire est consacré aux espaces de Berkovich classiques, c'est-à-dire sur un corps valué complet, et, plus précisément à certains de leurs aspects topologiques. Il ne faut pas croire, pour autant, que le faisceau structural ne jouera ici aucun rôle. De forts liens existent en effet entre fonctions et topologie, *via* la notion de bord de Shilov notamment, et nous les utiliserons constamment.

Le fil directeur de ce chapitre sera la notion de point universel, qui traduit de façon précise le fait qu'un point puisse se relèver canoniquement dans toute extension des scalaires. Nous commencerons par l'étudier et montrer, notamment, que tout point d'un espace défini sur un corps algébriquement clos est universel. Nous poursuivrons par une application en montrant que, même dans le cas où les espaces de Berkovich ne sont pas métrisables, leur topologie peut s'exprimer, en grande partie, en termes de suites. Dans un dernier temps, inspiré par l'article [HL10] de E. Hrushovski et F. Loeser, nous étudierons quelques aspects des espaces de Berkovich en termes de théorie des modèles. Nous nous intéresserons précisément à la façon dont on peut approcher les points d'un espace affine analytique si l'on ne s'autorise à utiliser que des polynômes de degré borné. Ces conditions débouchent sur la notion de type définissable, qui recouvre une notion d'universalité proche de la précédente.

Dans ce chapitre, nous effectuerons de nombreux changements de base. Fixons, dès à présent, les notations que nous utiliserons. Soient  $k$  un corps valué complet et  $X$  un espace  $k$ -analytique. Pour toute extension valuée complète  $K$  de  $k$ , posons  $X_K = X \hat{\otimes}_k K$ . Nous noterons  $\pi_K: X_K \rightarrow X$  le morphisme canonique.

#### 2.1. Points universels

Nous consacrons les premières pages de ce chapitre à la notion de point universel et à ses propriétés. Les résultats exposés ici sont tirés de [Poi13b].

**2.1.1. Définition.** — Commençons par définir la notion, introduite par V. Berkovich sous le nom de « peaked point » (*cf.* [Ber90, section 5.2]).

**Définition 2.1.1.** — Soit  $X$  un espace  $k$ -analytique. Un point  $x$  de  $X$  est dit *universel* si, pour toute extension valuée complète  $K$  de  $k$ , la norme tensorielle sur l'algèbre  $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K$  est multiplicative.

Notons  $X_u$  l'ensemble des points universels de  $X$ .

Ajoutons quelques explications. Pour ce faire, considérons un point  $x$  d'un espace  $k$ -analytique  $X$  et fixons temporairement une extension valuée complète  $K$  de  $k$ . La fibre  $\pi_K^{-1}(x)$  coïncide alors avec le spectre, au sens de V. Berkovich, de l'algèbre  $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K$  munie de sa norme tensorielle. Si cette norme est multiplicative, alors elle correspond à un point du spectre  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K)$ . C'est le plus grand point de la fibre  $\pi_K^{-1}(x)$ , au sens de la relation d'ordre sur les semi-normes associées aux points. Nous le noterons  $x_K$ .

L'application de relèvement précédente possède de bonnes propriétés, ainsi que l'affirme le résultat suivant, dû essentiellement à V. Berkovich.

**Proposition 2.1.2.** — Soient  $X$  un espace  $k$ -analytique et  $K$  une extension valuée complète de  $k$ . L'application  $\sigma_K: x \in X_u \mapsto x_K \in X_K$  est continue.

Pour démontrer ce résultat, il faut parvenir à montrer que la norme tensorielle sur les fibres de  $\pi_K$  varie continûment sur  $X$ . Le même genre de techniques permet également de montrer le résultat suivant.

**Proposition 2.1.3.** — Soient  $X$  un espace  $k$ -analytique. L'ensemble des points universels de  $X$  est fermé.

Nous souhaiterions maintenant disposer de critères permettant d'assurer qu'un point est universel. Pour ce faire, la réduction des espaces affinoïdes se révèle un outil fort utile.

**2.1.2. Réduction d'un espace affinoïde.** — Nous présentons ici la réduction des espaces affinoïdes telle qu'elle a été définie par V. Berkovich dans [Ber90, section 2.4]. Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde et posons  $X = \mathcal{M}(A)$ .

Notons  $\|\cdot\|_\infty$  la semi-norme uniforme sur  $X$ . On vérifie que l'ensemble  $A^\circ = \{f \in A \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$  est un sous-anneau de  $A$  et que  $A^{\circ\circ} = \{f \in A \mid \|f\|_\infty < 1\}$  en est un idéal. Posons  $\tilde{A} = A^\circ / A^{\circ\circ}$ . C'est une algèbre de type fini sur  $\tilde{k}$ . Nous noterons  $\tilde{X}$  son spectre (au sens des schémas).

Soit  $x$  un point de  $X$ . On lui associe naturellement un morphisme borné  $\chi_x: A \rightarrow \mathcal{H}(x)$ . Il induit un morphisme  $\tilde{\chi}_x: \tilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ . On vérifie aisément que  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  est un corps. Le noyau du morphisme  $\tilde{\chi}_x$  est donc un idéal premier de  $\tilde{A}$ , auquel est associé un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$ . Nous avons ainsi défini une application, dite de réduction

$$\text{red}: X = \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{A}) = \tilde{X}.$$

Dans le cas où l'algèbre  $A$  est strictement  $k$ -affinoïde, ce qui correspond à dire que la semi-norme  $\|\cdot\|_\infty$  prend ses valeurs dans le sous-ensemble  $\sqrt{|k|}$  de  $\mathbf{R}_+$ , cette application possède de bonnes propriétés.

**Proposition 2.1.4.** — Supposons que l'algèbre  $A$  soit strictement  $k$ -affinoïde. Notons  $\tilde{X}_{\text{gén}}$  l'ensemble des points génériques de  $\tilde{X}$ . Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.

- i) L'application  $\text{red}$  est surjective.
- ii) Tout point générique de  $\tilde{X}$  a un unique antécédent dans  $X$  par  $\text{red}$ .
- iii) L'ensemble  $\text{red}^{-1}(\tilde{X}_{\text{gén}})$  est le bord de Shilov de  $X$ .

Rappelons qu'on appelle bord de Shilov de  $X$  le plus petit bord analytique de  $X$ , au sens de la définition 1.4.5 avec  $V = X$  et  $\mathcal{B}(V) = A$ , s'il existe. Le résultat précédent assure qu'il existe lorsque  $A$  est strictement  $k$ -affinoïde, et le cas général en découle.

Lorsque l'algèbre  $A$  n'est pas strictement  $k$ -affinoïde, en revanche, l'application de réduction précédente peut ne présenter qu'assez peu d'intérêt. Il peut arriver, par exemple, que  $\tilde{A} = \tilde{k}$ , auquel cas  $\tilde{X}$  est réduit à un point, sans que  $X$  ne soit trivial. Pour remédier à ce problème, M. Temkin a introduit, dans [Tem04], une notion de réduction graduée. Présentons-la en quelques mots.

Pour tout  $r \in \mathbf{R}_+^*$ , définissons le groupe  $A_r^\circ = \{f \in A \mid \|f\|_\infty \leq r\}$ , son sous-groupe  $A^{\circ\circ} = \{f \in A \mid \|f\|_\infty < r\}$  et leur quotient  $\tilde{A}_r = A_r^\circ / A_r^{\circ\circ}$ . Formons, à présent, l'anneau  $\tilde{A}_{\text{gr}} = \bigoplus_{r>0} \tilde{A}_r$ . C'est un anneau gradué, au sens où ses constituants  $\tilde{A}_r$  sont des sous-groupes additifs qui vérifient  $\tilde{A}_r \tilde{A}_s \subset \tilde{A}_{rs}$ . Il rendra les mêmes services que l'anneau  $\tilde{A}$  dans le cas strictement affinoïde, pourvu que l'on prenne la peine de remplacer les notions d'algèbre commutative par leur analogue gradué. Par exemple, un idéal gradué  $I$  de  $\tilde{A}_{\text{gr}}$  est un idéal engendré par des éléments homogènes et il est premier si le produit de deux éléments homogènes de  $\tilde{A}_{\text{gr}}$  ne peut appartenir à  $I$  que lorsque l'un des deux lui appartient. On définit ainsi une notion de spectre homogène et une application de réduction, comme précédemment. M. Temkin montre que les propriétés de la proposition 2.1.4 sont encore vérifiées dans ce cadre.

Dans la suite, nous aurons besoin à plusieurs reprises de manipuler ces réductions graduées. La tâche est rendue difficile par le peu de références disponibles concernant l'algèbre commutative graduée et nous devons donc démontrer la plupart des résultats que nous souhaitons utiliser. En général, les différences avec l'algèbre commutative classique sont mineures et les preuves des énoncés d'adaptent sans peine. Tel n'est pas toujours le cas cependant et nous allons en donner maintenant un exemple.

Considérons un corps gradué  $\ell = \bigoplus_{r>0} \ell_r$ , c'est-à-dire un anneau gradué non nul dans lequel tout élément homogène est inversible. Notons  $\rho(\ell)$  l'ensemble des éléments  $r > 0$  tels que  $\ell_r \neq 0$ . C'est un sous-groupe de  $\mathbf{R}_+^*$ . Soit  $s \in \mathbf{R}_+^* \setminus \rho(\ell)$ . Définissons l'anneau gradué  $\ell[s^{-1}T]$  en ajoutant un élément  $T$  en degré  $s$ . Ses éléments homogènes sont exactement ceux de la forme  $aT^n$ , où  $a$  est un élément homogène de  $\ell$  et  $n$  un entier. C'est un anneau gradué intègre et son corps des fractions gradué  $\ell(s^{-1}T)$ , obtenu en inversant les éléments homogènes non nuls, n'est autre que

$$\ell(s^{-1}T) = \ell[s^{-1}T, sT^{-1}].$$

C'est en particulier une  $\ell$ -algèbre graduée de type fini mais, bien entendu, pas une  $\ell$ -algèbre graduée finie. L'existence d'un tel objet contredirait le Nullstellensatz dans le cas classique ! On peut répéter la construction précédente en choisissant un élément  $s'$  de  $\mathbf{R}_+^*$  hors du sous-groupe engendré par  $\rho(k)$  et  $s$  et en considérant  $\ell(s^{-1}T, s'^{-1}T')$ . Plus généralement, en choisissant une famille finie  $\mathbf{s}$  de nombres réels strictement positifs dont l'image dans le

$\mathbf{Z}$ -module  $\mathbf{R}_+^*/\rho(\ell)$  est libre, on peut construire un corps gradué  $\ell(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{T})$  satisfaisant les mêmes propriétés que les précédents.

Les corps gradués du type précédent sont essentiellement les seules obstructions au Nullstellensatz, comme nous l'avons montré dans [Poi13b].

**Théorème 2.1.5 (Nullstellensatz gradué).** — *Soit  $\ell$  un corps gradué. Soit  $L$  une  $\ell$ -algèbre graduée de type fini qui est un corps gradué. Alors, c'est une extension finie d'un corps gradué  $\ell(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{T})$  construit comme précédemment.*

De ce théorème, nous pouvons déduire le fait qu'une algèbre graduée intègre  $A$  sur un corps gradué algébriquement clos  $\ell$  est géométriquement intègre, au sens où l'algèbre graduée  $A \otimes_{\ell} L$  est intègre pour toute extension graduée  $L$  de  $\ell$ . Ce résultat sera utilisé dans la prochaine section.

**2.1.3. Critères d'universalité.** — Dans [Ber90, section 2.4] figure le critère suivant. Rappelons que, d'après la proposition 2.1.4, le bord de Shilov d'un espace affinoïde dont la réduction est une variété irréductible est réduit à un point.

**Proposition 2.1.6.** — *Soit  $X$  un espace strictement  $k$ -affinoïde distingué dont la réduction  $\tilde{X}$  est géométriquement intègre. Alors, l'unique point du bord de Shilov de  $X$  est universel.*

Le caractère distingué de l'espace affinoïde  $X$  dont il est question ici est une condition technique que nous ne souhaitons pas énoncer précisément. Indiquons seulement qu'elle est toujours satisfaite lorsque  $X$  est strictement  $k$ -affinoïde et que le corps  $k$  est algébriquement clos et de valuation non triviale.

La stratégie de la preuve de la proposition est assez claire et nous allons en esquisser les grandes lignes, en faisant abstraction des difficultés techniques, qui sont résolues dans l'article [Bos69] de S. Bosch. Notons  $x$  l'unique point du bord de Shilov de  $X = \mathcal{M}(A)$ . Nous allons montrer qu'il se relève canoniquement dans toute extension des scalaires (dans un sens vague, mais qui, en réalité, est bien celui de la définition de point universel). L'image du point  $x$  par la réduction est l'unique point générique  $\xi$  de  $\tilde{X}$ . Soit  $K$  une extension valuée complète de  $k$ . Un résultat de l'article de S. Bosch sus-cité assure que l'on a  $\widehat{A \hat{\otimes}_k K} = \tilde{A} \hat{\otimes}_{\tilde{k}} \tilde{K}$ . Puisque  $\tilde{A}$  est géométriquement intègre, cette algèbre est donc intègre. La variété  $\tilde{X}_K$  possède donc un unique point générique  $\xi'$ , nécessairement au-dessus de  $\xi$ , qui possède lui-même un unique antécédent  $x'$ , nécessairement au-dessus de  $x$ , dans  $X_K$  par l'application de réduction. Ce point  $x'$  est le point  $x_K$  recherché.

Supposons maintenant que le corps  $k$  est algébriquement clos. Dans ce cas, le corps  $\tilde{k}$  l'est aussi et il suffit de supposer que la réduction  $\tilde{X}$  de  $X$  est intègre pour appliquer le résultat. Finalement, pour traiter le cas d'un espace affinoïde général, c'est-à-dire pas nécessairement strictement affinoïde, il suffit de remplacer les réductions habituelles par des réductions graduées (même si le caractère distingué cause quelques difficultés supplémentaires sur lesquelles nous ne nous attarderons pas). Un résultat de densité des points qui sont bords

de Shilov de domaines affinoïdes et le fait que l'ensemble des points universels soit fermé entraînent finalement le résultat suivant.

**Théorème 2.1.7.** — *Supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos. Alors, tout point d'un espace  $k$ -analytique est universel.*

**2.1.4. Structure des fibres d'une extension des scalaires sur une courbe.** — Les méthodes que nous venons de présenter permettent, dans certains cas, de décrire les fibres d'un morphisme d'extension des scalaires. Nous nous attacherons au cas des courbes, qui a été rédigé dans [PP12, section 2.2].

Plaçons-nous dans la situation considérée à la fin de la section précédente : supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos et considérons un point  $x$  qui est l'unique point du bord de Shilov d'un espace affinoïde  $X$ . Notons  $\xi$  son image par la réduction, c'est-à-dire l'unique point générique de la réduction  $\tilde{X}$ .

Soit  $K$  une extension valuée complète de  $k$ . Nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \hat{\otimes}_k K & \xrightarrow{\text{red}} & \widetilde{X \hat{\otimes}_k K} \\ \downarrow \pi_K & & \downarrow \tilde{\pi}_K \\ X & \xrightarrow{\text{red}} & \tilde{X} \end{array}$$

et la fibre  $\pi_K^{-1}(x)$  est l'image inverse par la réduction de la fibre  $\tilde{\pi}_K^{-1}(\xi)$ . Dans la situation considérée précédemment, nous disposons d'un isomorphisme  $X \hat{\otimes}_k K = \tilde{X} \hat{\otimes}_{\tilde{k}} \tilde{K}$  et le problème se ramène donc à comprendre la structure des fibres d'une extension des scalaires dans le cas des schémas. La fibre  $\tilde{\pi}_K^{-1}(\xi)$  contient le point générique  $\xi'$  de  $\tilde{X} \hat{\otimes}_{\tilde{k}} \tilde{K}$  et nous savons qu'il possède un seul antécédent par la réduction, qui n'est autre que le relevé universel  $x_K$  de  $x$ . Il reste à comprendre ce que peuvent être les images réciproques des autres points de la fibre par l'application de réduction.

Le problème précédent admet une solution simple dans le cas des courbes. La fibre  $\tilde{\pi}_K^{-1}(\xi)$  contient le point générique  $\xi'$  et tous ses autres points sont fermés, puisque cette fibre est aussi une courbe. En outre, puisque le corps  $\tilde{k}$  est algébriquement clos et que  $\tilde{X}$  est réduite, son point générique  $\xi$  est lisse et les points fermés précédents aussi. D'après [Bos77, Satz 6.3], lorsque  $K$  est algébriquement clos et de valuation non triviale, les images réciproques de ces points fermés sont des disques ouverts. L'application de réduction étant anti-continue, ce sont également des ouverts de  $X_K$ .

Remarquons que, même dans le cas des courbes, le raisonnement précédent ne permet de comprendre la structure des fibres qu'au-dessus des points qui peuvent s'obtenir comme bords de Shilov de domaines affinoïdes. Dans le cas des courbes, c'est une situation assez générale, puisqu'elle est satisfaite par tous les points de type 2 et 3. Des considérations techniques nous ont en fait poussé à ne les rédiger dans [PP12, section 2.2] que pour les points de type 2. Cependant, la structure des courbes entraîne que tout point de type 1 ou 4 (resp. 3) possède un voisinage isomorphe à un disque (resp. une couronne). Le résultat cherché peut alors se démontrer par des raisonnements topologiques directs.

**Théorème 2.1.8.** — *Supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos. Soient  $X$  une courbe  $k$ -analytique et  $x$  un point de  $X$ . Soit  $K$  une extension valuée complète et algébriquement close de  $k$ . La fibre  $\pi_K^{-1}(x)$  est connexe et les composantes connexes de  $\pi_K^{-1}(x) \setminus \{x_K\}$  sont des disques ouverts de bord  $x_K$ . De plus, elles sont ouvertes dans  $X_K$ .*

## 2.2. Topologie et suites

Nous allons, à présent, utiliser les résultats précédents sur les points universels afin de démontrer des résultats sur la topologie des espaces de Berkovich.

Soit  $k$  un corps valué complet. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Si le corps  $k$  possède une partie dénombrable dense  $E$ , alors l'espace  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  est métrisable. En effet, il est localement compact et sa topologie est dénombrable, puisqu'engendrée par les ensembles de la forme  $\{r < |P| < s\}$ , où  $r$  et  $s$  sont des nombres rationnels et  $P$  un polynôme à coefficients dans  $E$ . Le résultat découle donc du théorème d'Urysohn. D'autre part, on se convainc facilement que, si l'hypothèse sur le corps n'est plus vérifiée, alors l'espace  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  n'est plus métrisable. Nous allons cependant montrer que, dans tous les cas, la topologie de ces espaces est régie par les suites.

Commençons par un exemple et considérons le disque unité fermé  $D_k$  à l'intérieur de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Nous savons qu'il est compact pour la topologie d'espace de Berkovich et souhaitons montrer qu'il est séquentiellement compact, c'est-à-dire que toute suite possède une sous-suite convergente. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de  $D_k$ . Considérons un sous-corps valué complet  $\ell$  de  $k$  qui possède une partie dénombrable dense. Notons  $\pi: D_k \rightarrow D_\ell$  le morphisme naturel. Puisque  $D_\ell$  est compact et métrisable, l'image  $(\pi(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  qui convergent vers un certain point  $v$ . Mais comment repasser au disque  $D_k$ ? L'idée est d'utiliser les relèvements universels étudiés précédemment. Supposons  $k$  et  $\ell$  algébriquement clos. Nous voudrions que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , le point  $u_n$  soit le relevé universel du point  $\pi(u_n)$ . Par continuité de la section universelle, la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  posséderait alors une limite, à savoir le relevé universel de  $v$  à  $D_k$ .

En d'autres termes, le problème précédent consiste à définir les points des espaces de Berkovich sur des corps assez petits. Les points les plus simples à traiter sont ceux qui peuvent s'écrire comme bords de Shilov de domaines affinoïdes. Il sera plus facile d'utiliser une autre définition de ces points. Rappelons que pour tout point  $x$  d'un espace  $k$ -analytique, on pose

$$s(x) = \deg. \text{tr.}(\widetilde{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}) \text{ et } t(x) = \dim_{\mathbf{Q}}(\sqrt{|\mathcal{H}(x)^*|}/\sqrt{|k^*|}).$$

**Définition 2.2.1.** — *On dit qu'un point  $x$  de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  est un point d'Abhyankar si  $s(x) + t(x) = n$ .*

Lorsque  $n = 1$ , les points d'Abhyankar sont exactement les points de type 2 ou 3. En dimension  $n \geq 1$ , un point  $x$  de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  est d'Abhyankar si sa projection  $y$  sur  $\mathbf{A}_k^{n-1,\text{an}}$  (pour n'importe quel système de coordonnées) est un point d'Abhyankar et s'il est un point d'Abhyankar dans sa fibre au-dessus de  $y$  (qui est une droite).



Pour tout point  $x$  de type 2 ou 3 de la droite, il existe un domaine affinoïde de la forme  $\{|P| \leq r\}$ , où  $P$  est un polynôme à coefficients dans  $k$  et  $r$  un nombre réel strictement positif, dont  $x$  est l'unique point du bord de Shilov. Ce résultat est immédiat lorsque le corps  $k$  est algébriquement clos (et l'on peut alors choisir  $P$  de degré 1) et guère plus difficile sinon. Un raisonnement par récurrence sur la dimension permet de généraliser ce résultat.

**Proposition 2.2.2.** — *Soit  $x$  un point d'Abhyankar de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Il existe  $P_1, \dots, P_n \in k[T_1, \dots, T_n]$  et  $r_1, \dots, r_n > 0$  tels que  $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{|P_i| \leq r_i\}$  soit un domaine affinoïde de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  dont le bord de Shilov est le singleton  $\{x\}$ .*

Dans la situation de la proposition, le complété  $\ell$  du sous-corps de  $k$  engendré par les coefficients des polynômes  $P_i$  est alors un corps sur lequel on peut définir le point  $x$ . En effet, si l'on note,  $\pi: \mathbf{A}_k^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_\ell^{n,\text{an}}$  le morphisme naturel, alors le point  $\pi(x)$  appartient à  $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{|P_i| \leq r_i\}$ , vu dans  $\mathbf{A}_\ell^{n,\text{an}}$ . La fibre  $\pi^{-1}(\pi(x))$  est alors contenue dans  $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{|P_i| \leq r_i\}$ , vu cette fois-ci dans  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ , et son plus grand point ne peut qu'être le point  $x$ , puisque c'est le plus grand point de  $V$  tout entier (et qu'il appartient bien à ladite fibre).

Lorsque le point  $x$  n'est plus un point d'Abhyankar, la situation est plus compliquée. Lorsque  $n = 1$ , sur la droite, on peut approcher tout point  $x$  qui n'est pas d'Abhyankar, c'est-à-dire un point de type 1 ou 4, par une suite décroissante  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de points de type 2 ou 3. On peut alors associer un polynôme à chaque  $x_n$  comme précédemment et définir le point  $x$  sur le complété du sous-corps de  $k$  engendré par les coefficients de tous ces polynômes. Remarquons que, puisque nous avons approché par une suite (indexée par  $\mathbf{N}$ ), et non pas seulement une suite généralisée (indexée par un ensemble ordonné filtrant quelconque), le corps obtenu possède bien une partie dénombrable dense. Ce raisonnement se généralise, bien que de façon plus compliquée, en dimension supérieure.

**Proposition 2.2.3.** — *Supposons que  $k$  soit algébriquement clos. Soit  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Il existe un sous-corps algébriquement clos  $\ell_x$  de  $k$  possédant une partie dénombrable dense tel que, si  $\pi_x: \mathbf{A}_k^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\ell_x}^{n,\text{an}}$  désigne le morphisme de changement de base, alors  $x$  est le relevé universel du point  $\pi_x(x)$ .*

Une fois ce résultat connu, nous pouvons appliquer la stratégie décrite au début de la section pour démontrer que le disque  $D_k$  est séquentiellement compact. Remarquons que le résultat sur un corps l'entraîne sur tous ses sous-corps. Nous pouvons donc supposer que  $k$  est algébriquement clos. On choisit alors pour corps  $\ell$  le complété de la fermeture algébrique dans  $k$  de la réunion de tous les sous-corps  $\ell_{u_n}$  associés aux points de la suite  $u_n$ . Ce corps possède encore une partie dénombrable dense et la stratégie indiquée fonctionne.

Remarquons que le résultat vaut non seulement pour le disque unité, mais pour les disques de tous rayons. Il vaut également pour leurs fermés de Zariski, c'est-à-dire pour les espaces affinoïdes, et donc finalement pour tous les espaces compacts.

En raffinant les méthodes utilisées, nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Théorème 2.2.4.** — *Tout espace de Berkovich  $X$  est un espace de Fréchet-Urysohn : pour toute partie  $A$  de  $X$ , tout point de l'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$  est limite d'une suite de points de  $A$ .*

De ce résultat découle le fait que les espaces de Berkovich sont séquentiels : leurs parties ouvertes et fermées sont caractérisées par les conditions habituelles en termes de suites. À titre de curiosité, mentionnons que l'on peut également en déduire que tout espace de Berkovich est quotient d'un espace métrique (cf. [Fra65]).

### 2.3. Approximation polynomiale des espaces de Berkovich

Dans cette section, nous nous intéressons à des questions topologiques sur les espaces de Berkovich liées à la théorie des modèles. Elles nous ont été inspirées par la lecture du manuscrit [HL10] de E. Hrushovski et F. Loeser.

La théorie des modèles consiste en l'étude de formules du premier ordre d'un langage, qui sera ici celui des corps valués. Considérons une formule  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , où l'on pense à  $\mathbf{u}$  comme un uplet de variables et à  $\mathbf{v}$  comme un uplet de paramètres, appelé à prendre des valeurs dans un corps valué. On peut, par exemple, considérer la formule  $|u - v_1| \leq |v_2|$ , qui traduit l'appartenance d'un point au disque de centre  $v_1$  et de rayon  $|v_2|$ , ou  $v_1 u^2 + v_2 u + v_3 = 0$ , qui exprime le fait qu'un point soit racine d'un polynôme de degré inférieur à 2. Remarquons qu'une formule quelle qu'elle soit ne peut faire intervenir que des polynômes de degré borné en les variables. Pour savoir à quelles conditions sur  $\mathbf{v}$  une formule  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est satisfaite en un point d'un espace de Berkovich (on dirait plutôt qu'elle appartient au type du point considéré), il suffit donc de savoir comment se comporte ce point vis-à-vis de polynômes de degré borné. Il s'agit d'une information plus faible que la connaissance du point, qui nécessite de comprendre son comportement sur tous les polynômes.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la façon dont on peut décrire un point si l'on ne s'intéresse qu'à des polynômes de degré borné. Nous considérerons d'abord cette question dans le cas de la droite, puis d'un espace affine de dimension quelconque. Nous en tirerons ensuite des conséquences en termes de propriétés de parties semi-algébriques, qui sont une traduction géométrique de la notion de type définissable de la théorie des modèles.

**2.3.1. Dimension 1.** — Commençons par quelques notations. Fixons une coordonnée  $T$  sur la droite affine  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ . Soit  $P \in k[T]$  un polynôme irréductible. Nous noterons  $\eta_{P,0}$  l'unique point de la droite  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  tel que  $P(\eta_{P,0}) = 0$ . Pour tout nombre réel  $r > 0$ , nous noterons  $\eta_{P,r}$  l'unique point du bord de Shilov du domaine affinoïde  $\{|P| \leq r\}$  de  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ .

Posons  $D_0 = \{\eta_{T,1}\}$ . Pour tout entier  $d \geq 1$ , notons  $k[T]_{\leq d}$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur à  $d$  et posons

$$D_d = \{\eta_{P,r}, P \in k[T]_{\leq d}, P(T) \text{ irréductible}, r \geq 0\}.$$

Le lecteur aura sans doute compris que nous souhaitons montrer que, si l'on ne considère que des polynômes de degré inférieur à  $d$ , tout point de  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  peut être remplacé par un point de  $D_d$ .

Si nous n'imposons aucune condition sur le corps  $k$ , des problèmes apparaissent rapidement. Sur  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_p}^{1,\text{an}}$ , par exemple, l'ensemble  $D_1$  (qui est égal à  $D_d$ , pour tout  $d \geq 1$ ) contient exactement les points de type 1, 2 et 3. Dans ces conditions, sur quel point envoyer un point de type 4 ? Pour contourner ce problème, nous supposons que le corps  $k$  est maximalelement complet.

**Théorème 2.3.1.** — *Supposons que le corps  $k$  est maximalelement complet. Soit  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ . Pour tout entier positif  $d$ , il existe un unique point  $x_d$  de  $D_d$  vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall P \in k[T]_{\leq d}, \quad |P(x_d)| = |P(x)|.$$

En outre, si  $d \geq 1$ , nous avons  $x_d \geq x$  et

$$x_d = \inf(\{y \in D_d \mid y \geq x\}).$$

*Démonstration.* — L'unicité se démontre aisément : il suffit de montrer que deux points distincts de  $D_d$  diffèrent par leur valeur sur un élément de  $k[T]_{\leq d}$ .

Prouvons, à présent, la propriété finale. Soit  $d \geq 1$  et supposons avoir trouvé  $x_d = \eta_{Q,r}$ . Nous avons  $|Q(x)| = |Q(x_d)| = r$ , donc le point  $x$  appartient au domaine affinoïde  $\{|Q| \leq r\}$  et  $x \leq \eta_{Q,r} = x_d$ .

Soit maintenant  $y = \eta_{R,s} \in D_d$  tel que  $y \geq x$ . Nous avons  $s = |R(y)| \geq |R(x)| = |R(x_d)|$ , donc le point  $x_d$  appartient à  $\{|R(T)| \leq s\}$  et nous avons  $x_d \leq y$ .

Démontrons, à présent, l'existence du point  $x_d$  par récurrence sur  $d$ . Si  $d = 0$ ,  $x_0 = \eta_{T,1}$  convient.

Soit  $d \geq 0$  et supposons avoir trouvé le point  $x_d$ . Si, pour tout  $P \in k[T]_{\leq d+1}$ , nous avons  $|P(x_d)| = |P(x)|$ , alors le point  $x_{d+1} = x_d$  convient.

Supposons qu'il existe  $A \in k[T]_{\leq d+1}$  tel que  $|A(x)| < |A(x_d)|$ . Nous pouvons supposer que le polynôme  $A$  est unitaire de degré  $d+1$ .

Notons  $k_d$  l'image de  $k[T]_{\leq d}$  dans  $\mathcal{H}(x)$  par le morphisme d'évaluation en  $x$ . C'est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. D'après [BGR84, lemma 2.4.4/4], il est sphériquement complet.

Pour tout polynôme  $P$  in  $k[T]_{\leq d}$ , considérons la boule de  $k_d$  définie par

$$E_P = \overline{D}(P(x), |(T^{d+1} - P(T))(x)|).$$

On vérifie que la famille des  $E_P$  est totalement ordonnée. Puisque  $k_d$  est sphériquement complet, son intersection n'est pas vide. Considérons un polynôme  $P_0 \in k[T]_{\leq d}$  dont l'image dans  $k_d$  appartient à cette intersection. Posons  $R_0(T) = T^{d+1} - P_0(T)$  et

$$r = |R_0(x)| = \inf_{P \in k[T]_{\leq d}} (|(T^{d+1} - P(T))(x)|).$$

Pour tout polynôme  $R$  unitaire de degré  $d+1$ , le polynôme  $R - R_0$  est de degré inférieur à  $d$  et un calcul simple montre que

$$|R(x)| = \max(r, |(R - R_0)(x)|) = \max(r, |(R - R_0)(x_d)|).$$

En utilisant les relations  $|(A - R_0)(x)| = |(A - R_0)(x_d)|$ ,  $|A(x)| < |A(x_d)|$  et  $|R_0(x)| \leq |A(x)|$ , on montre que  $|R_0(x)| < |R_0(x_d)|$ . On en déduit que  $R_0$  est irréductible. Nous allons montrer que le point  $x_{d+1} = \eta_{R_0, r}$  convient.

Puisque  $x$  appartient à  $\{|R_0| \leq r\}$ , nous avons  $x \leq x_{d+1}$ .

Nous avons également  $x \leq x_d$  et on en déduit que les points  $x_d$  et  $x_{d+1}$  sont comparables. Nous avons  $|R_0(x_d)| > r = |R_0(x_{d+1})|$  et donc  $x_d \geq x_{d+1} \geq x$ . En utilisant la dernière propriété de l'énoncé, on en déduit que  $(x_{d+1})_d = x_d$ . Pour tout polynôme  $R$  unitaire de degré  $d + 1$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} |R(x_{d+1})| &\leq \max(r, |(R - R_0)(x_{d+1})|) \\ &\leq \max(r, |(R - R_0)(x_d)|) \\ &\leq |R(x)|, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 2.3.2.** — Les arguments de la preuve précédente sont proches de ceux utilisés par V. Berkovich pour classifier les points de la droite  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ . Nous pouvons d'ailleurs interpréter le théorème comme une généralisation de ce résultat, où les disques auraient été remplacés par des analogues en degré supérieur.

**Remarque 2.3.3.** — Il est possible d'interpréter géométriquement la dernière condition du théorème. Remarquons que, pour tout  $d$ , la partie  $D_d$  est un sous-arbre de  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ . Lorsque le corps  $k$  est maximalelement complet, il est fermé et l'application  $x \in \mathbf{A}_k^{1, \text{an}} \mapsto x_d \in D_d$  n'est autre que la rétraction sur celui-ci.

Dans le cas de  $\mathbf{C}_p$  mentionné plus haut, le sous-arbre  $D_1$  n'est pas fermé, ce qui empêche de définir la rétraction.

**2.3.2. Dimension arbitraire.** — Les résultats de la section précédente se généralisent en dimension quelconque, avec quelques précautions cependant. La fin de la preuve du théorème 2.3.1 utilise en effet de façon essentielle la structure de la droite *via* le fait que l'ensemble des majorants d'un point est totalement ordonné. En dimension supérieure, nous ne trouverons, en général, pas un point de l'espace, mais une partie de cet espace. En dimension 1, cela reviendrait à associer la partie  $\{|P| \leq r\}$  au lieu du point  $\eta_{P, r}$ .

Fixons un entier  $n \in \mathbf{N}$  et un  $n$ -uplet  $\mathbf{T}$  de coordonnées sur l'espace affine  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ . Soit  $P \in k[T]$  un polynôme irréductible. Nous noterons  $\eta_{P, 0}$  l'unique point de la droite  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$  tel que  $P(\eta_{P, 0}) = 0$ . Pour tout nombre réel  $r > 0$ , nous noterons  $\eta_{P, r}$  l'unique point du bord de Shilov du domaine affinoïde  $\{|P| \leq r\}$  de  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ . Munissons  $\mathbf{N}^n$  de la relation d'ordre suivante :  $(d_1, \dots, d_n) < (d'_1, \dots, d'_n)$  si

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i &< \sum_{i=1}^n d'_i \\ \text{ou } \sum_{i=1}^n d_i &= \sum_{i=1}^n d'_i \text{ et } \exists j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall i \leq j, d_i = d'_i \text{ and } d_{j+1} < d'_{j+1}. \end{aligned}$$

Pour  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n$ , notons  $k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  le  $k$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à  $\mathbf{d}$ . Pour toute partie  $R$  de  $\mathbf{R}_+$ , notons  $\mathcal{S}_{\mathbf{d},R}$  (ou simplement  $\mathcal{S}_{\mathbf{d}}$  si  $R = \mathbf{R}_+$ ) l'ensemble des parties de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  de la forme

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} \{|P_i| \leq r_i\},$$

avec  $P_i \in k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  et  $r_i \in R$ . Remarquons que ces parties sont  $k$ -affinoïdes dès qu'elles sont compactes.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème en dimension supérieure. La démonstration étant très proche de celle que nous avons proposée dans le cas de la dimension 1, nous ne la rédigerons pas.

**Théorème 2.3.4.** — *Supposons que le corps  $k$  est maximalement complet. Soient  $n \in \mathbf{N}$  et  $x \in \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Soit  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n$ . Alors il existe un unique ensemble  $S_{x,\mathbf{d}}$  appartenant à  $\mathcal{S}_{\mathbf{d}}$  tel que tout polynôme  $P$  de  $k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  soit borné sur  $S_{x,\mathbf{d}}$  et vérifie*

$$\|P\|_{S_{x,\mathbf{d}}} = |P(x)|.$$

En outre, nous avons

$$S_{x,\mathbf{d}} = \bigcap_{P \in k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}} \{|P| \leq |P(x)|\} \in \mathcal{S}_{\mathbf{d},R},$$

où  $R$  désigne l'image de  $k[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}$  dans  $\mathbf{R}_+$  par l'application  $P \mapsto |P(x)|$ .

**Remarque 2.3.5.** — Le résultat vaut plus généralement en remplaçant le point  $x$  par une partie compacte non vide  $K$  de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ .

**Remarque 2.3.6.** — Les parties  $S_{x,\mathbf{d}}$  sont compactes, et donc  $k$ -affinoïdes, dès que  $\mathbf{d} \geq (1, 0, \dots, 0)$ . On pourrait dès lors être tentés de remplacer  $S_{x,\mathbf{d}}$  par son bord de Shilov, en espérant que celui-ci soit réduit à un point. Un exemple, dû à N. Elkies (cf. [Elk12]), montre que tel n'est pas le cas.

Considérons le point  $\eta_{T,1}$  de  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  (avec coordonnée  $T_1$ ) et le point  $x$  de  $\mathbf{A}_k^{3,\text{an}}$  (avec coordonnées  $T_1, T_2, T_3$ ), au-dessus de ce dernier, défini par les équations  $T_2 = T_1^4$  et  $T_3 = T_1^6$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} S_{x,(3,0,0)} &= \{|T_1| \leq 1\} \cap \{|T_2| \leq 1\} \cap \{|T_3| \leq 1\} \\ &\quad \cap \{T_1^2 T_2 - T_3 = T_1^2 T_3 - T_2^2 = T_2^3 - T_3^2 = 0\}. \end{aligned}$$

C'est un fermé de Zariski de la boule unité fermée de  $\mathbf{A}_k^{3,\text{an}}$  qui a deux composantes irréductibles (l'une définie par  $T_2 - T_1^4 = T_3 - T_1^6 = 0$ , l'autre par  $T_2 = T_3 = 0$ ) et deux points dans son bord de Shilov.

**2.3.3. Parties semi-algébriques et types définissables.** — Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, notre intérêt pour ces questions est venu de la théorie des modèles et, plus précisément, de la notion de type définissable. Avant de dire quelques mots à ce sujet, démontrons un résultat sur les parties semi-algébriques de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ .

Commencer par rappeler la définition de partie semi-algébrique (cf. [Duc03, définition 1.2]).

**Définition 2.3.7.** — Soit  $\Gamma^*$  un sous-groupe de  $\mathbf{R}_+^*$ . Posons  $\Gamma = \Gamma^* \cup \{0\}$ . Une partie  $V$  de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  est dite  $\Gamma^*$ -semi-algébrique, ou  $\Gamma$ -semi-algébrique si elle peut s'écrire comme combinaison booléenne finie de parties de la forme  $\{|P| \leq \lambda|Q|\}$  avec  $P, Q \in k[T]$  et  $\lambda \in \Gamma$ .

Si  $\Gamma = \mathbf{R}_+$ , la partie  $V$  sera dite semi-algébrique.

**Théorème 2.3.8.** — Supposons que le corps  $k$  est maximalelement complet. Soient  $n$  et  $m$  des entiers. Soit  $\Gamma^*$  un sous-groupe de  $\mathbf{R}_+^*$ . Soient  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  et  $V$  une partie  $\Gamma^*$ -semi-algébrique de  $\mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}}$ . Soit  $\pi: \mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$  la projection sur les  $m$  dernières coordonnées. Pour tout point  $y$  de  $\mathbf{A}_k^{m,\text{an}}(k)$ , notons  $s_x(y)$  l'antécédent du point  $x$  par l'isomorphisme  $\pi^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{n,\text{an}} = \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Alors, la partie

$$\{y \in \mathbf{A}_k^{m,\text{an}}(k) \mid s_x(y) \in V\}$$

est l'ensemble des  $k$ -points d'une partie  $\Gamma_x^*$ -semi-algébrique de  $\mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$ , où  $\Gamma_x^*$  désigne le sous-groupe de  $\mathbf{R}_+^*$  engendré par  $\Gamma^*$  et  $|\mathcal{H}(x)^*|$ .

*Démonstration.* — Notons  $(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$  avec  $\mathbf{T}$  de longueur  $n$  et  $\mathbf{T}'$  de longueur  $m$  des coordonnées sur  $\mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}}$ . La partie  $V$  peut être définie à l'aide d'unions, intersections et complémentaires de parties de la forme  $|Q(\mathbf{T}, \mathbf{T}')| \leq \lambda |R(\mathbf{T}, \mathbf{T}')|$ , avec  $Q(\mathbf{T}, \mathbf{T}'), R(\mathbf{T}, \mathbf{T}') \in k[\mathbf{T}, \mathbf{T}']$  et  $\lambda \in \Gamma^* \cup \{0\}$ . Notons  $d$  le maximum des degrés en  $\mathbf{T}$  des polynômes qui interviennent. D'après le théorème 2.3.4, il existe des polynômes  $P_1(\mathbf{T}), \dots, P_t(\mathbf{T}) \in k[\mathbf{T}]$  et des nombres réels  $r_1, \dots, r_t \in |\mathcal{H}(x)|$  tels que, en posant

$$S = \bigcap_{1 \leq i \leq t} \{|P_i(\mathbf{T})| \leq r_i\},$$

nous ayons

$$\forall P(\mathbf{T}) \in k[\mathbf{T}]_{\leq d}, \|P(\mathbf{T})\|_S = |P(\mathbf{T})(x)|.$$

Soit  $K$  une extension valuée complète algébriquement close de  $\mathcal{H}(x)$  de valuation non triviale. Supposons, de plus, que  $|K|$  contient  $\Gamma_x^*$ . Notons  $\mathbf{a}$  l'image de  $\mathbf{T}$  par le morphisme d'évaluation  $k[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{H}(x) \hookrightarrow K$ . Alors, nous avons  $\mathbf{a} \in S(K)$  et, pour tout  $P(\mathbf{T}) \in k[\mathbf{T}]$ ,

$$|P(\mathbf{T})(\mathbf{a})| = |P(\mathbf{T})(x)|.$$

Soit  $\mathbf{y} \in k^m$ . On vérifie facilement que l'énoncé  $|Q(x, \mathbf{y})| \leq \lambda |R(x, \mathbf{y})|$  équivaut à

$$\forall \alpha \in S(K), \exists \beta \in S(K), |Q(\alpha, \mathbf{y})| \leq \lambda |R(\beta, \mathbf{y})|.$$

Cette dernière assertion peut s'écrire comme une formule avec variable  $\mathbf{y}$  à paramètres dans  $K$ . Or, d'après [Rob56], dans la théorie des corps valués algébriquement clos de valuation non triviale, il est possible d'éliminer les quantificateurs. En d'autres termes, l'ensemble des points  $\mathbf{y}$  de  $K^m$ , et donc de  $k^m$ , en lesquels la formule est vérifiée est semi-algébrique, et même  $|K|$ -semi-algébrique.  $\square$

Expliquons maintenant, en quelques mots, le lien entre le résultat précédent et la notion de type définissable. Supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos et maximalelement complet. Pour simplifier, nous supposons également qu'il n'est pas trivialement valué. Soit  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . On peut associer à ce point un type  $p_x$ , c'est-à-dire un ensemble de formules dans le langage des corps valués, à paramètres dans  $k$ . Soit  $\mathbf{u}$  un  $n$ -uplet de

variables. Une formule  $\varphi(\mathbf{u})$  appartient à  $p_x$  si le point  $x$  appartient à la partie semi-algébrique (et même  $|k|$ -semi-algébrique) qu'elle définit.

Dire que le type  $p_x$  est définissable sur  $k$  signifie que, pour toute formule  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  sans paramètres, où  $\mathbf{v}$  est un  $m$ -uplet de variables, l'ensemble  $W$  des éléments  $\mathbf{y}$  de  $k^m$  tels que  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{y})$  appartient à  $p_x$  est définissable sur  $k$ . Si  $k$  est algébriquement clos, la formule  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est équivalente à une formule sans quantificateurs et correspond donc à une partie  $|k|$ -semi-algébrique  $V$  de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . L'ensemble  $W$  recherché n'est alors autre que l'ensemble  $\{y \in \mathbf{A}_k^{m,\text{an}}(k) \mid s_y(x) \in V\}$ . Si l'on suppose, de plus, que  $|\mathcal{H}(x)| = |k|$ , alors le théorème permet de conclure que cet ensemble est  $|k|$ -semi-algébrique, autrement dit, définissable sur  $k$ , par une certaine formule  $d_x(\psi)(\mathbf{v})$ .

L'un des intérêts des types définissables et que l'on peut les étendre à des extensions  $K$  du corps  $k$ . Considérons une formule  $\varphi(\mathbf{u})$  à paramètres dans  $K$ . On peut l'écrire sous la forme  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ , où  $\mathbf{y}$  est un élément de  $K^m$  et  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  une formule sans paramètres. La formule  $\varphi(\mathbf{u})$  appartiendra au type étendu  $p_x|K$  si la formule  $d_x(\psi)(\mathbf{y})$  est satisfaite dans  $K^m$ . Nous obtenons ainsi un ensemble complet de formules, c'est-à-dire un ensemble contenant, pour tout formule, soit ladite formule, soit sa négation. Il faut encore vérifier que cet ensemble n'est pas contradictoire, mais tel est bien le cas par des arguments de modèle-complétude : les mêmes énoncés valent dans tous les corps valués algébriquement clos de valuation non triviale. Un point étant déterminé par l'ensemble des parties semi-algébriques auxquelles il appartient, ce nouveau type  $p_x|K$  définit un point  $x_K$  de  $\mathbf{A}_K^{n,\text{an}}$ . Nous obtenons ainsi une nouvelle façon d'aborder les points universels de la section 2.1.

Les arguments précédents fournissent le résultat suivant.

**Corollaire 2.3.9.** — *Supposons que le corps  $k$  est maximale-ment complet, algébriquement clos et que sa valuation n'est pas triviale. Soient  $n$  un entier et  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  tel que  $|\mathcal{H}(x)| = |k|$ . Soit  $(S_d)_{d \in \mathbf{N}^n}$  la famille des parties associées à  $x$  par le théorème 2.3.4.*

*Soit  $K$  une extension valuée complète de  $k$ . Soit  $\pi: \mathbf{A}_K^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  le morphisme naturel. Il existe un unique point  $\sigma_K(x) \in \mathbf{A}_K^{n,\text{an}}$  tel que*

$$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^n, \forall P \in K[\mathbf{T}]_{\leq \mathbf{d}}, \|P\|_{\pi^{-1}(S_{\mathbf{d}})} = |P(\sigma_K(x))|.$$

*En outre, le point  $\sigma_K(x)$  peut également être caractérisé par la propriété suivante :*

$$\forall P \in K[\mathbf{T}], |P(\sigma_K(x))| = \|P\|_{\pi^{-1}(x)}.$$

Nous pouvons alors étendre le résultat du théorème 2.3.8. À vrai dire, le corollaire précédent ne nous permet d'y parvenir que lorsque  $|\mathcal{H}(x)| = |k|$ , mais des arguments mettant en jeu des points universels et des calculs explicites de normes permettent de le démontrer en toute généralité.

**Théorème 2.3.10.** — *Supposons que le corps  $k$  est maximale-ment complet, algébrique-ment clos et que sa valuation n'est pas triviale. Soient  $n$  et  $m$  des entiers. Soit  $\Gamma^*$  un sous-groupe de  $\mathbf{R}_+^*$ . Soient  $x$  un point de  $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$  et  $V$  une partie  $\Gamma^*$ -semi-algébrique de  $\mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}}$ . Soit  $\pi: \mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$  la projection sur les  $m$  dernières coordonnées. Pour tout point  $y$  de  $\mathbf{A}_k^{m,\text{an}}$ , notons  $s_x(y)$  le relevé universel  $\sigma_{\mathcal{H}(y)}(x)$  de  $x$  dans  $\pi^{-1}(y) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ . Alors, la partie  $s_x^{-1}(V)$  de  $\mathbf{A}_k^{n+m,\text{an}}$  est  $\Gamma_x^*$ -semi-algébrique.*





## CHAPITRE 3

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $p$ -ADIQUES

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré aux équations différentielles  $p$ -adiques sur les courbes analytiques au sens de V. Berkovich. En nous inspirant de l'article fondateur [Bal10] de F. Baldassarri, nous proposons une définition de rayon de convergence, et de rayon de convergence subsidiaire, d'un module à connexion en tout point d'une courbe analytique quasi-lisse et étudions ses propriétés. Nous montrons que cette fonction est continue et jouit d'une propriété de finitude forte : elle se factorise par la rétraction sur un sous-graphe localement fini de la courbe.

Nos résultats s'inscrivent dans la lignée de nombreux autres sur le sujet et il nous semble difficile de les comprendre indépendamment. Nous commencerons donc ce chapitre quelques rappels. Pour les rédiger, nous nous sommes inspiré des ouvrages [Chr12] et [Ked10]. Nous poursuivrons par un exposé rapide de l'article [Pul12] d'A. Pulita, où la continuité et la finitude des rayons de convergences sont démontrés pour les modules à connexion sur un domaine affinoïde de la droite affine. Nous présenterons finalement deux preuves du résultat énoncé plus haut. La première vaut en tout généralité et se base de façon essentielle sur le cas d'un domaine affinoïde de la droite affine précédemment traité, auquel on se ramène par des constructions locales de morphismes étales bien choisis. La seconde traite d'un cas particulier, celui du seul rayon de convergence sur une courbe sans bord, mais de façon plus directe, à l'aide d'arguments de théorie du potentiel. Ces résultats sont le fruit d'une collaboration avec A. Pulita et font respectivement l'objet des articles [PP12] et [PP13].

Fixons maintenant le cadre de notre étude. Soit  $(k, |\cdot|)$  un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est complet. Bien que cela ne soit en réalité pas indispensable, pour la simplicité de l'exposition, nous supposons que  $k$  est algébriquement clos. Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique au sens de V. Berkovich. Nous supposons qu'elle est quasi-lisse, c'est-à-dire qu'elle vérifie le critère jacobien. Soit  $(\mathcal{F}, \nabla)$  un module à connexion sur  $X$ .

### 3.1. Préliminaires sur les extensions du corps de base

Considérons un point  $x$  de  $X$ . Dans la suite, plusieurs des quantités que nous voulons considérer, tel le rayon de convergence, se définissent naturellement en partant d'un disque

$k$ -rationnel centré au point  $x$ . Un tel disque existe lorsque le point  $x$  est  $k$ -rationnel, mais pas en général. Nous allons contourner ce problème en étendant le corps de base. Rappelons que, pour toute extension valuée complète  $K$  de  $k$ , nous notons  $X_K = X \hat{\otimes}_k K$  et désignons par  $\pi_K : X_K \rightarrow X$  le morphisme canonique.

La fibre du morphisme  $\pi_{\mathcal{H}(x)}$  au-dessus du point  $x$  est isomorphe au spectre de l'algèbre  $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ . Elle possède donc un point  $\mathcal{H}(x)$ -rationnel canonique  $x'$  : celui associé au caractère  $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(x)$  induit par la multiplication. Nous pouvons donc à présent considérer des disques centrés au point  $x'$  dans l'espace  $\mathcal{H}(x)$ -analytique  $X_{\mathcal{H}(x)}$ . Par la suite, nous utiliserons souvent cette construction de façon implicite en utilisant l'expression « disque centré au point  $x$  ».

Soit  $L$  une extension de  $k$ . Lorsque l'extension est assez grande, l'espace  $X_L$  peut contenir un point  $L$ -rationnel  $x''$  au-dessus de  $x$  (la condition pour que cela se produise étant précisément que  $\mathcal{H}(x)$  s'envoie isométriquement dans  $L$ ). On peut alors également considérer les disques de  $X_L$  centrés au point  $x''$ . Les quantités définies dans la suite de ce texte ne subissent aucune modification si l'on utilise le point  $x''$  au lieu du point  $x'$ . En effet, on montre d'une part que ces quantités ne changent pas lorsqu'elle sont définies en un point rationnel et que l'on étend le corps de base, d'autre part que, lorsque le corps est assez gros, il existe un automorphisme isométrique permettant de passer d'un disque centré en un point rationnel au-dessus de  $x$  à un autre. La preuve de ce dernier point s'appuie sur le résultat suivant de B. Dwork et Ph. Robba (see [DR77, lemma 8.2]).

**Lemme 3.1.1.** — *Soit  $L$  un corps valué complet. Soit  $M$  une extension algébriquement close et maximale complète de  $L$ . Tout automorphisme continu de  $L$  s'étend en un automorphisme de  $M$ .*

### 3.2. Quelques rappels de théorie du potentiel

Avant de continuer, rappelons quelques idées à la base de la théorie du potentiel sur les courbes analytiques  $p$ -adiques qui nous seront utiles par la suite. Elles sont intimement liées à la structure de graphe sous-jacentes aux courbes. Cette partie est intégralement reprise de la thèse [Thu05] d'A. Thuillier.

Soit  $U$  un ouvert de  $X$  et notons  $U_{[2,3]}$  l'ensemble de ses points de type 2 ou 3. Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  est dite lisse si elle est continue, localement constante en dehors d'un sous-graphe fini  $\Gamma$  de  $U_{[2,3]}$  et linéaire par morceaux sur ce graphe. Notons  $A^0(U)$  l'ensemble de ces fonctions. On définit le laplacien d'un élément  $f$  de  $A^0(U)$  par

$$(3.2.1) \quad \mathrm{dd}^c(f) = \sum_{p \in U} \left( \sum_{\vec{v} \in T_p U} d_{\vec{v}} f(p) \right) \delta_p,$$

où  $T_p U$  désigne l'ensemble des directions partant du point  $p$ ,  $d_{\vec{v}} f(p)$  la dérivée de  $f$  en  $p$  dans la direction de  $\vec{v}$  et  $\delta_p$  la mesure de Dirac au point  $p$ . C'est une mesure réelle localement finie sur  $U$  dont le support est contenu dans  $U_{[2,3]}$ . Notons  $A^1(U)$  l'ensemble de ces mesures.

Notons  $D^0(U)$  (resp.  $D^1(U)$ ) le dual de l'ensemble  $A_c^1(U)$  (resp.  $A_c^0(U)$ ) formé des mesures (resp. fonctions) à support compact. Ses éléments sont appelés courants de degré 0

(resp. 1). Remarquons que  $D^0(U)$  est naturellement isomorphe à  $\text{Hom}(U_{[2,3]}, \mathbf{R})$ . L'opérateur  $\text{dd}^c$  préserve la compacité du support et induit par dualité une application

$$\text{dd}^c: D^0(U) \rightarrow D^1(U).$$

Une fonction lisse ou un courant de degré 0 sont dits sur-harmoniques si leur laplacien est négatif. Cette propriété correspond à celle de concavité sur un segment. Un exemple typique de fonction sur-harmonique (à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$ ) est une fonction de la forme  $-\log(|f|)$ , où  $f$  est un élément de  $\mathcal{O}(U)$  qui ne s'annule identiquement sur aucune composante connexe de  $U$ .

La notion de sur-harmonicité entraîne de fortes propriétés de finitude dont nous tirerons profit dans la suite.

**Théorème 3.2.1.** — *Soient  $U$  un ouvert de  $X$  et  $T \in D^0(U)$  un courant sur-harmonique sur  $U$ . Alors  $\text{dd}^c(T)$  est une mesure de Radon négative :*

i) *pour toute fonction  $f$  sur  $U$  à support compact et positive, on a*

$$\int_U f \text{dd}^c(T) \leq 0 ;$$

ii) *pour toute partie compacte  $K$  de  $U$ , il existe une constante  $M_K$  telle que, pour toute fonction  $f$  sur  $U$  à support dans  $K$ , on ait*

$$\left| \int_U f \text{dd}^c(T) \right| \leq M_K \|f\|_K.$$

Les fonctions sur-harmoniques possèdent également des propriétés de continuité analogues à celles des fonctions concaves.

**Proposition 3.2.2.** — *Soient  $U$  un ouvert de  $X$  et  $f$  une fonction sur-harmonique sur  $U$ . Soit  $x$  un point de type 2, 3 ou 4 et  $\vec{v}$  une direction issue de  $x$ . Alors la fonction  $f$  est dérivable en  $x$  dans la direction de  $\vec{v}$ .*

*En particulier, la fonction  $f$  est continue sur tout intervalle de l'intérieur de  $U$  qui ne contient aucun point de type 1.*

### 3.3. Sur un domaine analytique de la droite

Soit  $X \hookrightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  un domaine analytique de la droite. Nous noterons  $t$  la coordonnée sur la droite.

**3.3.1. Rayons de convergence plongés.** — Soit  $x \in X(k)$ . Notons  $r$  le rang de  $\mathcal{F}_x$ . Le point  $x$  étant rationnel, il appartient à l'intérieur du domaine analytique  $X$  et possède un système fondamental de voisinages formé de disques. Nous pouvons définir le rayon de convergence du fibré à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$  au point  $x$  comme le rayon du plus grand disque centré en  $x$  sur lequel le fibré est isomorphe au fibré trivial de même rang  $r$ .

Nous traiterons le cas d'un point  $x$  de  $X$  quelconque en nous ramenant au cas d'un point rationnel par la construction exposée à la section 3.1.

**Définition 3.3.1.** — Soit  $x \in X$ . On appelle *rayon de convergence plongé* de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$ , et l'on note  $\mathcal{R}^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ , le rayon du plus grand disque ouvert centré en  $x$  et contenu dans  $X$  sur lequel le fibré à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$  est trivial.

Nous pouvons affiner cette définition et introduire des rayons de convergence subsidiaires.

**Définition 3.3.2.** — Soit  $x \in X$ . Soit  $i \in \llbracket 1, \text{rang}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$ . On appelle  $i^{\text{ème}}$  *rayon de convergence plongé* de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$ , et l'on note  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ , le rayon du plus grand disque ouvert centré en  $x$  et contenu dans  $X$  sur lequel le fibré à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$  possède un sous-fibré trivial de rang  $r - i + 1$ .

Remarquons que l'on a

$$\mathcal{R}^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \mathcal{R}_1^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)).$$

On peut donner une formule explicite pour calculer le rayon de convergence sur un disque fermé  $D$  de rayon  $R > 0$ . Notons  $t$  la coordonnée sur ce disque. Soit  $(\mathcal{F}, \nabla)$  un module à connexion sur  $D$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  est alors libre. Choisissons un isomorphisme entre  $\mathcal{F}(D)$  et  $\mathcal{O}(D)^r$  et munissons  $\mathcal{O}(D)$  de la dérivation  $d = d/dt$ . On peut alors associer à la connexion  $\nabla$  un opérateur différentiel sur  $\mathcal{O}(D)^r$ . Notons  $G \in M_r(\mathcal{O}(D))$  sa matrice.

Soit  $x$  un point  $k$ -rationnel de  $D$ . Nous pouvons calculer la série de Taylor de la matrice fondamentale de solutions de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  au voisinage du point  $x$  :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{G_n(x)}{n!} (t - t(x))^n,$$

où  $G_0 = \text{Id}$ ,  $G_1 = G$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $G_{n+1} = d(G_n) + G_n G$ . Le rayon de convergence en  $x$  est alors donné par la formule

$$(3.3.1) \quad \mathcal{R}^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \min \left( \liminf_{n \geq 1} \left( \left| \frac{G_n(x)}{n!} \right|^{-\frac{1}{n}} \right), R \right),$$

où  $|G_n(x)/n!|$  désigne la norme d'opérateur de  $G_n(x)/n!$  sur  $\mathcal{H}(x)^r$ , qui coïncide avec le maximum des normes des coefficients de cette matrice. Puisque les matrices  $G_n$  ne changent pas lorsque l'on étend le corps  $k$ , la formule vaut en réalité pour tout point de  $D$ .

En majorant les normes des matrices  $G_n$  à l'aide de celle de  $G$ , on démontre que la limite inférieure qui apparaît dans la formule précédente est strictement positive. Puisque le rayon de convergence se calcule en se ramenant au cas d'un disque, nous obtenons un résultat valant en toute généralité. En outre, il vaut pour tous les rayons, puisque le premier est le plus petit.

**Proposition 3.3.3.** — Pour tout point  $x$  de  $X$  et tout  $i \in \llbracket 1, \text{rang}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$ , on a  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) > 0$ .

En particulier, les fonctions  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  sont constantes au voisinage de tout point  $k$ -rationnel de  $X$ .

La formule explicite obtenue pour le rayon de convergence permet d'établir d'autres propriétés.

**Proposition 3.3.4.** — *La fonction  $\log(\mathcal{R}^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est sur-harmonique sur l'intérieur de  $X$ .*

*Démonstration.* — En tout point  $x$  de  $X$ , nous avons

$$\log(\mathcal{R}^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))) = \min \left( \liminf_{n \geq 1} \left( -\frac{1}{n} \log \left( \left| \frac{G_n(x)}{n!} \right| \right) \right), \log(R) \right).$$

De plus, chacune des fonctions  $-1/n \log(|G_n|/|n!|)$  est sur-harmonique sur l'intérieur de  $X$ . Le résultat découle alors des propriétés usuelles des fonctions sur-harmoniques.

Pour utiliser directement les propriétés des fonctions sur-harmoniques, il faudrait en réalité remplacer la limite inférieure des fonctions par sa régularisation semi-continue inférieurement. On montre cependant que cette opération est inutile en utilisant le résultat de continuité 3.2.2 au voisinage d'un point de type 2, 3 ou 4 et le résultat de constance 3.3.3 au voisinage d'un point de type 1.  $\square$

**3.3.2. Rayons de convergence génériques.** — Il existe d'autres façons de définir le rayon de convergence. Soit  $x$  un point de  $X$  qui n'est pas de type 1. Notons  $r(x) > 0$  le rayon de ce point. La dérivation  $d = d/dt$  sur  $\mathcal{O}(X)$  s'étend par continuité au corps résiduel complété  $\mathcal{H}(x)$ . On vérifie que sa norme en tant qu'opérateur est

$$(3.3.2) \quad \|d\|_{\text{op}, \mathcal{H}(x)} = \frac{1}{r(x)}$$

et que sa norme spectrale est

$$(3.3.3) \quad \|d\|_{\text{sp}, \mathcal{H}(x)} = \frac{\omega}{r(x)},$$

où l'on a posé

$$(3.3.4) \quad \omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} |n!|^{1/n} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 ; \\ p^{-1/(p-1)} & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(x)$  sur  $\mathcal{H}(x)$  induit par  $\mathcal{F}$ . Il est de dimension  $r = \text{rang}(\mathcal{F}_x)$ . Il est muni d'un opérateur différentiel  $D(x)$  associé à la connection  $\nabla$ .

**Définition 3.3.5.** — *Soit  $x \in X$ . On définit le rayon de convergence générique de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$  par*

$$\mathcal{R}^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \frac{\omega}{\|D(x)\|_{\text{sp}, \mathcal{H}(x)}}$$

*si le point  $x$  n'est pas de type 1, et par*

$$\mathcal{R}^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = 0$$

*sinon.*

Comme précédemment, nous pouvons définir des rayons subsidiaires.

**Définition 3.3.6.** — *Soit  $x$  un point de  $X$  qui n'est pas de type 1. Considérons les facteurs  $(F_1, D_1), \dots, (F_r, D_r)$  d'une suite de Jordan-Hölder associée à  $(\mathcal{F}(x), D(x))$ . Formons une*

suite de nombres réels en classant dans l'ordre croissant les rayons de convergence génériques des modules  $(F_i, D_i)$ , chacun étant répété autant de fois que la dimension de l'espace vectoriel auquel il est associé. Notons

$$\mathcal{R}_1^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) \leq \dots \leq \mathcal{R}_r^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$$

cette suite. On appelle  $i^{\text{ème}}$  rayon de convergence générique de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$  le nombre réel  $\mathcal{R}_i^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ .

Soit  $x$  un point de  $X$  de type 1. On étend la définition en posant

$$\mathcal{R}_1^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \dots = \mathcal{R}_r^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = 0.$$

Remarquons que l'on a

$$\mathcal{R}_1^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \mathcal{R}^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)).$$

Ces rayons sont reliés simplement aux rayons plongés par la proposition suivante.

**Proposition 3.3.7.** — Pour tout  $x \in X$  et tout  $i \in \llbracket 1, \text{rang}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$ , nous avons

$$\mathcal{R}_i^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \min(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)), r(x)).$$

*Démonstration.* — Pour le premier rayon de convergence, le résultat peut se démontrer par un calcul direct, comme dans [Chr12, proposition-définition 8.1] ou [Ked10, lemma 6.2.5]. On peut aussi utiliser l'interprétation géométrique du second membre exposée à la remarque ci-dessous pour démontrer le résultat de façon un peu plus géométrique, comme dans [Ked10, proposition 9.7.5]. Les calculs restent essentiellement les mêmes.

Pour obtenir le résultat pour les autres rayons, on décompose le module. Nous renvoyons à [Ked10, theorem 11.9.2] pour une preuve complète.  $\square$

**Remarque 3.3.8.** — En un point  $x$  qui n'est pas de type 1, il est également possible d'interpréter directement les quantités  $\min(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)), r(x))$ , et donc les rayons génériques, comme des rayons de convergence plongés. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur la structure précise de la fibre de la projection  $\pi_{\mathcal{H}(x)}$  au-dessus du point  $x$  (cf. théorème 2.1.8). Rappelons que nous avons supposé le corps de base  $k$  algébriquement clos. La fibre est alors constituée d'un point canonique  $x_{\mathcal{H}(x)}$  et d'une famille de disques ouverts  $\mathcal{H}(x)$ -rationnels de rayon  $r(x)$  dont le point  $x_{\mathcal{H}(x)}$  précédent est le bord. Notons  $x'$  le point  $\mathcal{H}(x)$ -rationnel au-dessus de  $x$  et  $\mathring{D}(x', r(x))$  le disque ouvert qui appartient à la famille précédente et contient ce point. Nous avons alors un morphisme canonique

$$\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{O}(\mathring{D}(x, r(x))).$$

Par extension des scalaires puis restriction, un module différentiel  $(M, D)$  sur  $\mathcal{H}(x)$  en induit un sur  $D^-(x, r(x))$ . On vérifie que les quantités  $\min(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)), r(x))$ , et donc les rayons génériques, coïncident avec les rayons plongés sur ce disque, le plongement s'étant effectué lorsque nous avons choisi le rayon du disque comme égal à  $r(x)$ . On peut penser au disque  $\mathring{D}(x, r(x))$  comme à un disque générique au-dessus du point  $x$ .

**3.3.3. Modules différentiels cycliques.** — Soit  $V$  un domaine analytique connexe de  $X$  sur lequel le faisceau  $\mathcal{F}$  est libre. Notons  $r$  son rang. Munissons l'anneau  $\mathcal{O}(V)$  de la dérivation  $d$  induite par  $d/dt$ . Considérons le module différentiel  $(M, D)$  sur  $(\mathcal{O}(V), d)$  associé à  $(\mathcal{F}, \nabla)$ .

**Définition 3.3.9.** — On dit qu'un élément  $m$  de  $M$  est un vecteur cyclique si  $(m, D(m), \dots, D^{r-1}(m))$  est une base de  $M$ .

Pour tout anneau différentiel  $(A, d)$ , on note  $A\langle T \rangle$  l'algèbre des polynômes différentiels sur  $A$ . Rappelons que c'est une  $A$ -algèbre non commutative vérifiant  $Ta = aT + d(a)$  pour tout  $a \in A$ .

Un vecteur cyclique de  $(M, D)$  correspond à une présentation de  $M$  sous la forme  $M \simeq \mathcal{O}(V)\langle T \rangle / \mathcal{O}(V)\langle T \rangle P$ , avec  $P \in \mathcal{O}(V)\langle T \rangle$ . Dans le cas où nous nous sommes placés, sur une  $\mathbf{Q}$ -algèbre différentielle contenant un élément de dérivée égale à 1, un module différentiel possède toujours un vecteur cyclique sur un ouvert de Zariski non vide, c'est-à-dire hors d'un ensemble localement fini de points de type 1 (cf. [Kat87]).

Dans le cas d'un module différentiel cyclique, certains rayons sont faciles à calculer. Rappelons que le polygone de Newton d'un polynôme unitaire  $P = \sum_{i=0}^d a_i T^i$  à coefficients dans un corps valué  $K$  est, par définition, l'enveloppe convexe inférieure de la partie de  $\mathbf{R}^2$  définie par  $\{(i, v_i), 0 \leq i \leq d\}$ , avec  $v_i = -\log(|a_{d-i}|)$ .

**Théorème 3.3.10.** — Soit  $P \in \mathcal{H}(x)\langle T \rangle$  un polynôme différentiel tel que le module différentiel  $(\mathcal{F}(x), D(x))$  soit isomorphe à  $\mathcal{H}(x)\langle T \rangle / \mathcal{H}(x)\langle T \rangle P$ . Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pentes du polygone de Newton de  $P$  comptées avec multiplicité. Notons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rayons de  $\mathcal{F}$  en  $x$  comptés avec multiplicité. Alors, on a l'égalité

$$[\exp(\mathcal{P})]_{<r(x)} = \left[ \frac{1}{\omega} \mathcal{R} \right]_{<r(x)},$$

où les  $[\cdot]_{<r(x)}$  signifient que l'on ne considère que les éléments strictement inférieurs à  $r(x)$ .

*Démonstration.* — Indiquons le principe de la démonstration permettant d'identifier la plus petite pente  $\lambda$  du polygone et le premier rayon de convergence. Nous suivons ici [Chr12, théorème 8.6]. Écrivons  $P = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i$ . La matrice  $G$  de l'opérateur différentiel  $D(x)$ , autrement dit, de  $T$ , est une matrice compagnon dans laquelle apparaissent les coefficients  $a_0, \dots, a_{d-1}$ . Un calcul montre que la norme spectrale de  $G$  n'est autre que

$$\max_{0 \leq i \leq d-1} (|a_{d-i}|^{1/i}) = e^{-\lambda},$$

par définition de  $\lambda$ .

Supposons maintenant que  $e^\lambda < r(x)$ , autrement dit, que  $e^{-\lambda} > \|d\|_{\text{op}, \mathcal{H}(x)}$ . Définissons des matrices  $G_n$  comme dans la formule (3.3.1). En utilisant le résultat précédent et la relation de récurrence  $G_{n+1} = d(G_n) + G_n G$ , on montre que,  $|G_n|$  est proche de  $e^{-\lambda n}$  pour  $n$  assez grand. Le résultat découle alors de la formule (3.3.1).

Pour montrer le résultat pour les autres pentes et les autres rayons, on factorise le polynôme  $P$ , ce qui correspond à une filtration du module différentiel. Nous renvoyons à [Ked10, corollary 6.5.4] pour les détails.  $\square$

**Remarque 3.3.11.** — La troncation qui apparaît entraîne que le résultat vaut aussi bien pour les rayons plongés que les rayons génériques.

**Remarque 3.3.12.** — Le résultat vaut plus généralement pour un module différentiel cyclique sur un corps différentiel valué complet  $(K, d)$  en utilisant des rayons de convergence génériques définis comme à la section 3.3.2 et en remplaçant  $r(x)$  par  $1/\|d\|_{\text{op}}$ .

Ce résultat a des conséquences fortes sur le comportement des rayons de convergence. En effet, les pentes du polygone de Newton d'un polynôme s'expriment facilement en fonction de ses coefficients. Comme précédemment, fixons un polynôme  $P = \sum_{i=0}^d a_i T^i$  à coefficients dans un corps valué  $K$ . Rappelons que, pour  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , nous avons posé  $v_i = -\log(|a_{d-i}|)$ . Pour  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , on note  $h_i(P)$  la  $i^{\text{ème}}$  hauteur partielle du polygone, c'est-à-dire l'ordonnée du point du polygone d'abscisse  $i$ .

**Lemme 3.3.13.** — Pour  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , nous avons

$$(3.3.5) \quad h_i(P) = \min_{j \leq i \leq k} \left( v_j + (i - j) \frac{v_k - v_j}{k - j} \right).$$

En particulier, nous avons  $h_0 = 0$  et  $h_d = v_d$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{O}(V)$ , la fonction  $-\log(|f|)$  est continue, constante hors d'un graphe localement fini, sur-harmonique sur l'intérieur de  $V$ , harmonique sur l'intérieur de  $V$  privé du lieu d'annulation de  $f$  et concave sur tout intervalle contenu dans  $V$ . Les hauteurs partielles des polygones de Newton possèdent donc de bonnes propriétés.

Afin d'utiliser facilement le théorème 3.3.10, introduisons une nouvelle définition.

**Définition 3.3.14.** — Soit  $x \in X$ . Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On définit le  $i^{\text{ème}}$  rayon de convergence polygonal de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i^{\text{pol}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) &= \min(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)), \omega r(x)) \\ &= \min(\mathcal{R}_i^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)), \omega r(x)). \end{aligned}$$

Définissons également les analogues des hauteurs partielles du polygone de Newton dans le cadre des rayons de convergence.

**Définition 3.3.15.** — Soit  $x \in X$ . Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On appelle  $i^{\text{ème}}$  hauteur partielle plongée (resp. générique, resp. polygonale) de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$  la quantité

$$H_i^*(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \sum_{j=1}^i \mathcal{R}_j^*(x, (\mathcal{F}, \nabla))$$

où  $*$  = pl (resp.  $*$  = gén, resp.  $*$  = pol).

Les résultats qui suivent seront généralisés au cours de la prochaine section.

**Corollaire 3.3.16.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Soit  $x$  un point de  $X$  tel que  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) < \omega r(x)$ . Dans toute direction partant de  $x$ , il existe un intervalle d'origine  $x$  sur lequel la fonction

$$y \mapsto \log(H_i^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)))$$



est linéaire. En outre, elle est constante dans presque toute direction.

Si  $x$  est intérieur à  $V$ , cette fonction est sur-harmonique en  $x$ . Lorsque  $i = r$ , elle est même harmonique.

*Démonstration.* — Le faisceau  $\mathcal{F}$  est libre sur un voisinage  $V$  de  $x$ . Quitte à remplacer  $V$  par un ouvert de Zariski, nous pouvons supposer que  $(\mathcal{F}, \nabla)$  est associé à un module différentiel cyclique. Le résultat découle alors du théorème 3.3.10, du lemme 3.3.13 et des propriétés générales des fonctions continues, sur-harmoniques et harmoniques.  $\square$

**Corollaire 3.3.17.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Soit  $x$  un point de  $X$  tel que  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) < \omega r(x)$ . Dans toute direction partant de  $x$ , il existe un intervalle d'origine  $x$  sur lequel la fonction

$$y \mapsto \log(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire. En outre, elle est constante dans presque toute direction.

La troncation qui apparaît dans le théorème 3.3.10 empêche de démontrer des résultats globaux sur la fonction  $H_i^{\text{pol}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$ . En effet, la fonction  $r(\cdot)$  n'est pas continue et ne se factorise pas par un graphe fini. Cependant, son logarithme est linéaire de pente 1 sur tout segment. Des propriétés des hauteurs partielles en découlent.

**Corollaire 3.3.18.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Sur tout intervalle contenu dans un disque ou une couronne, la fonction

$$x \mapsto \log(H_i^{\text{pol}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire par morceaux, concave et ses pentes sont de la forme  $m/j$  avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer le résultat pour tout segment  $J$  contenu dans un disque ou une couronne. Au voisinage d'un point de type 1, le résultat découle de la proposition 3.3.3. Nous pouvons donc supposer que  $J$  ne contient aucun point de type 1. Le segment  $J$  est contenu dans un disque compact ou une couronne compacte. Les anneaux de ces espaces étant principaux, le faisceau  $\mathcal{F}$  y est libre. Nous pouvons donc nous ramener à traiter le cas d'un module différentiel, et même d'un module différentiel cyclique, quitte à restreindre à un voisinage de  $J$ . On conclut alors comme précédemment.  $\square$

**Corollaire 3.3.19.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Sur tout intervalle contenu dans un disque ou une couronne, la fonction

$$x \mapsto \log(H_i^{\text{pol}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire par morceaux et ses pentes sont de la forme  $m/j$  avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**3.3.4. Frobenius.** — Dans la section précédente, nous avons présenté une méthode efficace, basée sur les modules différentiels cycliques et les polygones de Newton, pour étudier les rayons d'équations différentielles. De sérieuses limitations apparaissent cependant puisque les rayons de convergence sont tronqués à la valeur  $\omega r(x)$ . Nous allons maintenant expliquer comment il est possible de contourner ce problème.

Soit  $V$  un domaine analytique connexe de  $X$  sur lequel le faisceau  $\mathcal{F}$  est libre. Supposons que  $V$  ne contient pas le point 0. Notons  $r$  son rang. Munissons l'anneau  $\mathcal{O}(V)$  de la dérivation  $d$  induite par  $d/dt$ . Considérons le module différentiel  $(M, D)$  sur  $(\mathcal{O}(V), d)$  associé à  $(\mathcal{F}, \nabla)$ .

Considérons l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$  induit par  $t \mapsto t^p$ . Notons  $W$  l'image de  $V$ . Munissons l'anneau  $\mathcal{O}(W)$  de la dérivation  $d'$  induite par  $d/dt^p$ . Le module différentiel  $(M, D)$  induit par restriction des scalaires un module différentiel  $(M', D')$  avec  $D' = p t^{1-p} D$ . Nous noterons  $(\mathcal{F}', \nabla')$  le fibré à connexion associé. Ce fibré est de rang  $pr$  et il se trouve que l'on peut décrire précisément ses rayons de convergence en fonction de ceux du module  $(M, D)$ . Les résultats exposés ici proviennent de [Ked10, theorem 10.5.1] et [Pul12, proposition 6.16].

**Théorème 3.3.20.** — *Soit  $x$  un point de  $X$ . Posons*

$$i_1 = \max(\{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid \mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) \leq \omega r(x)\}).$$

et

$$i_2 = \max(\{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid \mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) \leq r(x)\}).$$

Alors, on a

$$\max(\{i \in \llbracket 1, pr \rrbracket \mid \mathcal{R}_i^{\text{pl}}(\varphi(x), (\mathcal{F}', \nabla')) \leq r(\varphi(x)) = r(x)^p\}) = pi_2$$

et la famille  $(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(\varphi(x), (\mathcal{F}', \nabla'))_{1 \leq i \leq pi_2}$  est obtenue en concaténant et ordonnant les familles à  $p$  éléments

$$(|p| r(x)^{p-1} \mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)), \dots, |p| r(x)^{p-1} \mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

pour  $i \in \llbracket 1, i_1 \rrbracket$  et

$$(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))^p, \omega^p r(x)^p, \dots, \omega^p r(x)^p)$$

pour  $i \in \llbracket i_1 + 1, i_2 \rrbracket$ .

Les rayons de  $\mathcal{F}$  qui nous intéressent ici sont ceux qui appartiennent à l'intervalle  $[\omega r(x), r(x)[$ . Ceux qui sont inférieurs ont déjà été traités à la section précédente. Pour un tel rayon  $R_i$ , un rayon  $R_i^p$  apparaît dans la liste des rayons de  $\mathcal{F}'$ . Remarquons que nous avons de plus

$$\frac{R_i^p}{r(\varphi(x))} = \left( \frac{R_i}{r(x)} \right)^p < \frac{R_i}{r(x)}$$

car  $R_i < r(x)$ . En répétant l'opération un nombre convenable  $s$  de fois, nous pouvons nous ramener à un rayon  $R_i^s$  qui est strictement inférieur à  $\omega r(\varphi^s(x))$ , ce qui permet d'appliquer les résultats de la section précédente. Cela nous permet d'étendre les résultats des corollaires 3.3.16, 3.3.17, 3.3.18 et 3.3.19.

On trouve un énoncé complet regroupant tous les résultats qui suivent dans [Ked10, theorem 11.3.2]. De nombreux résultats partiels avaient été obtenus auparavant. Citons notamment la démonstration de la continuité du rayon de convergence sur le squelette d'une couronne par G. Christol et B. Dwork (cf. [CD94, théorème 2.5]).

**Corollaire 3.3.21.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Soit  $x$  un point de  $X$  tel que  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) < r(x)$ . Dans toute direction partant de  $x$ , il existe un intervalle d'origine  $x$  sur lequel la fonction

$$y \mapsto \log(H_i^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire. En outre, elle est constante dans presque toute direction.

Si  $x$  est intérieur à  $V$ , cette fonction est sur-harmonique en  $x$ . Lorsque  $i = r$ , elle est même harmonique.

**Corollaire 3.3.22.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Soit  $x$  un point de  $X$  tel que  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) < r(x)$ . Dans toute direction partant de  $x$ , il existe un intervalle d'origine  $x$  sur lequel la fonction

$$y \mapsto \log(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire. En outre, elle est constante dans presque toute direction.

**Corollaire 3.3.23.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Sur tout intervalle contenu dans un disque ou une couronne, la fonction

$$x \mapsto \log(H_i^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire par morceaux, concave et ses pentes sont de la forme  $m/j$  avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**Corollaire 3.3.24.** — Sur tout intervalle contenu dans un disque ou une couronne, la fonction

$$x \mapsto \log(\mathcal{R}_i^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)))$$

est linéaire par morceaux, concave et ses pentes sont de la forme  $m/j$  avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**3.3.5. Un théorème de décomposition.** — Afin de généraliser les résultats précédents au cas d'un domaine analytique quelconque de la droite affine, nous avons besoin d'un résultat technique supplémentaire, que nous présentons ici. Il s'agit d'un théorème de décomposition d'un module différentiel sur un disque ouvert dû à K. Kedlaya (cf. [Ked10, theorem 12.4.1]).

**Théorème 3.3.25.** — Soit  $D$  un disque ouvert de rayon  $R$  et  $(\mathcal{F}, \nabla)$  un fibré à connexion de rang  $r$  sur  $D$ . Soit  $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  est libre sur  $D$ . Supposons en outre que, pour tout  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ , la fonction  $\mathcal{R}_j^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante sur  $D$  et strictement inférieure à  $R$ . Supposons, en outre, que

$$\forall y \in D, \mathcal{R}_{i-1}^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)) < \mathcal{R}_i^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)).$$

Alors, il existe deux sous-modules différentiels  $\mathcal{F}_{<i}$  et  $\mathcal{F}_{\geq i}$  de  $\mathcal{F}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{<i} \oplus \mathcal{F}_{\geq i}$ ;
- ii)  $\mathcal{F}_{<i}$  est de rang  $i-1$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ , on a

$$\mathcal{R}_j^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}_{<i}, \nabla)) = \mathcal{R}_j^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)) ;$$

iii)  $\mathcal{F}_{\geq i}$  est de rang  $r - i + 1$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, r - i + 1 \rrbracket$ , on a

$$\mathcal{R}_j^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}_{\geq i}, \nabla)) = \mathcal{R}_{j+i-1}^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)).$$

**Remarque 3.3.26.** — Le résultat vaut en réalité sous des hypothèses moins fortes. Il suffit de supposer qu'il existe un intervalle  $I$  de  $D$  contenu dans aucun disque ouvert de rayon strictement plus petit et vérifiant les propriétés suivantes :

- i) la fonction  $H_{i-1}^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante sur  $I$  ;
- ii) en tout point  $y$  de  $I$ , on a  $R_{i-1}^{\text{gén}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)) < R_i^{\text{gén}}(y, (\mathcal{F}, \nabla))$ .

On obtient alors une décomposition du module  $\mathcal{F}$  sur  $D$  et des comparaisons de rayons valant sur  $I$ .

Le résultat vaut également sur des couronnes ouvertes (cf. [Ked10, theorem 12.4.2]). On demande alors que, sur le squelette  $I$  de la couronne, la fonction  $H_i^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  soit affine et les fonctions  $R_{i-1}^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  et  $R_i^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  séparées comme précédemment.

Il existe également une version valant pour les disques et couronnes fermés (cf. [Ked10, theorem 12.2.2 et theorem 12.3.1]). Il faut alors ajouter des hypothèses d'harmonicité pour le rayon  $R_{i-1}^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  aux points du bord.

**Corollaire 3.3.27.** — *Sous les hypothèses du théorème précédent, la fonction  $\log(\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est sur-harmonique sur  $D$ .*

*Démonstration.* — Cela découle de l'égalité  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}, \nabla)) = \mathcal{R}_1^{\text{pl}}(y, (\mathcal{F}_{\geq i}, \nabla))$  et de la proposition 3.3.4.  $\square$

**3.3.6. Résultats.** — Dans cette section, nous supposons que  $X$  est un domaine analytique connexe de la droite affine. L'hypothèse de connexité est évidemment superflue et n'est présente que pour faciliter l'énoncé du résultat. Les résultats que nous présentons ici sont tirés de l'article [Pul12] d'A. Pulita. Nous noterons  $r$  le rang de  $\mathcal{F}$  sur  $X$ .

**Théorème 3.3.28.** — *Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . La fonction  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  satisfait les propriétés suivantes :*

- i) elle est continue ;
- ii) elle est localement constante en dehors d'un sous-graphe localement fini de  $X$ .

Commençons par nous intéresser au rayon de convergence  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  dans un cas simple : celui d'un disque ouvert. D'après la proposition 3.3.4, la fonction  $\log(\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est sur-harmonique. D'après la proposition 3.3.3, elle est constante au voisinage de tout point rationnel. Nous savons également, d'après le corollaire 3.3.23, que sur tout intervalle, la fonction  $\log(\mathcal{R}_1^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est concave, linéaire par morceaux et ses pentes non nulles sont minorées en valeur absolue par  $1/r$ .

Les fonctions  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  et  $\mathcal{R}_1^{\text{gén}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  ne diffèrent qu'en des points  $x$  tels que  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) > r(x)$ . Mais, au voisinage d'un tel point, la fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  présente un comportement très simple : elle est constante et égale à  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ . En combinant ces arguments, on démontre aisément le résultat qui suit.

**Proposition 3.3.29.** — Soit  $D$  un disque ouvert relativement compact contenu dans  $X$ . Notons  $x$  le point du bord de  $D$  et  $p$  la pente de la fonction  $\log(\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  en  $x$  dans la direction de  $D$ . Alors  $p \geq 0$  et la fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante hors d'un sous-graphe fini de  $D \cup \{x\}$ .

En outre, si  $p = 0$ , alors la fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante sur  $D$ .

Considérons maintenant le cas général. L'ensemble des points de  $X$  ne possédant aucun voisinage isomorphe à un disque ouvert forme un graphe localement fini  $\Gamma_X$ . En tout point  $x$  de  $\Gamma_X$ , on a  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) \leq r(x)$  et donc  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \mathcal{R}_1^{\text{gén}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ . Par conséquent, sur chacune des arêtes de  $\Gamma_X$ , la fonction  $\log(\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est linéaire par morceaux.

Soit  $x \in \Gamma_X$ . Pour toute composante connexe  $C$  de  $X \setminus \{x\}$ , notons  $p_C$  la pente de la fonction  $\log(\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  en  $x$  dans la direction de  $C$ . Notons  $\mathcal{D}_x$  l'ensemble des composantes connexes de  $X \setminus \{x\}$  qui sont des disques et  $\mathcal{C}_x$  son complémentaire. Ce dernier ensemble correspond aux directions issues de  $x$  qui sont contenues dans  $\Gamma_x$  et est fini. Par sur-harmonicité, nous avons

$$\sum_{C \in \mathcal{D}_x} p_C + \sum_{C \in \mathcal{C}_x} p_C \leq 0.$$

D'après la proposition 3.3.29, pour tout  $C \in \mathcal{D}_x$ , nous avons  $p_C \geq 0$ . En particulier, si  $x$  n'est ni un sommet de  $\Gamma_X$ , ni un point d'une arête en lequel la pente change, alors  $\sum_{C \in \mathcal{C}_x} p_C = 0$  et, pour tout  $C \in \mathcal{D}_x$ , nous avons  $p_C = 0$ . D'après la proposition 3.3.29, la fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est alors constante sur tout  $C \in \mathcal{D}_x$ .

En outre, pour tout  $C \in \mathcal{D}_x$  tel que  $p_C \neq 0$ , nous avons  $p_C \geq 1/r$ . On en déduit que le nombre d'éléments  $C$  de  $\mathcal{D}_x$  tels que  $p_C \neq 0$  est fini.

En regroupant tous ces arguments, on montre que la fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante en dehors d'un sous-graphe localement fini  $\Gamma_1$  de  $X$ .

Pour démontrer que la fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est continue sur  $X$ , il suffit maintenant de démontrer qu'elle est continue sur  $\Gamma_1$ . On peut alors conclure par la proposition 3.2.2 ou le corollaire 3.3.24.

Nous venons de démontrer le cas particulier suivant du théorème.

**Proposition 3.3.30.** — La fonction  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est continue et localement constante en dehors d'un sous-graphe localement fini de  $X$ .

La démonstration des propriétés voulues pour les rayons supérieurs s'effectue à l'aide d'une récurrence. Supposons qu'elles soient vérifiées pour les rayons de convergence  $\mathcal{R}_1^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)), \dots, \mathcal{R}_{i-1}^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$ . Il existe un graphe localement fini  $\Gamma_{i-1}$  en dehors duquel tous ces rayons sont constants. Quitte à agrandir le graphe  $\Gamma_{i-1}$ , nous pouvons supposer qu'il contient  $\Gamma_X$  et donc que son complémentaire est réunion disjointe de disques ouverts. D'après le corollaire 3.3.27, sur chacun de ces disques, la fonction  $\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  se comporte comme un premier rayon de convergence. Nous pouvons alors appliquer peu ou prou les mêmes arguments que précédemment pour conclure.

### 3.4. Sur une courbe

Nous parvenons enfin à l'exposé de nos propres travaux. Cette section est basée sur l'article [PP12], rédigé en collaboration avec A. Pulita. Rappelons que  $X$  désigne une courbe  $k$ -analytique quasi-lisse.

Comme dans le cas de la droite, tout point  $k$ -rationnel de  $X$  possède un système fondamental de voisinages formé de disques. Il semble donc possible d'adapter la définition du rayon de convergence dans ce contexte. Cependant, on se trouve rapidement confronté à un problème de normalisation des rayons. Dans le cas des domaines analytiques de la droite, celui-ci était résolu par le choix d'une coordonnée sur la droite, mais dans un cadre plus général, aucun outil analogue n'est disponible. La solution proposée par F. Baldassarri dans [Bal10] consiste à choisir des disques maximaux et à normaliser les rayons relativement à ceux-ci. Pour définir ces disques maximaux, il utilise alors un modèle semi-stable de la courbe, mais nous préférons nous appuyer sur le formalisme des triangulations introduit par A. Ducros.

**3.4.1. Triangulations.** — La structure des courbes analytiques quasi-lisse est bien comprise. On peut la décrire de différentes façons. Nous choisissons ici l'approche d'A. Ducros en termes de triangulations (*cf.* [Duc]).

**Définition 3.4.1.** — *On dit qu'une partie  $S$  de  $X$  est une triangulation faible si elle satisfait vérifie les propriétés suivantes :*

- i)  $S$  est localement finie et ne contient que des points de type 2 ou 3;*
- ii) toute composante connexe de  $X \setminus S$  est un disque ouvert ou une couronne ouverte.*

*La réunion des squelettes des composantes connexes de  $X \setminus S$  qui sont des couronnes virtuelles forme un graphe localement fini  $\Gamma(S)$ , appelé squelette de la triangulation faible  $S$ .*

**Remarque 3.4.2.** — Dans la définition de triangulation proposée par A. Ducros, on demande également que les composantes connexes de  $X \setminus S$  soient relativement compactes. Une triangulation d'un disque ouvert ne peut donc être vide, par exemple. Cette définition est moins générale, mais elle présente l'avantage de permettre de définir une rétraction de la courbe  $X$  sur le squelette  $\Gamma_S$  dans tous les cas.

Toute courbe quasi-lisse possède une triangulation, et donc une triangulation faible. Soit  $S$  une triangulation faible de  $X$ .

Soit  $x$  un point rationnel de  $X$ . La composante connexe de  $X \setminus S$  contenant le point  $x$  est un disque ouvert ou une couronne ouverte. Cela a donc un sens de parler du disque maximal contenant le point  $x$  et ne rencontrant pas la triangulation  $S$ .

La définition de rayon de convergence que nous avons donnée pour les domaines analytiques de la droite affine requerrait d'effectuer des extensions du corps de base (*cf.* section 3.1). Il nous faut donc savoir comment se comporte la triangulation  $S$  par une telle extension.

Soit  $L$  une extension valuée complète de  $k$ . Dans la section 2.1, consacrée aux points universels, nous avons vu que tout point  $x$  de  $X$  pouvait être relevé canoniquement en un

point  $x_L$  de  $X_L$ . Si  $E$  est une partie de  $X$ , nous noterons  $E_L$  la partie de  $X_L$  formée de l'ensemble de ses relevés canoniques. Le résultat suivant découle du théorème 2.1.8 sur la structure des fibres d'une extension des scalaires.

**Théorème 3.4.3.** — *Pour toute extension valuée complète  $L$  de  $k$ , l'ensemble  $S_L$  est une triangulation faible de  $X_L$  de squelette  $\Gamma(S_L) = \Gamma(S)_L$ .*

**3.4.2. Rayons de convergence.** — Pour toute la suite du texte, nous fixons une triangulation faible  $S$  de la courbe  $X$ . Nous allons définir un rayon de convergence relatif à cette donnée.

**Définition 3.4.4.** — *Soit  $x \in X$ . Posons  $r = \text{rang}(\mathcal{F}_x)$ . Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Considérons le plus grand disque ouvert  $D_0$  centré en  $x$  et en rencontrant pas la triangulation  $S$  et son plus grand sous-disque  $D_1$  centré en  $x$  sur lequel le fibré à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$  est trivial. Choisissons une coordonnée  $t'$  sur le disque  $D_0$  et notons  $R_0$  et  $R_1$  les rayons des disques  $D_0$  et  $D_1$  mesurés à l'aide de cette coordonnée. On définit alors le  $i^{\text{ème}}$  rayon de convergence relativement à  $S$  de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$ , et l'on note  $\mathcal{R}_{S,i}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ , comme le quotient  $R_1/R_0$ .*

Nous pouvons également définir une notion de rayon de convergence générique.

**Définition 3.4.5.** — *Soit  $x \in X$ . Posons  $r = \text{rang}(\mathcal{F}_x)$ . Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Considérons le plus grand disque ouvert  $D_0$  centré en  $x$  et en rencontrant pas la triangulation  $S$  et son plus grand sous-disque  $D_1$  centré en  $x$  sur lequel le fibré à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$  est trivial. Choisissons une coordonnée  $t'$  sur le disque  $D_0$  et notons  $R_0$  et  $R_1$  les rayons des disques  $D_0$  et  $D_1$  mesurés à l'aide de cette coordonnée. On définit alors le  $i^{\text{ème}}$  rayon de convergence relativement à  $S$  de  $(\mathcal{F}, \nabla)$  en  $x$ , et l'on note  $\mathcal{R}_{S,i}(x, (\mathcal{F}, \nabla))$ , comme le quotient  $R_1/R_0$ .*

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la coordonnée  $t'$  choisie.

Signalons que des liens existent entre les rayons de convergence associés à différentes triangulations faibles. Passer à une triangulation plus fine se fait simplement. Soit  $S'$  une triangulation faible de  $X$  qui contient  $S$ . Pour tout point  $x$  de  $X$ , considérons le plus grand disque ouvert  $E_0$  centré en  $x$  et en rencontrant pas la triangulation  $S$  et son plus grand sous-disque  $E_1$  centré en  $x$  ne rencontrant pas la triangulation  $S'$ . Choisissons une coordonnée  $t'$  sur le disque  $E_0$  et notons  $S_0$  et  $S_1$  les rayons des disques  $E_0$  et  $E_1$  mesurés à l'aide de cette coordonnée. Posons  $\rho_{S',S}(x) = S_1/S_0 \in (0, 1]$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, \text{rang}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$ , nous avons

$$(3.4.1) \quad \mathcal{R}_{S',i}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \min \left( \frac{\mathcal{R}_{S,i}(x, (\mathcal{F}, \nabla))}{\rho_{S',S}(x)}, 1 \right).$$

Pour faire le lien avec les définitions de la section précédente, revenons quelques instants au cas d'un domaine analytique  $X$  de la droite  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  munie d'une coordonnée  $t$ . Un tel espace possède une plus petite triangulation faible, que nous noterons  $S_0$ . Pour tout point  $x$  de  $X$ , notons  $\rho(x)$  le rayon du plus grand disque ouvert centré en  $x$  contenu dans  $X$ .

Supposons que  $X$  n'est pas la droite affine elle-même. Alors, pour tout point  $x$  de  $X$  et tout  $i \in \llbracket 1, \text{rang}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$ , nous avons

$$(3.4.2) \quad \mathcal{R}_{S_0, i}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \frac{\mathcal{R}_i^{\text{pl}}(x, (\mathcal{F}, \nabla))}{\rho(x)}.$$

**3.4.3. De la droite aux courbes.** — Nous souhaitons démontrer un résultat analogue au théorème 3.3.28 d'A. Pulita dans le cas des courbes. Au voisinage d'un point de type 1, 3 ou 4, la courbe  $X$  est isomorphe à un ouvert de la droite affine  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$  et nous pourrions utiliser directement le théorème 3.3.28. Pour les points de type 2, la situation est, en général, plus compliquée. Cependant, il existe toujours, au moins localement, un morphisme étale de  $X$  vers  $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ . Nous allons imposer des propriétés supplémentaires à ce morphisme.

Indiquons quelques points de terminologie. Nous appellerons *branche* issue d'un point  $x$  une direction partant de  $x$ . Pour un morphisme entre courbes, on définit naturellement les notions d'image et d'image réciproque d'une branche. Une section d'une branche est un ouvert connexe  $U$  situé dans la direction prescrite tel que le point  $x$  appartienne à l'adhérence  $\bar{U}$  de  $U$ , mais pas à  $U$  lui-même.

Soit  $x \in X$  un point de type 2 et considérons le corps valué complet  $\mathcal{H}(x)$  qui lui est associé. Son corps résiduel  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  est le corps des fonctions d'une courbe projective lisse et connexe  $\tilde{\mathcal{C}}_x$  sur  $\tilde{k}$ , appelée *courbe résiduelle*. Si le point  $x$  est intérieur à  $X$ , alors les points fermés de  $\tilde{\mathcal{C}}_x$  correspondent bijectivement aux branches issues du point  $x$ .

**Proposition 3.4.6.** — *Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme entre courbes  $k$ -analytiques. Soit  $x \in X$  un point de type 2 et  $b$  une branche issue de  $x$ . Posons  $y = f(x)$  et  $c = f(b)$ . Notons  $\tilde{b}$  (resp.  $\tilde{c}$ ) le point fermé de la courbe résiduelle  $\tilde{\mathcal{C}}_x$  (resp.  $\tilde{\mathcal{C}}_y$ ) associé à  $b$  (resp.  $c$ ). Le degré du morphisme de branches  $b \rightarrow c$  induit par  $f$  est égal à l'indice de ramification du morphisme  $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{C}}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_y$  au point  $\tilde{c}$ .*

Le résultat qui suit ainsi que sa preuve sont inspirés de [Duc, théorème 4.4.4].

**Théorème 3.4.7.** — *Soit  $x \in X$  un point de type 2. Soient  $b_1, \dots, b_t, c$  des branches distinctes issues du point  $x$ . Il existe un voisinage affinoïde  $Y$  de  $x$  dans  $X$ , un domaine affinoïde  $W$  de  $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$  et un morphisme fini étale  $f: Y \rightarrow W$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) le degré de  $f$  est premier à  $p$  ;
- ii)  $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$  ;
- iii) presque toute composante connexe de  $Y \setminus \{x\}$  est un disque ouvert dont le bord est  $\{x\}$  ;
- iv) presque toute composante connexe de  $W \setminus \{f(x)\}$  est un disque ouvert dont le bord est  $\{f(x)\}$  ;
- v) pour presque toute composante connexe  $V$  de  $Y \setminus \{x\}$ , le morphisme induit  $V \rightarrow f(V)$  est un isomorphisme ;
- vi) pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , le morphisme  $f$  induit un isomorphisme entre une section de  $b_i$  et une section de  $f(b_i)$  ;
- vii)  $f^{-1}(f(c)) = \{c\}$ .



*Démonstration.* — L'idée consiste à construire un morphisme  $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{C}}_x \rightarrow \mathbf{P}_k^1$  possédant de bonnes propriétés et à le relever en un morphisme  $f$  d'un voisinage de  $x$  dans  $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ . Nous allons tout d'abord imposer que le degré  $d$  de  $\tilde{f}$  soit premier à  $p$ . La propriété (i). En effet, les points  $x$  et  $f(x)$  étant de type 2, les anneaux locaux en ceux-ci sont des corps. D'après [Ber93, theorem 2.3.3], ces corps sont henséliens. Puisque le corps  $k$  est de caractéristique nulle, l'extension  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^{1,\text{an}},f(x)}$  est séparable et, d'après [Ber93, proposition 2.4.1], nous avons l'égalité

$$[\mathcal{O}_{X,x}: \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^{1,\text{an}},f(x)}] = [\mathcal{H}(x): \mathcal{H}(f(x))].$$

Remarquons que l'on impose facilement la propriété (ii) en restreignant le morphisme  $f$  à un voisinage de  $x$ .

En outre, puisque  $\tilde{k}$  est algébriquement clos, le morphisme  $\tilde{f}$  est alors génériquement étale et donc de degré 1 en presque tout point fermé. La propriété (v) s'ensuit grâce à la proposition 3.4.6. La propriété (iv) est immédiate et elle entraîne la propriété (iii).

Nous allons de nouveau utiliser la proposition 3.4.6 pour montrer les propriétés (vi) et (vii). Il suffit de montrer que l'on peut choisir le morphisme  $\tilde{f}$  de façon qu'il possède un zéro simple en chacun des points  $\tilde{b}_i$  associés aux branches  $b_i$  et un pôle d'ordre  $d = \deg(\tilde{f})$  au point  $\tilde{c}$  associé à la branche  $c$ . C'est l'objet du lemme qui suit.  $\square$

**Lemme 3.4.8.** — *Soit  $C$  une courbe projective lisse et connexe sur un corps. Soient  $x_1, \dots, x_t, y$  des points fermés distincts de  $C$ . Soit  $N, n_1, \dots, n_t$  des entiers. Il existe alors une fonction rationnelle  $g$  sur  $C$  de degré premier à  $N$  qui possède un zéro d'ordre  $n_i$  en chacun des  $x_i$  et un unique pôle, situé au point  $y$ .*

*Démonstration.* — Soit  $d \in \mathbf{N}$ . Considérons les faisceaux

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \mathcal{O}((d-1)(y) - (n_1+1)(x_1) - \dots - (n_t+1)(x_t)) \\ \text{et } \mathcal{F}_2 &= \mathcal{O}(d(y) - n_1(x_1) - \dots - n_t(x_t)). \end{aligned}$$

Le conoyau de l'injection naturelle  $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  est un faisceau gratte-ciel  $\mathcal{G}$  supporté par  $\{x_1, \dots, x_t, y\}$ . Soit  $s$  une section globale de  $\mathcal{G}$  qui ne s'annule en aucun des points du support.

Choisissons  $d$  assez grand de façon à avoir  $H^1(C, \mathcal{F}_1) = 0$ . Nous pouvons également supposer que  $d$  est premier à  $N$ . Nous avons alors une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{F}_1) \rightarrow H^0(C, \mathcal{F}_2) \rightarrow H^0(C, \mathcal{G}) \rightarrow 0.$$

La fonction rationnelle associée à un élément de  $H^0(C, \mathcal{F}_2)$  qui relève  $s$  satisfait les propriétés requises.  $\square$

En utilisant le même type de techniques, on montre que l'on contrôle la façon dont change le rayon de convergence lorsque l'on pousse la connexion par un morphisme de degré premier à  $p$ .

**Proposition 3.4.9.** — *Soit  $Y$  une courbe  $k$ -analytique quasi-lisse. Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme fini étale. Soit  $x$  un point de  $\Gamma_S \cap f^{-1}(\Gamma_T)$  et supposons que le degré  $d =$*

$[\mathcal{H}(x) : \mathcal{H}(f(x))]$  est premier à  $p$ . Alors, pour tous  $i \in \llbracket 1, \text{rk}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , nous avons

$$\mathcal{R}_{T, d(i-1)+j}(f(x), f_*(\mathcal{F}, \nabla)) = \mathcal{R}_{S,i}(x, (\mathcal{F}, \nabla)).$$

*Démonstration.* — Quitte à localiser au voisinage du point  $x$ , nous pouvons supposer que  $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ . Soit  $L$  une extension valuée complète et algébriquement close de  $\mathcal{H}(x)$ . Notons  $f_L$  le morphisme induit par  $f$  après extension du corps de base à  $L$ . Nous avons  $|\mathcal{H}(x_L)^*| = |\mathcal{H}(f(x)_L)^*| = |L^*|$  et les points canoniques  $x_L$  et  $f(x)_L$  sont de type 2. De plus, ils vérifient  $f_L(x_L) = f(x)_L$  et  $[\mathcal{H}(x_L) : \mathcal{H}(f_L(x_L))] = d$ .

Notons  $\tilde{\mathcal{C}}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  les courbes résiduelles aux points  $x_L$  et  $f(x)_L$  respectivement. D'après [Tem10, corollary 6.3.6] ou [Duc, théorème 4.3.17], le corps  $\mathcal{H}(f_L(x_L))$  est stable et nous avons donc

$$[\widetilde{\mathcal{H}(x_L)} : \widetilde{\mathcal{H}(f_L(x_L))}] = [\mathcal{H}(x_L) : \mathcal{H}(f_L(x_L))].$$

Le même raisonnement que celui effectué pour démontrer le point (i) du théorème 3.4.7 assure alors que le morphisme  $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$  induit par  $f$  est de degré premier à  $p$ . On en déduit qu'il est génériquement étale. En reprenant maintenant la preuve du point (v) du théorème 3.4.7, on montre qu'il existe une composante connexe  $D$  de  $\pi_L^{-1}(f(x)) \setminus \{f(x)_L\}$  isomorphe à un disque au-dessus duquel le morphisme  $f_L$  induit un revêtement trivial de degré  $d$ . Notons  $f_L^{-1}(D) = \{D_1, \dots, D_d\}$ .

Le point  $f(x)_L$  appartient à  $\Gamma_{T_L}$  et le disque  $D$  est donc un disque maximal ne rencontrant pas  $T_L$ . De même les disques  $D_1, \dots, D_d$  sont des disques maximaux ne rencontrant pas  $S_L$ . On peut donc calculer les rayons de convergence normalisés par  $T$  et  $S$  dans ces disques. Le résultat s'en déduit.  $\square$

**Remarque 3.4.10.** — Le résultat vaut plus généralement pour des rayons de convergence génériques aux points  $x$  et  $f(x)$ , où le terme « générique » signifie ici que le rayon de convergence en un point  $y$  est calculé dans un disque maximal de la fibre  $\pi_{\mathcal{H}(y)}^{-1}(y)$  (cf. remarque 3.3.8).

**3.4.4. Résultats.** — En combinant les ingrédients précédents, nous démontrons que les résultats du théorème 3.3.28 valent sur toute courbe analytique.

**Théorème 3.4.11.** — Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Il existe un sous-graphe localement fini de  $X$  en dehors duquel la fonction  $\mathcal{R}_{S,i}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est localement constante.

*Démonstration.* — Nous nous contenterons de donner quelques indications. Nous passerons notamment sous silence les problèmes de normalisation dus à l'utilisation d'une triangulation et supprimerons, par conséquent, cette triangulation de nos notations.

Le résultat à démontrer est local et nous pouvons donc nous placer au voisinage d'un point  $x$  de  $X$ . S'il est de type 1, 3 ou 4, il possède un voisinage isomorphe à un ouvert de la droite affine et nous pouvons alors faire appel au théorème 3.3.28.

Supposons maintenant que le point  $x$  est de type 2. Construisons un morphisme fini étale  $f$  d'un voisinage affinoïde  $Y$  de  $x$  vers un domaine affinoïde  $W$  de  $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$  comme dans le théorème 3.4.7 (sans fixer de branches  $b_i$  ou  $c$ ). Il est possible de pousser un fibré

à connexion par un morphisme fini étale et nous allons considérer le fibré à connexion  $(f_*\mathcal{F}, f_*\nabla)$  sur  $W$ . Il est de rang  $dr$ , où  $d$  est le degré de  $f$ . D'après le théorème 3.3.28, il existe un sous-graphe fini  $\Gamma$  de  $W$  en dehors duquel toutes les fonctions  $\mathcal{R}_j(\cdot, (f_*\mathcal{F}, f_*\nabla))$ , avec  $j \in \llbracket 1, dr \rrbracket$ , sont constantes.

Soit  $V$  une composante connexe de  $Y \setminus \{x\}$ . Supposons que  $V$  est isomorphe à un disque ouvert, que  $f$  induit un isomorphisme  $V \rightarrow f(V)$  et que  $f(V) \cap \Gamma = \emptyset$ . Pour tout point  $y$  de  $C$ , le rayon  $\mathcal{R}_i(y, (\mathcal{F}, \nabla))$  est égal à  $\mathcal{R}_j(f(y), (f_*\mathcal{F}, f_*\nabla))$  pour un certain  $j$ . Or la fonction  $\mathcal{R}_i(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est continue sur  $V$ , d'après le théorème 3.3.28, et toutes les fonctions  $\mathcal{R}_j(\cdot, (f_*\mathcal{F}, f_*\nabla))$  sont constantes sur  $f(V)$ . On en déduit que  $\mathcal{R}_i(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante sur  $V$ .

La finitude de  $\Gamma$  et le résultat du théorème 3.4.7 assurent que toutes les composantes connexes de  $Y \setminus \{x\}$  sont du type considéré précédemment à l'exception d'un nombre fini  $W_1, \dots, W_t$ . Considérons les branches  $b_1, \dots, b_t$  associées. On applique alors de nouveau le théorème 3.4.7 avec ces branches distinguées. Le même argument que précédemment montre qu'il existe un voisinage compact  $Y'$  de  $x$  et un sous-graphe fini  $\Gamma'$  de  $Y'$  tels que la fonction  $\mathcal{R}_i(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  soit localement constante sur  $(Y' \cap \bigcup_{1 \leq s \leq t} W_s) \setminus \Gamma'$ . Elle est donc localement constante sur  $Y'$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Une fois le résultat de finitude connu, on en déduit facilement la continuité des rayons de convergence. Pour le premier rayon de convergence, on retrouve ainsi un résultat de F. Baldassarri (cf. [Bal10]).

**Théorème 3.4.12.** — *Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . La fonction  $\mathcal{R}_{S,i}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est continue sur  $X$ .*

*Démonstration.* — Ici, de nouveau, nous ferons abstraction des problèmes liés aux triangulations.

D'après le théorème précédent, la fonction  $\mathcal{R}_{S,i}(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante hors d'un sous-graphe localement fini  $\Gamma$  de  $X$ . Il suffit donc de montrer qu'elle est continue sur ce sous-graphe.

Soit  $x \in \Gamma$ . Comme précédemment, le cas d'un point de type 1, 3 ou 4 se traite à l'aide du théorème 3.3.28.

Supposons donc que le point  $x$  est de type 2 et soit  $c$  une branche partant de  $x$  qui correspond à une arête de  $\Gamma$ . Appliquons le théorème 3.4.7 à cette situation (sans branches  $b_i$ ) : il existe un morphisme fini étale  $f$  d'un voisinage affinoïde  $Y$  de  $x$  vers un domaine affinoïde  $W$  de  $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$  dont le degré  $d$  est premier à  $p$  et qui vérifie  $f^{-1}(f(c)) = \{c\}$ . On conclut alors à l'aide du théorème 3.3.28, qui assure la continuité des  $\mathcal{R}_j(\cdot, f_*(\mathcal{F}, \nabla))$  sur  $W$ , et de la proposition 3.4.9.  $\square$

### 3.5. Une démonstration alternative par la théorie du potentiel

Dans un second travail en commun avec A. Pulita, qui fait l'objet de l'article [PP13], nous avons cherché à donner une démonstration des théorèmes 3.4.11 et 3.4.12 aussi directe que possible. Pour ce faire, nous avons utilisé la théorie du potentiel sur les courbes analytiques en géométrie non archimédienne développée par A. Thuillier dans sa thèse

(cf. [Thu05]). Les résultats que nous obtenons ont trait aux courbes sans bord et au premier rayon de convergence uniquement.

Les arguments reposent sur le fait que ce premier rayon de convergence est une fonction sur-harmonique sur les domaines analytiques de la droite affine et reste proche d'une telle fonction en général.

**3.5.1. Sur-harmonicité du rayon de convergence.** — Comme annoncé, nous allons montrer que la fonction  $\log(\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est proche d'une fonction sur-harmonique. Commençons par le cas simple des points qui n'appartiennent pas à la triangulation.

**Proposition 3.5.1.** — *La fonction  $\log(\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est sur-harmonique sur  $X \setminus S$ .*

*Démonstration.* — Tout point de  $X \setminus S$  possède un voisinage isomorphe à un ouvert de la droite affine. Au voisinage d'un tel point, la fonction  $\log(\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est donc donnée par la formule (3.3.1), éventuellement après renormalisation et troncation pour tenir compte de la triangulation (cf. les formules qui apparaissent à la fin de la section 3.4.2). Ces dernières opérations préservant la sur-harmonicité, la proposition 3.3.4 permet de conclure.  $\square$

Intéressons-nous maintenant à la situation au voisinage des points de la triangulation  $S$ . Pour cela, commençons par adapter la formule (3.3.1) dans un cadre plus général que celui de la droite. Soit  $U$  un domaine analytique de  $X$  sur lequel les faisceaux  $\mathcal{F}$  et  $\Omega_X$  sont libres. Soient  $d$  une dérivation sur  $\mathcal{O}(U)$  et  $G$  la matrice associée au fibré à connexion  $(\mathcal{F}, \nabla)$ . Pour  $n \in \mathbf{N}$ , définissons des matrices  $G_n$  de la même façon qu'avant la formule (3.3.1). Pour  $x \in U$ , on pose

$$(3.5.1) \quad \mathcal{R}^d(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \liminf_{n \geq 1} \left( \left| \frac{G_n(x)}{n!} \right|^{-\frac{1}{n}} \right).$$

**Théorème 3.5.2.** — *Soit  $x$  un point de  $S$  de type 2. Il existe un voisinage affinoïde  $Y$  de  $x$  dans  $X$  sur lequel le faisceau  $\mathcal{F}$  est libre et une dérivation  $d$  sur  $\mathcal{O}(Y)$  tels que presque toute composante connexe de  $Y \setminus \{x\}$  soit un disque ouvert sur lequel on a*

$$\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)) = \min(\mathcal{R}^d(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)), 1).$$

*Démonstration.* — Considérons un morphisme étale  $f: Y \rightarrow W$  comme dans le théorème 3.4.7 (sans  $b_i$  et sans  $c$ ). Quitte à restreindre  $Y$ , on peut supposer que  $\mathcal{F}|_Y$  est libre. Soit  $t$  une coordonnée sur le domaine affinoïde  $W$  de  $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$ . Nous pouvons la choisir de façon que  $f(x)$  soit le point  $\eta_{t,1}$ , l'unique point du bord de Shilov du disque  $\overline{D}(0, 1)$ . Considérons la dérivation  $d$  sur  $Y$  induite par la dérivation  $d/dt$  sur  $W$ . Les propriétés voulues découlent alors de la formule (3.3.1).  $\square$

**Remarque 3.5.3.** — Lorsque le point  $x$  appartient à l'intérieur de  $X$ , on peut également montrer que

$$\mathcal{R}_S(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \min(\mathcal{R}^d(x, (\mathcal{F}, \nabla)), 1).$$

Pour ce faire, on considère une extension valuée complète algébriquement close  $L$  de  $k$  telle qu'il y ait un point  $L$ -rationnel au-dessus de  $x$ . On applique alors le théorème précédent à  $X_L$ . D'après la proposition 3.2.2, la limite en  $x$  de  $\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  le long d'une composante connexe de  $Y_L \setminus \{x\}$  telle que dans l'énoncé ne dépend pas de la composante connexe. Sur une composante connexe contenue dans  $\pi_L^{-1}(x)$ , la fonction est constante égale à  $\mathcal{R}_S(x, (\mathcal{F}, \nabla))$  et le résultat s'en déduit.

**3.5.2. Résultats.** — Soit  $X$  une courbe  $k$ -analytique lisse (et donc sans bord) munie d'une triangulation faible  $S$ . Nous allons maintenant regrouper les résultats précédents pour obtenir une nouvelle démonstration du théorème 3.4.11 pour le premier rayon de convergence dans ce cadre.

Par définition, le complémentaire  $X \setminus S$  est union de disques et de couronnes. Ceux-ci se traitent à l'aide de la proposition 3.3.30. Insistons auprès du lecteur sur le fait que, dans les deux cas qui nous intéressent, la démonstration de cette proposition n'est guère difficile.

Il nous reste à montrer que la fonction  $\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante le long de presque toute branche issue d'un point de  $S$ . Un point de  $S$  de type 3 possède un voisinage isomorphe à une couronne et nous pouvons encore utiliser la proposition 3.3.30. Il nous reste à traiter le cas des points de type 2, ce qui se fait à l'aide du théorème 3.5.2.

**Corollaire 3.5.4.** — *Soit  $x$  un point de  $S$  de type 2. La fonction  $\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))$  est constante sur presque toute composante connexe de  $X \setminus \{x\}$ .*

*Démonstration.* — On sait que presque toute composante connexe de  $X \setminus \{x\}$  est isomorphe à un disque. Dans les directions associées, la pente de la fonction  $\log(\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est de la forme  $m/j$  avec  $m \in \mathbf{N}$  et  $j \in \llbracket 1, \text{rang}(\mathcal{F}_x) \rrbracket$ . En particulier, toute pente non nulle est minorée par  $1/r$ .

D'après le théorème 3.5.2, la fonction  $\log(\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  coïncide avec la fonction  $\min(\log(\mathcal{R}^d(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla))), 0)$  hors d'un nombre fini de directions. Le même raisonnement que celui mis en œuvre dans la preuve de la proposition 3.3.4 montre que cette dernière fonction est sur-harmonique. En utilisant le fait que le laplacien d'une fonction sur-harmonique est une mesure de Radon négative (cf. théorème 3.2.1), et en particulier la continuité d'une telle mesure, on montre que la pente de la fonction  $\log(\mathcal{R}_S(\cdot, (\mathcal{F}, \nabla)))$  est nulle en  $x$  dans presque toute direction. On conclut alors par la proposition 3.3.29.

□

Pour finir, remarquons qu'une fois la propriété de finitude du théorème 3.4.11 connue, le résultat du théorème 3.4.12 sur la continuité du rayon de convergence découle de la proposition 3.2.2 et de la remarque 3.5.3



## BIBLIOGRAPHIE

- [Abb10] Ahmed Abbès. *Éléments de géométrie rigide. Volume I*, volume 286 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010. Construction et étude géométrique des espaces rigides. [Construction and geometric study of rigid spaces], With a preface by Michel Raynaud.
- [AS02] Ahmed Abbès and Takeshi Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields. *Amer. J. Math.*, 124(5) :879–920, 2002.
- [Bal10] Francesco Baldassarri. Continuity of the radius of convergence of differential equations on  $p$ -adic analytic curves. *Invent. Math.*, 182(3) :513–584, 2010.
- [BDV08] Francesco Baldassarri and Lucia Di Vizio. Continuity of the radius of convergence of  $p$ -adic differential equations on Berkovich analytic spaces. arXiv, 2008. <http://arxiv.org/abs/0709.2008>.
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78) :5–161 (1994), 1993.
- [Ber99] Vladimir G. Berkovich. Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible. *Invent. Math.*, 137(1) :1–84, 1999.
- [Ber08] Vladimir Berkovich. Non-Archimedean analytic geometry : first steps. In  *$p$ -adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 1–7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Ber09] Vladimir G. Berkovich. A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 49–67. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

- [BGR84] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [BL93a] Siegfried Bosch and Werner Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces. *Math. Ann.*, 295(2) :291–317, 1993.
- [BL93b] Siegfried Bosch and Werner Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques. *Math. Ann.*, 296(3) :403–429, 1993.
- [BLR95] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem. *Invent. Math.*, 119(2) :361–398, 1995.
- [Bos69] S. Bosch. Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Manuscr. Math.*, 1 :35–57, 1969.
- [Bos77] Siegfried Bosch. Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Räume. *Math. Ann.*, 229(1) :25–45, 1977.
- [BS77] Constantin Bănică and Octavian Stănășilă. *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes. Vol. 2*. Gauthier-Villars, Paris, 1977. Troisième édition, Traduit du roumain, Collection “Varia Mathematica”.
- [CD94] G. Christol and B. Dwork. Modules différentiels sur les couronnes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44(3) :663–701, 1994.
- [Chr12] Gilles Christol. Le théorème de Turrittin  $p$ -adique, 2012. <http://www.math.jussieu.fr/~christol/courspdf.pdf>.
- [DR77] B. Dwork and P. Robba. On ordinary linear  $p$ -adic differential equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 231 :1–46, 1977.
- [Duc] Antoine Ducros. La structure des courbes analytiques. <http://www.math.jussieu.fr/~ducros/trirss.pdf>.
- [Duc03] Antoine Ducros. Parties semi-algébriques d’une variété algébrique  $p$ -adique. *Manuscripta Math.*, 111(4) :513–528, 2003.
- [Duc09] Antoine Ducros. Les espaces de Berkovich sont excellents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(4) :1443–1552, 2009.
- [Elk12] Noam D. Elkies. Degree of generators of irreducible components. MathOverflow, 2012. <http://mathoverflow.net/questions/92520>.
- [Epp73] Helmut P. Epp. Eliminating wild ramification. *Invent. Math.*, 19 :235–249, 1973.
- [Fav11] Charles Favre. Countability properties of some Berkovich spaces. arXiv, 2011. <http://arxiv.org/abs/1103.6233>.



- [FK13] Kazuhiro Fujiwara and Fumiharu Kato. Foundations of rigid geometry I. arXiv, 2013. <http://arxiv.org/abs/1308.4734>.
- [Fra65] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice. *Fund. Math.*, 57 :107–115, 1965.
- [Fri67] Jacques Frisch. Points de platitude d’un morphisme d’espaces analytiques complexes. *Invent. Math.*, 4 :118–138, 1967.
- [GD66] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28) :255, 1966.
- [GR04] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.
- [Har88] David Harbater. Galois covers of an arithmetic surface. *Amer. J. Math.*, 110(5) :849–885, 1988.
- [HL10] Ehud Hrushovski and François Loeser. Non-archimedean tame topology and stably dominated types. arXiv, 2010. <http://arxiv.org/abs/1009.0252>.
- [Hub93] Roland Huber. Continuous valuations. *Math. Z.*, 212(3) :455–477, 1993.
- [Hub94] Roland Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Math. Z.*, 217(4) :513–551, 1994.
- [Kat87] Nicholas M. Katz. A simple algorithm for cyclic vectors. *Amer. J. Math.*, 109(1) :65–70, 1987.
- [Ked10] Kiran S. Kedlaya. *p-adic differential equations*, volume 125 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Nic11] Johannes Nicaise. Singular cohomology of the analytic Milnor fiber, and mixed Hodge structure on the nearby cohomology. *J. Algebraic Geom.*, 20(2) :199–237, 2011.
- [Poi08] Jérôme Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques  $p$ -adiques : privilège et noethérianité. *Compos. Math.*, 144(1) :107–133, 2008.
- [Poi10a] Jérôme Poineau. La droite de Berkovich sur  $\mathbf{Z}$ . *Astérisque*, (334) :xii+284, 2010.
- [Poi10b] Jérôme Poineau. Raccord sur les espaces de Berkovich. *Algebra Number Theory*, 4(3) :297–334, 2010.
- [Poi13a] Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur  $\mathbf{Z}$  : étude locale. *Invent. Math.*, 2013. À paraître.

- [Poi13b] Jérôme Poineau. Les espaces de Berkovich sont angéliques. *Bull. Soc. Math. France*, 141(2) :267–297, 2013.
- [Poi13c] Jérôme Poineau. Polynomial approximation of Berkovich spaces and definable types. *Math. Ann.*, 2013. À paraître.
- [Pop86] Dorin Popescu. General Néron desingularization and approximation. *Nagoya Math. J.*, 104 :85–115, 1986.
- [PP12] Jérôme Poineau and Andrea Pulita. The convergence Newton polygon of a  $p$ -adic differential equation II : Continuity and finiteness on Berkovich curves. arXiv, 2012. <http://arxiv.org/abs/1209.3663>.
- [PP13] Jérôme Poineau and Andrea Pulita. Continuity and finiteness of the radius of convergence of a  $p$ -adic differential equation *via* potential theory. *J. Reine Angew. Math.*, 2013. À paraître.
- [Pul12] Andrea Pulita. The convergence Newton polygon of a  $p$ -adic differential equation I : Affinoid domains of the Berkovich affine line. arXiv, 2012. <http://arxiv.org/abs/1208.5850>.
- [Ray74] Michel Raynaud. Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl, . . . . In *Table Ronde d’Analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, pages 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. Soc. Math. France, Paris, 1974.
- [Rob56] Abraham Robinson. *Complete theories*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.
- [Tat71] John Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12 :257–289, 1971.
- [Tat95] John Tate. A review of non-Archimedean elliptic functions. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 162–184. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [Tem04] Michael Temkin. On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II. *Israel J. Math.*, 140 :1–27, 2004.
- [Tem10] Michael Temkin. Stable modification of relative curves. *J. Algebraic Geom.*, 19(4) :603–677, 2010.
- [Thu05] Amaury Thuillier. *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d’Arakelov*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2005. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010990/fr/>.



Les dernières années ont vu émerger différents points de vue sur les espaces analytiques  $p$ -adiques. Ce texte est consacré spécifiquement à celui qu'a introduit Vladimir G. Berkovich à la fin des années quatre-vingt, et qui s'est révélé l'un des plus féconds. Nous en aborderons différents aspects. Dans la première partie du manuscrit, nous dépasserons le cadre  $p$ -adique pour nous intéresser aux espaces analytiques globaux : ceux qui sont définis sur  $\mathbb{Z}$  ou les anneaux d'entiers de corps de nombres. Nous prouverons qu'ils jouissent, au moins localement, de propriétés analogues à celles des espaces analytiques complexes classiques. Par la suite, nous nous tournerons vers les espaces  $p$ -adiques pour étudier leur topologie et démontrer plusieurs résultats de modération. Finalement, nous présenterons quelques applications aux équations différentielles  $p$ -adiques sur les courbes analytiques et expliquerons notamment pourquoi leur comportement est contrôlé par un graphe localement fini.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

UMR 7501

Université de Strasbourg et CNRS

7 Rue René Descartes

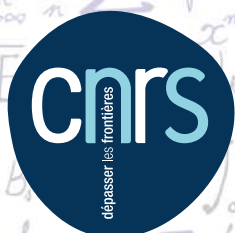
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29

Fax 03 68 85 03 28

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)

[irma@math.unistra.fr](mailto:irma@math.unistra.fr)



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



Institut de Recherche  
Mathématique Avancée

ISSN 0755-3390

IRMA 2013/008

<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00871134>