
DYNAMIQUE ANALYTIQUE SUR \mathbf{Z} . II : ÉCART UNIFORME ENTRE LATTÈS ET CONJECTURE DE BOGOMOLOV-FU-TSCHINKEL.

par

Jérôme Poineau

Résumé. — Nous montrons que l'énergie mutuelle (ou le produit d'intersection au sens de la théorie d'Arakelov) de deux systèmes dynamiques associés à des morphismes de Lattès sur $\bar{\mathbf{Q}}$ est uniformément minorée et en déduisons une preuve d'une conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel : le nombre d'images communes de points de torsion de deux courbes elliptiques sur \mathbf{C} non isomorphes par un morphisme standard vers la droite projective est uniformément borné.

La démonstration repose de façon essentielle sur la théorie des espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} et sur un argument original permettant d'obtenir une estimation globale à partir d'une estimation centrale (au-dessus d'un corps trivialement valué).

Abstract (Analytic dynamics over \mathbf{Z} . II: Uniform gap between Lattès and conjecture of Bogomolov-Fu-Tschinkel.)

We prove that the mutual energy (or the intersection product in the sense of Arakelov theory) of two dynamical systems associated to Lattès morphisms over $\bar{\mathbf{Q}}$ is uniformly bounded below and deduce a proof of a conjecture of Bogomolov-Fu-Tschinkel: the number of common images of torsion points of two non-isomorphic elliptic curves over \mathbf{C} by a standard morphism to the projective line is uniformly bounded.

The proof crucially relies on the theory of Berkovich spaces over \mathbf{Z} and on an original argument allowing to obtain a global estimate from a central estimate (over a trivially valued field).

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Espaces de Berkovich sur les entiers.....	11
3. Énergie mutuelle de deux mesures.....	13
4. Morphismes de Lattès.....	26
5. Estimations centrale et globale.....	30
6. Minoration de l'énergie mutuelle globale.....	36
7. Retour aux courbes elliptiques.....	43
Références.....	45

Classification mathématique par sujets (2020). — 11G05, 11G50, 37P50, 37P15, 14G22.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} , morphismes de Lattès, courbes elliptiques, points de torsion, énergie mutuelle, théorie d'Arakelov.

1. Introduction

Nous poursuivons ici l'étude des systèmes dynamiques dans le cadre des espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} initiée dans [Poi22] et en tirons quelques applications arithmétiques. Nous proposons en particulier une preuve du résultat suivant, qui résout par l'affirmative une conjecture due à F. Bogomolov, H. Fu et Yu. Tschinkel (cf. [BFT18, conjectures 2 et 12]).

Théorème A (*infra* corollaire 7.4). — *Il existe $M \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour toutes courbes elliptiques E_a et E_b sur \mathbf{C} et tous revêtements doubles $\pi_a: E_a \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ et $\pi_b: E_b \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ tels que $\pi_a(E_a[2]) \neq \pi_b(E_b[2])$, on ait*

$$\sharp(\pi_a(E_a[\infty]) \cap \pi_b(E_b[\infty])) \leq M.$$

Notre stratégie s'inspire directement de celle mise en œuvre dans [DKY20], où L. DeMarco, H. Krieger et H. Ye démontrent le théorème A pour des courbes elliptiques E_a et E_b , ou plutôt des paires (E_a, π_a) et (E_b, π_b) , appartenant à la famille de Legendre. Il s'agit d'une approche de nature dynamique.

Rappelons qu'à toute paire (E, π) comme ci-dessus, on peut associer un endomorphisme L de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, dit de Lattès, caractérisé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{[2]} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 & \xrightarrow{L} & \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \end{array} .$$

L'ensemble $\pi(E[\infty])$ coïncide alors avec l'ensemble des points prépériodiques de L . Il s'agit donc de comparer les systèmes dynamiques associés à deux morphismes de Lattès distincts sur \mathbf{P}^1 .

Si l'on remplace le corps des nombres complexes \mathbf{C} par le corps des nombres algébriques $\overline{\mathbf{Q}}$, on dispose d'outils arithmétiques qui permettent d'aborder le problème. En particulier, la théorie d'Arakelov permet d'associer à deux systèmes dynamiques φ_a et φ_b sur \mathbf{P}^1 un nombre réel positif $\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle^{(1)}$, qui se comporte comme une distance (ou plutôt son carré). Dans le cas des morphismes de Lattès associés à la multiplication par 2, cette distance est uniformément minorée.

Théorème B (*infra* théorèmes 6.8 et 7.1). — *Il existe $m_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour tous morphismes de Lattès $L_a \neq L_b$ sur $\overline{\mathbf{Q}}$ comme ci-dessus, on ait*

$$\langle L_a, L_b \rangle \geq m_0.$$

Ce résultat propose une explication conceptuelle à la conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel. C'est un ingrédient crucial dans notre preuve du théorème A.

La démonstration du théorème B fait intervenir une minoration globale par une hauteur, que nous déduisons d'une minoration « centrale », au-dessus d'un corps trivialement valué.

1.1. Ingrédients. — Le théorème B porte sur des paires de morphismes de Lattès associés à la multiplication par 2. Pour le démontrer, nous nous plaçons sur un espace de modules convenable \mathcal{Y} . Décrivons-le ici en quelques mots.

⁽¹⁾Il s'agit précisément du produit d'intersection des premières classes de Chern des fibrés métrisés associés à φ_a et φ_b .

Les applications de Lattès L_a et L_b (et même les couples (E_a, π_a) et (E_b, π_b) , à isomorphisme près), sont déterminés par la donnée des ensembles images de la 2-torsion $\pi_a(E_a[2])$ et $\pi_b(E_b[2])$. Chacun d'eux possède exactement quatre points dans $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$, disons a_1, a_2, a_3, a_4 pour $\pi_a(E_a[2])$ et b_1, b_2, b_3, b_4 pour $\pi_b(E_b[2])$. L'espace de modules correspondant est donc, *a priori*, de dimension 8.

À l'aide d'homographies, on peut se ramener à un espace de dimension $5 = 8 - 3$. Le procédé classique consisterait à envoyer trois des points précédents sur $0, 1, \infty$. Afin de ne pas briser la symétrie, nous préférons ne fixer que deux des points (a_4 en ∞ et b_4 en 0) et garder le degré de liberté supplémentaire pour travailler à homothétie près. En d'autres termes, l'espace de module \mathcal{Y} que nous considérons est un sous-espace de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^5$ avec coordonnées homogènes $[a_1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3]$. (Nous excluons la caractéristique 2 pour des raisons liées à la définition des morphismes de Lattès considérés.)

Un outil fondamental utilisé dans ce texte est l'énergie mutuelle $\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle$. Nous l'introduisons ici rapidement, en suivant la présentation qu'en donnent Ch. Favre et J. Rivera-Letelier dans [FR06].

Plaçons-nous tout d'abord dans le cadre complexe. Pour deux mesures μ_a et μ_b suffisamment régulières sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on pose

$$\langle \mu_a, \mu_b \rangle := - \int_{\mathbf{C}^2 \setminus \text{Diag}} \log(|x - y|) d(\mu_a - \mu_b)(x) \otimes d(\mu_a - \mu_b)(y).$$

On peut définir de même une énergie mutuelle sur tout corps ultramétrique complet k en remplaçant $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par la droite projective $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$ au sens de Berkovich et en généralisant convenablement la valeur absolue $|x - y|$.

Du côté global, étant donné un corps de nombres K , avec un ensemble de places noté M_K , et deux familles de mesures suffisamment régulières $\mu_a = (\mu_{a,v})_{v \in M_K}$ et $\mu_b = (\mu_{b,v})_{v \in M_K}$, on pose

$$\langle \mu_a, \mu_b \rangle = \sum_{v \in M_K} N_v \langle \mu_{a,v}, \mu_{b,v} \rangle,$$

où les N_v sont des constantes de normalisation.

Dans le cadre qui nous intéresse, des familles de mesures naturelles sont fournies par la théorie des systèmes dynamiques. Soient L_a et L_b des morphismes de Lattès sur \mathbf{P}_K^1 . Pour $v \in M_K$, notons $\mu_{a,v}$ (resp. $\mu_{b,v}$) la mesure d'équilibre associée à L_a (resp. L_b) sur $\mathbf{P}_{K_v}^{1, \text{an}}$ ou $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, en fonction du type, fini ou infini, de la place considérée. Rappelons que ces mesures sont essentiellement caractérisées par les propriétés

$$L_a^* \mu_{a,v} = 4 \mu_{a,v} \text{ et } L_b^* \mu_{b,v} = 4 \mu_{b,v},$$

les morphismes L_a et L_b étant ici de degré 4. On pose alors

$$\langle L_a, L_b \rangle := \langle (\mu_{a,v})_{v \in M_K}, (\mu_{b,v})_{v \in M_K} \rangle.$$

Mentionnons que l'énergie mutuelle permet de retrouver certaines hauteurs classiques. En effet, soit F un ensemble fini de \bar{K} invariant par $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Pour $v \in M_K$, notons $[F]_v$ la mesure sur $\mathbf{P}_{K_v}^{1, \text{an}}$ ou $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ provenant de la mesure de probabilité équi-distribuée sur les images des points de F dans $\mathbf{P}^1(\bar{K}_v)$ ou $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On a alors

$$\langle L_a, [F] \rangle := \langle (\mu_{a,v})_{v \in M_K}, ([F]_v)_{v \in M_K} \rangle = h_{L_a}(F),$$

où le membre de droite désigne la hauteur dynamique de F associée à L_a . En particulier, on peut retrouver les points prépériodiques de L_a comme le lieu d'annulation de $\langle L_a, [\cdot] \rangle$.

1.2. Stratégie de la preuve du théorème B. — Le théorème B constitue, selon nous, le résultat le plus important de ce texte. La stratégie que nous mettons en œuvre pour le démontrer présente un intérêt propre et nous l'exposons ici en détail. Le principe général s'en exprime simplement : les invariants arithmétiques globaux possèdent des analogues, que nous qualifierons de *centraux*, définis en valuation triviale et où se reflète leur comportement.

Nous appliquons ici ce principe à l'énergie globale $\langle L_a, L_b \rangle$. Le point de départ est la décomposition en somme de facteurs locaux :

$$\langle L_a, L_b \rangle = \sum_{v \in M_K} N_v \langle L_{a,v}, L_{b,v} \rangle,$$

où K est un corps de nombres sur lequel L_a et L_b sont définis.

La stratégie se décompose en 3 étapes. La première et la dernière sont générales et pourraient s'appliquer dans bien d'autres situations. La deuxième, en revanche, est spécifique au problème considéré.

► **Étape 1 : du discret au continu.**

La première étape consiste à compléter la famille discrète $(\langle L_a, L_b \rangle_v)_{v \in M_K}$ en une famille continue. Pour ce faire, nous aurons recours à la théorie des espaces de Berkovich sur les anneaux de Banach et, plus précisément ici, sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K du corps de nombres K . Elle a été esquissée par V. Berkovich dans [Ber90], développée plus en détails par l'auteur dans [Poi10, Poi13] en ce qui concerne les aspects algébriques, puis par l'auteur en collaboration avec Th. Lemanissier dans [LP20] en ce qui concerne les aspects topologiques et cohomologiques. Des détails figurent dans [Poi22, section 2].

Rappelons que le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ est défini comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur \mathcal{O}_K . Il contient donc les valeurs absolues normalisées $|\cdot|_v$ pour $v \in M_K$, ainsi que beaucoup d'autres points, par exemple les puissances de ces valeurs absolues ou encore la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$ (envoyant tout élément non nul sur 1). Du point de vue topologique, l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ possède de bonnes propriétés : séparation, compacité locale et globale, connexité par arcs locale et globale. La topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ est de nature adélique et, bien qu'étant fermé, le point central $|\cdot|_0$ se comporte comme une sorte de point générique, au sens où ses voisinages sont très gros (cf. figure 1).

La définition d'énergie locale proposée par Ch. Favre et J. Rivera–Letelier est remarquablement générale et fait sens sur tout corps valué complet. Pour tout point x de $\mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$ (à l'exception de ceux de caractéristique 2 pour des raisons spécifiques aux morphismes de Lattès considérés), on peut donc définir la quantité $\langle L_{a,x}, L_{b,x} \rangle$ comme l'énergie mutuelle locale des endomorphismes induits par L_a et L_b sur la droite projective de Berkovich sur le corps $\mathcal{H}(x)$ associé à x . (Si la semi-norme $|\cdot|_x$ associée à x est une valeur absolue, $\mathcal{H}(x)$ n'est autre que le complété de K par rapport à $|\cdot|_x$.)

D'après [Poi22, corollaire D], la fonction

$$x \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_K) \setminus V(2) \longmapsto \langle L_{a,x}, L_{b,x} \rangle \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

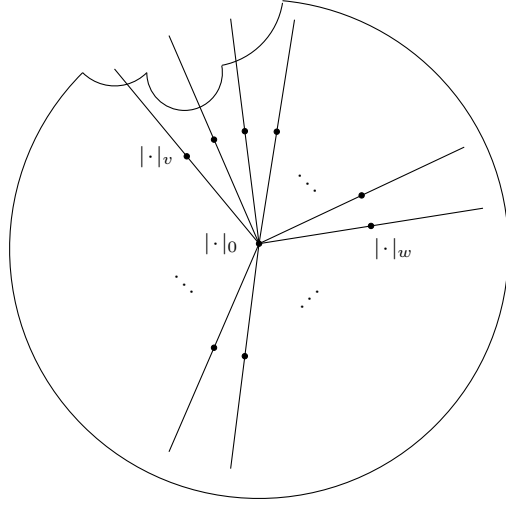


FIGURE 1. Un voisinage de $|\cdot|_0$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{O}_K)$.

est continue. On peut donc se faire une idée du comportement de la famille $(\langle L_{a,v}, L_{b,v} \rangle)_{v \in M_K}$ en étudiant le comportement de la quantité centrale correspondante $\langle L_{a,0}, L_{b,0} \rangle$ au-dessus de $|\cdot|_0$.

Dans la suite de ce texte, nous étudions la famille $(\langle L_{a,v}, L_{b,v} \rangle)_{v \in M_K}$ en faisant varier non seulement v , comme ci-dessus, mais également le couple (L_a, L_b) . À cet effet, nous travaillerons sur l'espace de modules \mathcal{Y} (défini sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$) mentionné au début de la section 1.1. Comme on s'y attend, il possède un analytifié Y (sur $\mathcal{M}(\mathbf{Z}) \setminus V(2)$). La propriété de continuité de l'énergie énoncée plus haut reste valable dans ce cadre.

Théorème C (*infra* théorème 4.10). — *La fonction*

$$(a, b, x) \in Y \longmapsto \langle L_{a,x}, L_{b,x} \rangle \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est continue.

► **Étape 2 : minoration centrale.**

Dans la deuxième étape, nous minorons l'énergie mutuelle $\langle L_{a,0}, L_{b,0} \rangle$ de deux applications de Lattès $L_{a,0}$ et $L_{b,0}$ centrales, c'est-à-dire correspondant à un point de Y au-dessus de $|\cdot|_0$. Elles sont définies sur un certain corps valué k , qui est une extension de $(\mathbf{Q}, |\cdot|_0)$.

Dans ce cadre, plusieurs simplifications se produisent, et la théorie peut être rendue explicite. On sait par exemple décrire les mesures d'équilibre associées à $L_{a,0}$ et $L_{b,0}$: elles sont proportionnelles aux mesures de Lebesgue sur deux segments $I_{a,0}$ et $I_{b,0}$ contenus dans $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$. La théorie de Favre-Rivera-Letelier se prête également très bien à des calculs concrets. Nous obtenons finalement les expressions générales suivantes (*cf.* figure 2 pour les notations).

Théorème D (*infra* théorèmes 3.21 et 3.25). — *Si $I_{a,0} \cap I_{b,0} = \emptyset$, on a*

$$\langle L_{a,0}, L_{b,0} \rangle = \frac{1}{6} \ell_a + \frac{1}{6} \ell_b + \frac{1}{2} d_{ab} - \frac{1}{2} \frac{\ell'_a \ell''_a}{\ell_a} - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b}.$$

Si $I_{a,0} \cap I_{b,0} \neq \emptyset$, on a

$$\langle L_{a,0}, L_{b,0} \rangle = \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}\ell_b - \ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell'_a\ell''_a}{\ell_a} - \frac{1}{2}\frac{\ell'_b\ell''_b}{\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{(\ell'_a\ell'_b + \ell''_a\ell''_b)\ell_{ab}}{\ell_a\ell_b}.$$

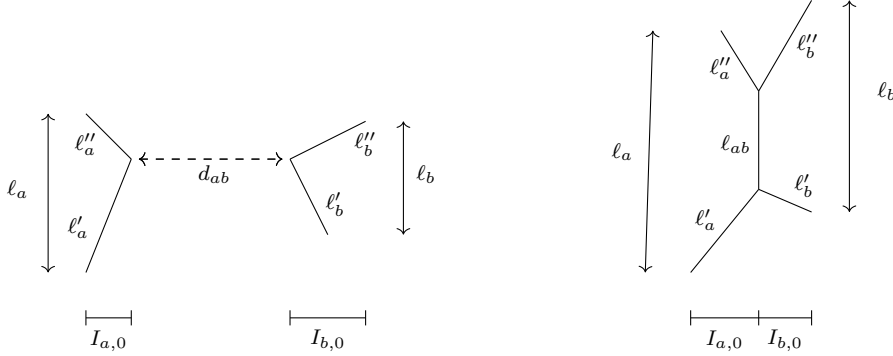


FIGURE 2. Configurations de $I_{a,0}$ et $I_{b,0}$.

Nous souhaitons disposer d'une minoration de $\langle L_{a,0}, L_{b,0} \rangle$ sur toute la partie Y_0 de l'espace de modules Y située au-dessus de $|\cdot|_0$. À cause de la nature ultramétrique du corps $(\mathbf{Q}, |\cdot|_0)$, l'énergie $\langle L_a, L_b \rangle_0$ peut être nulle même lorsque les morphismes $L_{a,0}$ et $L_{b,0}$ sont distincts. Il est donc vain de chercher à la minorer par une constante strictement positive. Nous parvenons, en revanche, à la minorer par une expression dépendant de paramètres a_i, b_j ($1 \leq i, j \leq 3$) décrivant Y , de la forme

$$\langle L_{a,0}, L_{b,0} \rangle \geq F(\log(|a_i|), \log(|b_j|), 1 \leq i, j \leq 3),$$

sous certaines conditions peu contraignantes.

► Étape 3 : du central au global.

Dans la troisième étape, nous minorons l'énergie mutuelle globale $\langle L_a, L_b \rangle$ de deux applications de Lattès L_a et L_b associées à la multiplication par 2.

Nous commençons par démontrer un résultat technique permettant de passer d'une minoration centrale, c'est-à-dire au-dessus de $|\cdot|_0$, à une minoration similaire en presque toute place, en nous appuyant sur le caractère adélique de la topologie de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, et une minoration plus faible en les places restantes.

Un ingrédient essentiel est l'application *flot* qui, pour $\varepsilon \in]0, 1]$ envoie un point x associé à une semi-norme $|\cdot|_x$ sur le point x^ε associé à la semi-norme $|\cdot|_x^\varepsilon$. On dit qu'un espace de Berkovich V est flottant s'il est stable par le flot. On dit qu'une fonction $g: V \rightarrow \mathbf{R}$ est log-flottante si, pour tous $x \in V$ et $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $g(x^\varepsilon) = \varepsilon g(x)$. Des exemples typiques sont les fonctions $\log(|a_i|)$, $\log(|b_j|)$, ou encore $x \mapsto \langle L_{a,x}, L_{b,x} \rangle$.

Lemme E (*infra* lemme 5.1). — Soient V un espace de Berkovich sur \mathbf{Z} flottant et $\mathcal{E}, f_1, f_2 \in \mathcal{C}(V, \mathbf{R})$ des fonctions continues log-flottantes. Notons $\text{pr}: V \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{Z})$ la projection canonique et supposons qu'elle est presque surjective. Supposons qu'il existe $s_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que

- i) l'application $\text{pr}|_{\{f_1=s_0\}}$ est propre ;
- ii) on a $\mathcal{E} \geq f_2$ sur $\{f_1 = s_0\} \cap \text{pr}^{-1}(|\cdot|_0)$.

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $t_\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$ et un ensemble fini P_α de nombres premiers tels que

$$\forall p \notin P_\alpha \cup \{\infty\}, \mathcal{E} \geq -\frac{\alpha}{s_0} f_1 + f_2 \text{ sur } \{f_1 > 0\} \cap \text{pr}^{-1}(|\cdot|_p)$$

et

$$\forall p \in P_\alpha \cup \{\infty\}, \mathcal{E} \geq -\frac{\alpha}{s_0} f_1 + f_2 \text{ sur } \{f_1 > t_\alpha\} \cap \text{pr}^{-1}(|\cdot|_p).$$

En sommant sur les places, on obtient une minoration globale par une fonction de type hauteur (cf. théorème 5.4 et corollaire 5.7). Dans notre cas, en partant de la minoration centrale obtenue à l'étape 2, on parvient au résultat suivant.

Théorème F (infra théorème 6.5). — *Il existe $C \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D \in \mathbf{R}$ telles que, pour tous morphismes de Lattès $L_a \neq L_b$ sur $\overline{\mathbf{Q}}$ comme précédemment, on ait*

$$\langle L_a, L_b \rangle \geq C h([a : b]) + D,$$

où $h([a : b])$ désigne la hauteur logarithmique du point de l'espace projectif de coordonnées homogènes $[a_1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3]$.

Un raisonnement par l'absurde entraîne alors la minoration absolue du théorème B. En effet, supposons l'existence d'une suite de points dont l'énergie globale associée tend vers 0. Pour des indices assez grands, l'énergie archimédienne de ces points est strictement positive, mais petite, donc ces points se rapprochent du bord de l'espace de modules. Cette propriété peut se traduire en termes de la valeur absolue archimédienne des coordonnées, par exemple par le fait qu'elles soit très petite (ou d'autres façons qui se traitent de même). La formule du produit impose alors aux valeurs absolues ultramétriques d'être très grandes, donc à la hauteur d'être très grande et l'on aboutit à une contradiction.

Afin d'insister sur le caractère très général et aisément reproductible de la stratégie présentée ici, et notamment des étapes 1 et 3, nous indiquons également comment obtenir un analogue du théorème F pour des systèmes dynamiques de la forme $P_c: z \mapsto z^2 + c$ avec $c \in \overline{\mathbf{Q}}$. Ce résultat, avec des constantes explicites, a été établie par L. DeMarco, H. Krieger et H. Ye dans [DKY22]. Nous nous appuyons sur leurs calculs pour obtenir la minoration centrale nécessaire à notre étape 2. Le résultat s'obtient alors en quelques lignes, grâce au lemme E.

Théorème G (infra remarque 6.7). — *Il existe $C' \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D' \in \mathbf{R}$ telles que, pour tous $c \neq d \in \overline{\mathbf{Q}}$, on ait*

$$\langle P_c, P_d \rangle \geq C' h(c, d) + D',$$

où $h(c, d)$ désigne la hauteur logarithmique usuelle sur $\overline{\mathbf{Q}}^2$.

Une minoration du type de celle du théorème B s'en déduit sans peine par un argument similaire à celui esquissé plus haut dans le cas des morphismes de Lattès. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [DKY22] pour des conséquences en termes de majoration uniforme de nombre de points prépériodiques communs, dans la lignée du théorème A.

1.3. Application à la conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel. — Nous avons déjà indiqué plus haut que l'énergie mutuelle se comportait essentiellement comme le carré d'une distance. En appliquant ce principe à partir de deux morphismes de Lattès L_a et L_b sur un corps de nombres K et d'un ensemble fini F de

points de \bar{K} stable par $\text{Gal}(\bar{K}/K)$, on obtient la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} \delta_0^{1/2} &\leq \langle L_a, L_b \rangle^{1/2} \\ &\leq \langle L_a, [F] \rangle^{1/2} + \langle L_b, [F] \rangle^{1/2} + \text{terme d'erreur} \\ &\leq h_{L_a}(F)^{1/2} + h_{L_b}(F)^{1/2} + \text{terme d'erreur.} \end{aligned}$$

Dans le cadre de la conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel, où F est composé de points prépériodiques à la fois pour L_a et L_b , les hauteurs dynamiques sont nulles et seul subsiste le terme d'erreur. C'est donc lui qu'il faut estimer.

On peut y parvenir en utilisant, de nouveau, une stratégie du central au global généralisant celle mise en œuvre dans [DKY20, section 7]. Par des techniques de potentiels Hölder, Thomas Gauthier a obtenu un résultat plus général, valable pour des familles arbitraires de systèmes dynamiques sur \mathbf{P}^1 (cf. [Gau23]). Dans notre contexte, il s'énonce ainsi.

Théorème H (infra théorème 7.2). — *Il existe $C_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $\delta \in]0, 1[$, on ait*

$$\langle L_a, L_b \rangle \leq 4 \max(h_{L_a}(F), h_{L_b}(F)) + C_1 \left(\delta - \frac{\log(\delta)}{\#F} \right) (h([a : b]) + 1).$$

Pour un choix de δ adéquat, on peut combiner cette inégalité avec celle des théorèmes B (pour les points de petite hauteur) et F (pour les points de grande hauteur) pour obtenir la majoration absolue de $\#F$ désirée.

1.4. Autres approches. — Soulignons de nouveau que notre stratégie suit fidèlement celle proposée par L. DeMarco, H. Krieger et H. Ye dans [DKY20], pour traiter le cas de courbes elliptiques E_a et E_b sous forme de Legendre. En particulier, l'idée de passer par la succession de théorèmes B, F, H pour aboutir à la conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel leur est due.

Indiquons plus précisément les différences entre notre travail et [DKY20]. La principale concerne la dimension de l'espace de modules considéré. Le fait d'imposer aux courbes E_a et E_b d'être sous forme de Legendre permet de fixer trois des paramètres pour chaque courbe (en 0, 1, ∞ par convention) et laisse donc seulement deux variables libres (au lieu de 5 dans le cas général). En outre, dans une grande partie de [DKY20], c'est le quotient des paramètres qui intervient, et l'étude porte alors sur un espace de dimension 1, cadre dans lequel existent de nombreuses techniques spécifiques. À titre d'exemple, on peut citer les dégénérescences de mesures, étudiées par Ch. Favre sur un disque hybride dans [Fav20], et que nous avons généralisés à une base arbitraire dans [Poi22]. Elles sont au cœur de l'étape 1.

Des différences interviennent également dans l'étape 2, où la combinatoire des segments I_a et I_b se complique de façon sensible. En effet, dans [DKY20], le fait d'imposer trois coordonnées communes force les deux segments à être soit alignés, soit inclus l'un dans l'autre. Par conséquent, seul le second cas du théorème D intervient et les trois derniers termes de la formule disparaissent.

Dans l'étape 3, l'approche est plus radicalement différente. Dans [DKY20], les énergies mutuelles sont calculées explicitement en valuation triviale et à chaque place ultramétrique, en traitant à part le cas de la valuation 2-adique. Du côté archimédien, l'énergie mutuelle est estimée à partir de celle en valuation triviale par des techniques de dégénérescence basées sur [Fav20]. Dans ce texte, nous effectuons un unique calcul

en valuation triviale et en tirons directement des informations en toute place en nous appuyant sur [Poi22] (que l'on peut voir comme un analogue global de [Fav20]).

Indiquons finalement d'autres approches, plus indirectes, au théorème A. Elles nous ont été signalées par L. DeMarco, que nous remercions ici. Les techniques employées y sont de nature fondamentalement différente des nôtres, algébriques et arithmétiques plutôt qu'analytiques et dynamiques, même si les champs d'applications se recourent parfois, comme ici. .

Dans leur article [BT07], F. Bogomolov et Yu. Tschinkel démontrent que l'intersection $\pi_a(E_a[\infty]) \cap \pi_b(E_b[\infty])$ est finie *via* la conjecture de Manin-Mumford (démontrée par M. Raynaud dans [Ray83]) appliquée à la courbe de $E_a \times E_b$ obtenue comme image réciproque de la diagonale de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ par $\pi_a \times \pi_b$. En effectuant cette construction de façon relative sur l'espace de modules \mathcal{Y} , on obtient une courbe relative \mathcal{C} dans un espace fibré en produits de courbes elliptiques. Après quelques vérifications d'apparence routinière, la version de la conjecture de Bogomolov relative démontrée par L. Kühne dans [Küh21] devrait permettre de conclure que l'ensemble des points de torsion contenus dans \mathcal{C} n'est pas Zariski-dense, et d'en déduire le théorème A. De façon alternative, on peut appliquer les résultats récemment obtenus par Z. Gao, T. Ge et L. Kühne dans [GGK21] sur une version uniforme de la conjecture de Mordell-Lang.

Notons que l'on peut inverser le raisonnement de cette dernière approche pour démontrer, à partir du théorème A, une version uniforme de la conjecture de Manin-Mumford pour certaines familles de courbes. Cette stratégie a été menée à bien dans [DKY20, section 9] en genre 2, à partir de la conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel pour les paires de courbes elliptiques sous forme de Legendre. En utilisant le cas général de la conjecture, il est vraisemblable que l'on puisse également obtenir des résultats en genre 3, 4 ou 5. L'article [GGK21] traitant déjà ces questions de façon plus générale, nous n'avons pas cherché à poursuivre dans cette direction.

Finalement, mentionnons le texte [DM24] de L. DeMarco et M. Mavraki, postérieur à celui-ci, qui propose une nouvelle démonstration du théorème A (mais pas du théorème B), par des techniques de dynamique complexe, ainsi que des généralisations à d'autres classes de morphismes suffisamment génériques.

1.5. Organisation du texte. — Une introduction rapide à la théorie des espaces de Berkovich sur les anneaux de Banach figure dans le texte [Poi22] qui précède celui-ci et nous y renvoyons le lecteur intéressé. Nous nous contentons ici de rappeler, dans la section 2, la description explicite du spectre analytique $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, l'espace de base sur lequel s'effectuent nos constructions.

La section 3 commence par quelques rappels sur la théorie de l'énergie mutuelle de Ch. Favre et J. Rivera-Letelier. Elle contient également des calculs explicites de cette énergie, menant au théorème D de l'étape 2.

La section 4 est consacrée aux morphismes de Lattès associées à la multiplication par 2. Nous y construisons l'espace de modules des paires de tels morphismes et démontrons le théorème C, sur la continuité des mesures, qui fait l'objet de l'étape 1.

L'étape 3 s'effectue en deux temps. Dans la section 5, nous démontrons le lemme E permettant de passer d'une estimation centrale à une estimation en toute place. Nous avons cherché à rédiger cette partie de façon aussi générale que possible, afin de la rendre applicable dans d'autres contextes. Dans la section 6, nous utilisons ces résultats dans le cadre qui nous intéresse pour démontrer les théorèmes F puis B.

La section 7 finale est consacrée à la démonstration du théorème A, répondant à la conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel.

1.6. Remerciements. — L’auteur remercie chaleureusement Velibor Bojković pour de nombreux échanges fructueux, qui ont notamment permis de détecter une erreur majeure dans une version préliminaire de ce texte. Il remercie également Thomas Gauthier de lui avoir transmis les notes [Gau23] et permis de les utiliser.

1.7. Notations. — Nous regroupons ici quelques notations qui seront utilisées tout au long du texte.

- On note \mathcal{P} l’ensemble des nombres premiers. Pour $p \in \mathcal{P}$, on note $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique sur \mathbf{Q} usuelle, normalisée par la condition $|p|_p = \frac{1}{p}$. On note $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle sur \mathbf{Q} .

Soit K un corps de nombres. On note M_K l’ensemble des places de K . Soit $v \in M_K$. On note $v|_{\mathbf{Q}}$ l’unique place de \mathbf{Q} telle que $v | v|_{\mathbf{Q}}$ et $|\cdot|_v$ l’unique valeur absolue sur K associée à la place v qui étend $|\cdot|_{v|_{\mathbf{Q}}}$. On pose

$$N_v := \frac{[K_v : \mathbf{Q}_{v|_{\mathbf{Q}}}]}{[K : \mathbf{Q}]}.$$

Soient $(x_0, \dots, x_n) \in \overline{\mathbf{Q}}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On définit la *hauteur projective* de (x_0, \dots, x_n) par

$$h([x_0 : \dots : x_n]) := \sum_{v \in M_K} N_v \max_{0 \leq i \leq n} (\log(|x_i|_v)),$$

où K est un corps de nombres contenant x_0, \dots, x_n . Cette quantité est indépendante du choix de K .

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbf{Q}}^n$. On définit la *hauteur* de (x_1, \dots, x_n) par

$$h(x_1, \dots, x_n) := h([1 : x_1 : \dots : x_n]).$$

En posant

$$\log^+ : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ x \longmapsto \max(\log(x), 0) \quad ,$$

on a donc

$$h(x_1 : \dots : x_n) := \sum_{v \in M_K} N_v \log^+(\max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|_v)).$$

Soit K un corps de nombres. Pour toute place v de K et tout point P (resp. toute partie F) de K , on note P_v (resp. F_v) son image dans K_v .

- Pour toute famille finie $(t_i)_{i \in I}$ de nombres réels, on définit le *sous-maximum* de $(t_i)_{i \in I}$ par

$$\text{smax}_{i \in I}(t_i) = \min_{j \in I} \left(\max_{i \neq j} (t_i) \right).$$

Pour $t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n \in \mathbf{R}$, on a donc

$$\text{smax}_{1 \leq i \leq n}(t_i) = t_{n-1}.$$

- Soit k un corps valué complet. On note $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ (resp. $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$) la droite affine (resp. projective) analytique au sens de Berkovich.

Supposons que k est ultramétrique. Pour $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on note $\eta_{\alpha,r}$ l’unique point du bord de Shilov du disque fermé de centre α et de rayon r et $\chi_{\alpha,r}$ la mesure

de Dirac supportée en $\eta_{\alpha,r}$. Tout segment I de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ formé de points de type 2 ou 3 possède une longueur (logarithmique) canonique, que nous noterons $\ell(I)$. Pour $\alpha \in k$ et $r, s \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r \leq s$, on a

$$\ell([\eta_{\alpha,r}, \eta_{\alpha,s}]) = \log\left(\frac{s}{r}\right).$$

Supposons que $k = \mathbf{C}$. Alors la droite $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ (resp. $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$) est isomorphe à \mathbf{C} (resp. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$). Pour $\alpha \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on note $\chi_{\alpha,r}$ la mesure de Haar de masse totale 1 sur le cercle $\overline{\mathbf{C}}(a, r)$.

Supposons que $k = \mathbf{R}$. Alors la droite $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ (resp. $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$) est isomorphe au quotient de \mathbf{C} (resp. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$) par la conjugaison complexe. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on note $\chi_{\alpha,r}$ l'image de la mesure $\chi_{\alpha,r}$ sur \mathbf{C} .

Nous renvoyons à [Poi22, sections 2.2 et 6.1] pour des précisions sur ces espaces et ces mesures respectivement.

2. Espaces de Berkovich sur les entiers

Dans [Ber90], V. Berkovich définit une notion d'espace analytique sur un anneau de Banach \mathcal{A} (cf. également [Poi22, section 2] pour quelques rappels). Nous nous intéressons ici au cas particulier où cet anneau de Banach est l'anneau des entiers relatifs \mathbf{Z} ou, plus généralement, un anneau d'entiers de corps de nombres, ou encore un localisé d'un de ces anneaux.

2.1. Le cas de \mathbf{Z} . — Considérons l'anneau des entiers relatifs \mathbf{Z} muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$. Il s'agit d'un anneau de Banach et l'on peut donc considérer son spectre analytique $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ au sens de V. Berkovich. Rappelons que ce dernier est défini, ensemblistement, comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur \mathbf{Z} . Le théorème d'Ostrowski permet de le décrire explicitement. Il contient :

- la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$ sur \mathbf{Z} ;
- les valeurs absolues archimédiennes $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, 1]$;
- pour tout nombre premier p , les valeurs absolues p -adiques $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, +\infty[$;
- pour tout nombre premier p , la semi-norme $|\cdot|_p^{+\infty}$ définie comme la composition de l'application quotient $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et de la valeur absolue triviale sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

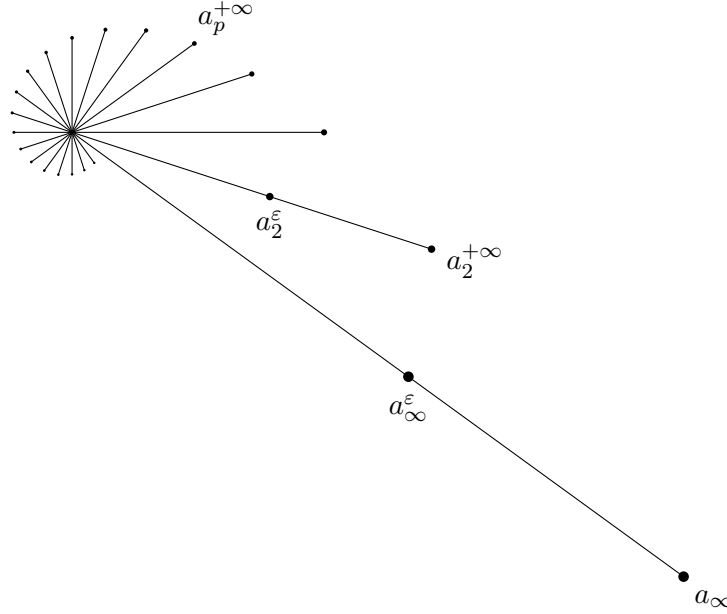
Nous noterons a_0 le point associé à $|\cdot|_0$, a_∞^ε le point associé à $|\cdot|_\infty^\varepsilon$, pour $\varepsilon \in]0, 1]$, et a_p^ε le point associé à $|\cdot|_p^\varepsilon$, pour $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon \in]0, +\infty]$. La figure 3 contient une représentation d'un plongement (non canonique) de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ dans \mathbf{R}^2 respectant la topologie.

Notons

$$\mathcal{N}(\mathbf{Q}) := \{a_\infty, a_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{M}(\mathbf{Z})$$

l'ensemble des points de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ correspondant aux valeurs absolues normalisées.

Il existe une notion d'espace de Berkovich sur \mathbf{Z} . Un tel espace X possède un morphisme structural vers le spectre $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, que nous noterons $\text{pr}: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{Z})$ dans ce texte. Rappelons qu'à tout schéma \mathcal{X} localement de type fini sur \mathbf{Z} , on peut associer son *analytifié* \mathcal{X}^{an} , qui est un espace de Berkovich sur \mathbf{Z} (cf. [LP20, section 4.1]).

FIGURE 3. Le spectre de Berkovich $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

L'anneau \mathbf{Z} est un *bon anneau de Banach* au sens de [Poi22, définition 2.3]. Par conséquent, les résultats de [Poi22] s'appliquent.

L'anneau \mathbf{Z} est un anneau *flottant*, au sens de [Poi22, définition 2.11]. Cela implique que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on dispose d'une application

$$\varphi_\varepsilon : x \in \mathcal{M}(\mathbf{Z}) \mapsto x^\varepsilon \in \mathcal{M}(\mathbf{Z}),$$

qui consiste à envoyer une seminorme sur sa puissance ε . Cette application est encore définie pour tout espace affine analytique sur \mathbf{Z} , et même, par recollement, pour tout analytifié d'un schéma localement de type fini sur \mathbf{Z} .

2.2. Le cas d'un localisé de \mathbf{Z} . — Soit $N \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Nous souhaiterions disposer d'une théorie semblable à la théorie sur \mathbf{Z} pour l'anneau localisé $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$.

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_N(\mathbf{Z}) &:= \{x \in \mathcal{M}(\mathbf{Z}) : N(x) \neq 0\} \\ &= \mathcal{M}(\mathbf{Z}) \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}_N} \{a_p^{+\infty}\}, \end{aligned}$$

où \mathcal{P}_N désigne l'ensemble des nombres premiers divisant N . C'est un ouvert flottant de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, naturellement associé à $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$.

Pour pouvoir développer la théorie comme dans le cas de \mathbf{Z} , nous allons approcher $\mathcal{U}_N(\mathbf{Z})$ par une famille de spectres d'anneaux de Banach. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. Munissons $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$ de la norme

$$\|\cdot\|_{N,\alpha} := \max(|\cdot|_\infty, |\cdot|_p^\alpha, p \in \mathcal{P}_N).$$

Nous obtenons un anneau de Banach dont le spectre s'identifie à la partie compacte de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ obtenue en coupant, pour tout $p \in \mathcal{P}_N$, la branche p -adique à hauteur

de $|\cdot|_p^\alpha$:

$$\mathcal{M}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{N}\right], \|\cdot\|_{N,\alpha}\right) = [a_0, a_\infty] \cup \bigcup_{p \notin \mathcal{P}_N} [a_0, a_p^{+\infty}] \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}_N} [a_0, a_p^\alpha].$$

Notons $\mathcal{U}_{N,\alpha}$ l'intérieur de $\mathcal{M}(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}], \|\cdot\|_{N,\alpha})$ dans $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$:

$$\mathcal{U}_{N,\alpha} = [a_0, a_\infty] \cup \bigcup_{p \notin \mathcal{P}_N} [a_0, a_p^{+\infty}] \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}_N} [a_0, a_p^\alpha[.$$

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $\alpha \leq \beta$, on a une immersion ouverte $\iota_{\beta,\alpha} : \mathcal{U}_{N,\alpha} \hookrightarrow \mathcal{U}_{N,\beta}$. On en déduit un isomorphisme naturel

$$\operatorname{colim}_{\alpha>0} \mathcal{U}_{N,\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_N.$$

Nous pouvons maintenant définir l'analytifié d'un schéma X localement de type fini sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$ en suivant cette approche. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, notons X_α^{an} l'analytifié de X sur $(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}], \|\cdot\|_{N,\alpha})$ et $X_{\alpha-}^{\text{an}}$ sa restriction au-dessus de l'ouvert $\mathcal{U}_{N,\alpha}$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $\alpha \leq \beta$, l'immersion ouverte $\iota_{\beta,\alpha}$ induit une immersion ouverte $X_{\alpha-}^{\text{an}} \hookrightarrow X_{\beta-}^{\text{an}}$. On définit alors l'analytifié de X par

$$X^{\text{an}} := \operatorname{colim}_{\alpha>0} X_{\alpha-}^{\text{an}}.$$

L'espace X^{an} est muni d'un morphisme naturel pr vers \mathcal{U}_N . En particulier, c'est un espace \mathbf{Z} -analytique. On vérifie qu'il est flottant.

2.3. Le cas d'un anneau d'entiers de corps de nombres. — Soit K un corps de nombres. Notons A son anneau d'entiers et munissons-le de la norme

$$\|\cdot\|_A := \max_{\sigma \in M_{K,\infty}} (|\cdot|_\sigma),$$

où $M_{K,\infty}$ désigne l'ensemble des places infinies de K . C'est un anneau de Banach dont le spectre possède une description très similaire à celle de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Nous renvoyons à [Poi10, section 3.1] pour plus de détails.

Posons

$$\mathcal{N}(K) := \{a_\sigma, \sigma \in M_K\} \subset \mathcal{M}(A).$$

Comme dans le cas de \mathbf{Z} , l'anneau A est un bon anneau de Banach flottant et l'on peut définir l'analytifié X^{an} d'un schéma localement de type fini sur A .

Les arguments de la section 2.2 s'adaptent également à ce cadre. Soit $d \in A \setminus \{0\}$. Posons

$$\mathcal{U}_d(A) := \{x \in \mathcal{M}(A) : d(x) \neq 0\}.$$

On peut analytifier un schéma X localement de type fini sur $A[\frac{1}{d}]$ de façon à obtenir un espace A -analytique X^{an} flottant muni d'un morphisme vers $\mathcal{U}_d(A)$.

3. Énergie mutuelle de deux mesures

Dans cette section, nous rappelons la notion d'énergie mutuelle pour deux mesures de Radon signées, telle que définie par Charles Favre et Juan Rivera-Letelier dans [FR06]. Nous la calculons explicitement dans le cas de deux mesures supportées sur un segment dans la droite projective au-dessus d'un corps ultramétrique.

3.1. Définitions. —

3.1.1. Cadre local. — Commençons par rappeler la définition d'énergie mutuelle dans le cas classique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, cf. [FR06, section 2.4]. Notons Diag la diagonale de \mathbf{C}^2 .

Définition 3.1. — Soient ρ et ρ' deux mesures sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Supposons que la fonction

$$(z, w) \in \mathbf{C}^2 \setminus \text{Diag} \longmapsto \log(|z - w|) \in \mathbf{R}$$

est intégrable pour $|\rho| \otimes |\rho'|$, où $|\rho|$ et $|\rho'|$ désignent les mesures traces de ρ et ρ' . On définit alors l'énergie mutuelle de ρ et ρ' par

$$(\rho, \rho') := - \int_{\mathbf{C}^2 \setminus \text{Diag}} \log(|z - w|) d\rho(z) \otimes d\rho'(w).$$

Il suit directement de la définition que l'on a $(\rho', \rho) = (\rho, \rho')$.

Soit ρ une mesure sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont la trace est à *potentiel continu* (c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme $\Delta(u)$, avec u continue, au voisinage de tout point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$). Soit ρ' une mesure sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ satisfaisant l'une des propriétés suivantes :

- i) ρ' est une mesure à support fini ne chargeant pas l'infini ;
- ii) $|\rho'|$ est à potentiel continu.

Alors l'hypothèse d'intégrabilité de la définition 3.1 est satisfaite (cf. [FR06, lemme 2.4]). En outre, si g_ρ est un potentiel de ρ (c'est-à-dire que $\Delta(g_\rho) = \rho$) et que $\rho'(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = 0$, on a

$$(\rho, \rho') = - \int_{\mathbf{C}} g_\rho d\rho'$$

(cf. [FR06, lemme 2.5]). Remarquons que cette expression montre que la quantité (ρ, ρ') est indépendante du choix de la coordonnée sur \mathbf{C} .

Si, en outre, on a $\rho(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = 0$, alors $(\rho, \rho) \geq 0$ et $(\rho, \rho) = 0$ si, et seulement si, $\rho = 0$ (cf. [FR06, proposition 2.6]).

Dans le cadre des espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} dans lequel nous travaillons, nous aurons besoin de disposer de la théorie non seulement sur l'espace $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ classique, mais également sur $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$ pour tout corps valué archimédien complet. Ce dernier cas n'est plus général qu'en apparence et la théorie se ramène immédiatement à celle sur le corps \mathbf{C} muni de la valeur absolue usuelle en utilisant les définitions et méthodes de [Poi22, section 5.2].

Ch. Favre et J. Rivera–Letelier développent également la théorie pour $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$, où k est un corps valué ultramétrique complet ([FR06, section 4.4 et 4.5]). Par rapport au cas complexe, la seule modification à apporter concerne la fonction $\log(|z - w|)$, qu'ils remplacent par un analogue purement ultramétrique permettant de l'étendre aux points non rationnels de $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$. Tous les énoncés ci-dessus restent valables dans le cadre ultramétrique.

Dans un souci de précision, indiquons que Ch. Favre et J. Rivera–Letelier ne développent la théorie que dans le cas de \mathbf{C}_p . Les mêmes arguments permettent de traiter, sans changement, le cas d'un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. Le cas général s'y ramène par changement de base, toutes les formules étant invariantes par cette opération.

Introduisons encore une notation. Dans tous les cas, lorsque les conditions assurant l'existence sont satisfaites, on pose

$$\langle \rho, \rho' \rangle := \frac{1}{2} (\rho - \rho', \rho - \rho').$$

3.1.2. Cadre global. — Soit K un corps de nombres. Ch. Favre et J. Rivera-Letelier introduisent une notion de mesure adélique sur K , cf. [FR06, définition 1.1].

Définition 3.2. — Une *mesure adélique* sur K est une famille de mesures

$$\rho := (\rho_v)_{v \in M_K}$$

où, pour toute place $v \in M_K$, ρ_v est une mesure de probabilité sur $\mathbf{P}_{K_v}^{1,\text{an}}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- i) pour toute place $v \in M_K$, ρ_v possède un *potentiel continu* : il existe $g_v : \mathbf{P}_{K_v}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $\rho_v = \chi_{0,1} + \Delta(g_v)$;
- ii) pour presque toute place $v \in M_K$, on a $\rho_v = \chi_{0,1}$.

Remarque 3.3. — Dans la définition originale de Ch. Favre et J. Rivera-Letelier, pour toute $v \in M_K$, la mesure ρ_v est une mesure sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_v}^{1,\text{an}}$, où \mathbf{C}_v est le complété d'une clôture algébrique de K_v . Cette modification mineure n'a aucune influence sur la théorie développée dans [FR06]. Elle est importante en ce qu'elle nous permettra d'utiliser les résultats de continuité démontrés dans [Poi22], les corps K_v apparaissant comme corps résiduels complétés dans le spectre de l'anneau des entiers de K .

Rappelons également que nous pouvons tirer en arrière les mesures par un morphisme fini (cf. [Poi22, section 3.2]). Ainsi, à partir d'une mesure sur $\mathbf{P}_{K_v}^{1,\text{an}}$, pouvons-nous en obtenir une sur $\mathbf{P}_\ell^{1,\text{an}}$, pour toute extension finie ℓ de K_v , à défaut d'en obtenir une sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_v}^{1,\text{an}}$. En particulier, pour toute extension finie L de K , toute mesure adélique ρ sur K induit une mesure adélique ρ_L sur L , par image réciproque.

Exemple 3.4. — Soit F une partie finie non vide de K . Pour toute $v \in M_K$, notons F_v son image dans K_v . Soit $r = (r_v)_{v \in M_K}$ une famille de $\mathbf{R}_{>0}$ dont presque tous les éléments valent 1. Alors, la famille

$$m_{F,r} := \left(\frac{1}{\#F_v} \sum_{P \in F_v} \chi_{P,r_v} \right)_{v \in M_K}$$

est une mesure adélique sur K .

Exemple 3.5. — Soit $\varphi \in K(T)$ une fraction rationnelle de degré supérieur ou égal à 2. Pour toute $v \in M_K$, notons $\rho_{\varphi,v}$ la mesure d'équilibre sur $\mathbf{P}_{K_v}^{1,\text{an}}$ associée à φ . D'après [FR06, théorème 8], la famille $\rho_\varphi := (\rho_{\varphi,v})_{v \in M_K}$ est une mesure adélique sur K .

On peut encore définir l'énergie mutuelle dans ce contexte. Soient $\rho := (\rho_v)_{v \in M_K}$ et $\rho' := (\rho'_v)_{v \in M_K}$ des mesures adéliques sur K . On pose

$$(\rho, \rho') := \sum_{v \in M_K} N_v (\rho_v, \rho'_v)$$

et

$$\langle \rho, \rho' \rangle := \frac{1}{2} (\rho - \rho', \rho - \rho').$$

Il découle de la définition de mesure adélique et des propriétés exposées à la section 3.1.1 que ces quantités font sens.

Remarque 3.6. — Soient $\varphi, \psi \in K(T)$ des fractions rationnelles de degré supérieur ou égal à 2. On peut alors définir l'énergie mutuelle $\langle \rho_\varphi, \rho_\psi \rangle$ comme ci-dessus.

D'autres définitions existent dans la littérature. Mentionnons tout d'abord celle de C. Petsche-L. Szpiro-T. Tucker (cf. [PST12]). Elle est équivalente à la précédente d'après [Fil17, theorem 9] et [PST12, theorem 1].

Une autre définition est due à S.-W. Zhang (cf. [Zha95]), à la suite des travaux de S. Arakelov et J.-B. Bost-H. Gillet-Chr. Soulé. Dans ce cas, l'accouplement apparaît comme produit d'intersection arithmétique des premières classes de Chern de deux fibrés métrisés sur \mathbf{P}_K^1 associés à φ et ψ . Le résultat obtenu est encore le même que précédemment, comme expliqué dans [PST12, section 1.4].

Énonçons maintenant une inégalité triangulaire due à P. Fili (cf. [Fil17, theorem 1]).

Théorème 3.7. — Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 des mesures adéliques sur K . Alors, on a

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle^{1/2} \leq \langle \rho_1, \rho_3 \rangle^{1/2} + \langle \rho_3, \rho_2 \rangle^{1/2}.$$

Introduisons également des familles de mesures non adéliques pour lesquelles nous pourrions encore calculer des énergies mutuelles.

Notation 3.8. — Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . Soit F une partie finie non vide de $\mathbf{P}^1(\bar{K})$ stable par $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Soit $v \in M_K$ et soit \mathbf{C}_v le complété d'une clôture algébrique de K_v . L'ensemble F définit un ensemble $F_{\mathbf{C}_v}$ de points rationnels de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_v}^{1,\text{an}}$ (de même cardinal). Notons $[F]_{\mathbf{C}_v}$ la mesure de probabilité sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_v}^{1,\text{an}}$ équilibrée en ces points et $[F]_v$ son image sur $\mathbf{P}_{K_v}^{1,\text{an}}$. Posons

$$[F] := ([F]_v)_{v \in M_K}.$$

Soit $\rho := (\rho_v)_{v \in M_K}$ une mesure adélique. Soit F une partie finie non vide de $\mathbf{P}^1(\bar{K})$. On peut encore définir l'énergie mutuelle dans ce cadre en posant

$$h_\rho(F) := \frac{1}{2} \sum_{v \in M_K} N_v (\rho_v - [\text{Gal}(\bar{K}/K) \cdot F]_v, \rho_v - [\text{Gal}(\bar{K}/K) \cdot F]_v).$$

Il s'agit d'une généralisation de la hauteur classique, que l'on retrouve en choisissant pour ρ la famille « constante » $(\chi_{0,1})_{v \in M_K}$. On peut également retrouver la hauteur canonique associée à une fraction rationnelle φ , au sens G. Call et J. Silverman (cf. [CS93]), en choisissant $\rho = \rho_\varphi$ (cf. [FR06, théorème 8]).

Remarque 3.9. — Soit L une extension finie de K . Comme à la remarque 3.3, en tirant en arrière les mesures $[F]_v$, on obtient une famille de mesures $[F]_L$. Elle coïncide avec la famille $[F]$ calculée pour le corps L .

En utilisant la compatibilité du laplacien aux images réciproques, on montre que l'énergie mutuelle est invariante par extension des scalaires, au sens où, pour toutes mesures adéliques ρ et ρ' , on a

$$\langle \rho, \rho' \rangle = \langle \rho_L, \rho'_L \rangle$$

et

$$h_{\rho_L}(F) = h_\rho(F).$$

Par conséquent, dans la suite du texte, nous nous autoriserons parfois à écrire des quantités $\langle \rho, \rho' \rangle$ ou $h_\rho(F)$ pour des mesures et des ensembles définis sur $\bar{\mathbf{Q}}$, sans préciser de corps de nombres de définition.

3.2. Segment contre segment. — Soit k un corps valué ultramétrique complet. Nous calculons ici des énergies mutuelles de mesures associées à des segments contenus dans $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$.

Notation 3.10. — On note Seg_k l'ensemble des segments de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ dont les extrémités sont des points de type 2 ou 3.

Notation 3.11. — Soit $I \in \text{Seg}_k$. On définit une mesure μ_I sur $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ de la façon suivante.

- i) Si I est un singleton $\{\xi\}$, μ_I est la mesure de Dirac au point ξ .
- ii) Si I n'est pas un singleton, μ_I est l'image de la mesure de Lebesgue sur I de masse totale 1.

Définition 3.12. — Soient $I_1, I_2 \in \text{Seg}_k$.

On dit que I_1 et I_2 sont *alignés* s'ils sont contenus dans un même segment.

On dit que I_1 et I_2 sont *emboîtables* si $I_1 \cap I_2$ est un singleton et $I_1 \cup I_2$ est un segment.

Le résultat suivant se démontre par un calcul direct.

Lemme 3.13. — Soient $\alpha \in k$ et $r, s \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r \leq s$. Considérons la fonction $\sigma_{\alpha,r,s} : \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{R}$ définie, pour $z \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$, par

$$\sigma_{\alpha,r,s}(z) = \begin{cases} \log\left(\frac{s}{r}\right) \log(|z - \alpha|) & \text{si } |z - \alpha| \geq s ; \\ \frac{1}{2} \log(|z - \alpha|)^2 - \log(r) \log(|z - \alpha|) + \frac{1}{2} \log(s)^2 & \text{si } r \leq |z - \alpha| \leq s ; \\ \frac{1}{2} \log(s)^2 - \frac{1}{2} \log(r)^2 & \text{si } |z - \alpha| \leq r. \end{cases}$$

Alors, $\sigma_{\alpha,r,s}$ est sous-harmonique continue sur $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ et on a

$$\Delta(\sigma_{\alpha,r,s}) = \log\left(\frac{s}{r}\right) \mu_{[\eta_{\alpha,r}, \eta_{\alpha,s}]}. \quad \square$$

Lorsque k est algébriquement clos, on peut, par un changement de variable, ramener tout segment $I \in \text{Seg}_k$ à un segment de la forme considérée dans le lemme 3.13, et donc trouver un potentiel de μ_I satisfaisant des propriétés analogues.

Notation 3.14. — Supposons que k est algébriquement clos. Soit $I \in \text{Seg}_k$. On note $\sigma_I : \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{R}$ l'unique fonction sous-harmonique continue telle que

$$\Delta(\sigma_I) = \ell(I) \mu_I$$

et qui coïncide avec $\ell(I) \log(|z|)$ au voisinage de l'infini.

Lemme 3.15. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$. Alors, la quantité

$$\langle \mu_{I_a}, \mu_{I_b} \rangle = \frac{1}{2} (\mu_{I_a} - \mu_{I_b}, \mu_{I_a} - \mu_{I_b})$$

est bien définie.

En outre, si k est algébriquement clos, on a

$$\langle \mu_{I_a}, \mu_{I_b} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \left(\frac{1}{\ell(I_a)} \sigma_{I_a} - \frac{1}{\ell(I_b)} \sigma_{I_b} \right) d(\mu_{I_b} - \mu_{I_a}).$$

Démonstration. — Par changement de base, on se ramène au cas où k est algébriquement clos. Le résultat découle alors du fait que $\mu_{I_a} - \mu_{I_b} = \Delta(\sigma_{I_a} - \sigma_{I_b})$ et des considérations exposées à la section 3.1. \square

Notation 3.16. — Pour $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$, on pose

$$E(I_a, I_b) := \langle \mu_{I_a}, \mu_{I_b} \rangle.$$

Le reste de cette section est consacré à la démonstration d'une formule explicite permettant de calculer la quantité $E(I_a, I_b)$ en fonction de la position relative des segments et de leur longueur.

Lemme 3.17. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ des segments emboîtables. Alors, on a

$$\ell(I_a \cup I_b)\mu_{I_a \cup I_b} = \ell(I_a)\mu_{I_a} + \ell(I_b)\mu_{I_b}.$$

En outre, si k est algébriquement clos, on a

$$\sigma_{I_a \cup I_b} = \sigma_{I_a} + \sigma_{I_b}.$$

□

Notation 3.18. — Pour $I_\times^* \in \text{Seg}_k$, on pose $\ell_\times^* := \ell(I_\times^*)$.

Lemme 3.19. — Soient I_a, I'_b, I''_b tels que I'_b et I''_b soient emboîtables. Posons $I_b := I'_b \cup I''_b$. Alors, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{\ell'_b}{\ell_b} E(I_a, I'_b) + \frac{\ell''_b}{\ell_b} E(I_a, I''_b) - \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b^2} E(I'_b, I''_b).$$

Démonstration. — On peut supposer que k est algébriquement clos. D'après le lemme 3.17, on a $\ell_b \mu_{I_b} = \ell'_b \mu_{I'_b} + \ell''_b \mu_{I''_b}$ et $\sigma_{I_b} = \sigma_{I'_b} + \sigma_{I''_b}$.

Nous supprimerons dorénavant les I dans les indices et écrirons σ_a au lieu de σ_{I_a} , μ'_b au lieu de $\mu_{I'_b}$, etc.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} 2E(I_a, I_b) &= \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \left(\frac{1}{\ell_a} \sigma_a - \frac{1}{\ell_b} \sigma_b \right) d(\mu_b - \mu_a) \\ &= \frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu_b + \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b d\mu_a \\ &\quad - \frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu_a - \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b d\mu_b \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 2E(I_a, I_b) &= \frac{\ell'_b}{\ell_a \ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu'_b + \frac{\ell''_b}{\ell_a \ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu''_b \\ &\quad + \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma'_b d\mu_a + \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma''_b d\mu_a \\ &\quad - \frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu_a - \frac{\ell'_b}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma'_b d\mu'_b - \frac{\ell''_b}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma''_b d\mu''_b \\ &\quad - \frac{\ell'_b}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma'_b d\mu''_b - \frac{\ell''_b}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma''_b d\mu'_b. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 2\frac{\ell'_b}{\ell_b} E(\mu_a, \mu'_b) &= \frac{\ell'_b}{\ell_a \ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu'_b + \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma'_b d\mu_a \\ &\quad - \frac{\ell'_b}{\ell_a \ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu_a - \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma'_b d\mu'_b, \end{aligned}$$

$$2 \frac{\ell_b''}{\ell_b} E(\mu_a, \mu_b'') = \frac{\ell_b''}{\ell_a \ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu_b'' + \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b'' d\mu_a \\ - \frac{\ell_b''}{\ell_a \ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_a d\mu_a - \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b'' d\mu_b''$$

et

$$2 \frac{\ell_b' \ell_b''}{\ell_b^2} E(\mu_b', \mu_b'') = \frac{\ell_b''}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b' d\mu_b'' + \frac{\ell_b'}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b'' d\mu_b' \\ - \frac{\ell_b''}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b' d\mu_b' - \frac{\ell_b'}{\ell_b^2} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_b'' d\mu_b''.$$

Le résultat s'en déduit. \square

Lemme 3.20. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ des segments alignés tels que $\sharp(I_a \cap I_b) \leq 1$. Alors, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{1}{6} \ell_a + \frac{1}{6} \ell_b + \frac{1}{2} d_{ab},$$

où d_{ab} désigne la distance de I_a à I_b .

Démonstration. — On peut supposer que k est algébriquement clos. Quitte à changer de coordonnée, on peut supposer qu'il existe $\alpha \in k$ et $r, s, t, u \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r \leq s \leq t \leq u$ tels que $I_a = [\eta_{\alpha,r}, \eta_{\alpha,s}]$ et $I_b = [\eta_{\alpha,t}, \eta_{\alpha,u}]$. Définissons $\sigma_{\alpha,r,s}$ et $\sigma_{\alpha,t,u}$ comme dans le lemme 3.13. On a alors

$$2E(I_a, I_b) = \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \left(\frac{1}{\ell_a} \sigma_{\alpha,r,s} - \frac{1}{\ell_b} \sigma_{\alpha,t,u} \right) d(\mu_{I_b} - \mu_{I_a}) \\ = \frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,r,s} d\mu_{I_b} + \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,t,u} d\mu_{I_a} \\ - \frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,r,s} d\mu_{I_a} - \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,t,u} d\mu_{I_b}.$$

Un calcul direct utilisant l'expression explicite de $\sigma_{\alpha,r,s}$ montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,r,s} d(\ell_a \mu_{I_a}) = \int_{\log(r)}^{\log(s)} \left(\frac{1}{2} x^2 - \log(r)x + \frac{1}{2} \log(s)^2 \right) dx \\ = \frac{2}{3} \log(s)^3 + \frac{1}{3} \log(r)^3 - \log(r) \log(s)^2 \\ = \frac{1}{3} (2 \log(s) + \log(r)) (\log(s) - \log(r))^2,$$

d'où

$$\frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,r,s} d\mu_{I_a} = \frac{2}{3} \log(s) + \frac{1}{3} \log(r).$$

De même, on a

$$\frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,t,u} d\mu_{I_b} = \frac{2}{3} \log(u) + \frac{1}{3} \log(t).$$

On a également

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell_a} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,r,s} d\mu_{I_b} &= \frac{1}{\ell_a \ell_b} \int_{\log(t)}^{\log(u)} \ell_a x dx \\ &= \frac{1}{2} (\log(u) + \log(t)), \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell_b} \int_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}} \sigma_{\alpha,t,u} d\mu_{I_a} &= \frac{1}{\ell_a \ell_b} \int_{\log(r)}^{\log(s)} \frac{1}{2} (\log(u)^2 - \log(t)^2) dx \\ &= \frac{1}{2} (\log(u) + \log(t)). \end{aligned}$$

En sommant les différents termes, on obtient

$$\begin{aligned} 2E(I_a, I_b) &= -\frac{2}{3} \log(s) - \frac{1}{3} \log(r) + \frac{1}{3} \log(u) + \frac{2}{3} \log(t) \\ &= \frac{1}{3} \ell_a + \frac{1}{3} \ell_b + d_{ab}. \end{aligned}$$

□

Commençons par calculer $E(I_a, I_b)$ dans le cas où l'intersection $I_a \cap I_b$ est petite, c'est-à-dire vide ou un singleton. On peut alors écrire de façon unique $I_a = I'_a \cup I''_a$ et $I_b = I'_b \cup I''_b$ avec $I'_a \cap I''_a = \{z_a\}$, $I'_b \cap I''_b = \{z_b\}$ et $d_{ab} = \ell([z_a, z_b])$, où d_{ab} désigne la distance de I_a à I_b (cf. figure 4).

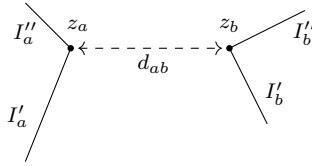


FIGURE 4. Segments I_a et I_b disjoints.

Théorème 3.21. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $\sharp(I_a \cap I_b) \leq 1$. Alors, avec les notations de la figure 4, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{1}{6} \ell_a + \frac{1}{6} \ell_b + \frac{1}{2} d_{ab} - \frac{1}{2} \frac{\ell'_a \ell''_a}{\ell_a} - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b}.$$

En particulier, on a

$$E(\mu_a, \mu_b) \geq \frac{1}{24} \ell_a + \frac{1}{24} \ell_b + \frac{1}{2} d_{ab}.$$

Démonstration. — D'après les lemmes 3.19 et 3.20, on a

$$\begin{aligned}
E(I'_a, I_b) &= E(I'_a, I'_b \cup I''_b) \\
&= \frac{\ell'_b}{\ell_b} E(I'_a, I'_b) + \frac{\ell''_b}{\ell_b} E(I'_a, I''_b) - \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b^2} E(I'_b, I''_b) \\
&= \frac{\ell'_b}{\ell_b} \left(\frac{1}{6} \ell'_a + \frac{1}{6} \ell'_b + \frac{1}{2} d_{ab} \right) + \frac{\ell''_b}{\ell_b} \left(\frac{1}{6} \ell'_a + \frac{1}{6} \ell''_b + \frac{1}{2} d_{ab} \right) - \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b^2} \left(\frac{1}{6} \ell_b \right) \\
&= \frac{1}{6} \ell'_a + \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{6\ell_b} (\ell_b'^2 + \ell_b''^2 - \ell'_b \ell''_b) \\
&= \frac{1}{6} \ell'_a + \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{3} \ell_b - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b}
\end{aligned}$$

De même, on a

$$E(I''_a, I_b) = \frac{1}{6} \ell''_a + \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{6} \ell_b - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b}.$$

Finalement, on calcule

$$\begin{aligned}
E(I_a, I_b) &= E(I'_a \cup I''_a, I_b) \\
&= \frac{\ell'_a}{\ell_a} E(I'_a, I_b) + \frac{\ell''_a}{\ell_a} E(I''_a, I_b) - \frac{\ell'_a \ell''_a}{\ell_a^2} E(I'_a, I''_a) \\
&= \frac{\ell'_a}{\ell_a} \left(\frac{1}{6} \ell'_a + \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{2} \ell_b - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b} \right) + \frac{\ell''_a}{\ell_a} \left(\frac{1}{6} \ell''_a + \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{6} \ell_b - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b} \right) - \frac{1}{2} \frac{\ell'_a \ell''_a}{\ell_a^2} \left(\frac{1}{6} \ell_a \right) \\
&= \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{6} \ell_b - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b} + \frac{1}{6\ell_a} (\ell_a'^2 + \ell_a''^2 - \ell'_a \ell''_a) \\
&= \frac{1}{2} d_{ab} + \frac{1}{6} \ell_b - \frac{1}{2} \frac{\ell'_b \ell''_b}{\ell_b} + \frac{1}{6} \ell_a - \frac{1}{2} \frac{\ell'_a \ell''_a}{\ell_a}.
\end{aligned}$$

La minoration finale se démontre à l'aide des inégalités $\ell'_a \ell''_a \leq \frac{1}{4} \ell_a^2$ et $\ell'_b \ell''_b \leq \frac{1}{4} \ell_b^2$. \square

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les segments se rencontrent. Posons $I_{ab} := I_a \cap I_b$. On peut alors écrire de façon unique $I_a = I'_a \cup I_{ab} \cup I''_a$ et $I_b = I'_b \cup I_{ab} \cup I''_b$, où les segments I'_a et I_{ab} , I_{ab} et I''_a , I'_b et I_{ab} , I_{ab} et I''_b sont emboîtés et I'_a et I'_b sont situés du même côté de I_{ab} (*cf.* figure 5).

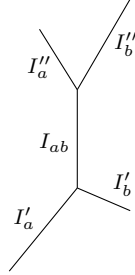


FIGURE 5. Segments I_a et I_b qui se rencontrent.

Lemme 3.22. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $I_a \subset I_b$. Alors, avec les notations de la figure 5, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{3}\ell_a + \frac{1}{6}\frac{\ell_a^2}{\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell'_b\ell''_b}{\ell_b}.$$

Démonstration. — D'après le théorème 3.21, on a

$$E(I_a, I'_b) = \frac{1}{6}(\ell_a + \ell'_b), \quad E(I_a, I''_b) = \frac{1}{6}(\ell_a + \ell''_b) \quad \text{et} \quad E(I'_b \cup I_a, I''_b) = \frac{1}{6}\ell_b.$$

D'après le lemme 3.19, on a

$$\begin{aligned} E(I_a, I'_b \cup I_a) &= \frac{\ell'_b}{\ell'_b + \ell_a} E(I_a, I'_b) + \frac{\ell_a}{\ell'_b + \ell_a} E(I_a, I_a) - \frac{\ell'_b\ell_a}{(\ell'_b + \ell_a)^2} E(I'_b, I_a) \\ &= \frac{\ell'_b(\ell'_b + \ell_a) - \ell'_b\ell_a}{(\ell'_b + \ell_a)^2} \frac{1}{6}(\ell_a + \ell'_b) \\ &= \frac{1}{6} \frac{\ell'^2_b}{\ell_a + \ell'_b}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} E(I_a, I_b) &= E(I_a, (I'_b \cup I_a) \cup I''_b) \\ &= \frac{\ell'_b + \ell_a}{\ell_b} E(I_a, I'_b \cup I_a) + \frac{\ell''_b}{\ell_b} E(I_a, I''_b) - \frac{(\ell'_b + \ell_a)\ell''_b}{\ell_b^2} E(I'_b \cup I_a, I''_b) \\ &= \frac{1}{6} \frac{\ell'^2_b}{\ell_b} + \frac{1}{6} \frac{\ell''_b}{\ell_b} (\ell_a + \ell''_b) - \frac{1}{6} \frac{(\ell'_b + \ell_a)\ell''_b}{\ell_b} \\ &= \frac{1}{6} \frac{\ell'^2_b + \ell''^2_b - \ell'_b\ell''_b}{\ell_b} \\ &= \frac{1}{6} \frac{(\ell'_b + \ell_a + \ell''_b)^2 - 2\ell_a(\ell'_b + \ell_a + \ell''_b) + \ell_a^2 - 3\ell'_b\ell''_b}{\ell_b} \\ &= \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{3}\ell_a + \frac{1}{6}\frac{\ell_a^2}{\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell'_b\ell''_b}{\ell_b}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.23. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $I_a \cap I_b \neq \emptyset$, $I_a \not\subset I_b$ et $I_b \not\subset I_a$. Alors, avec les notations de la figure 5, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{2}\ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a\ell_b}.$$

Démonstration. — On peut supposer que $I''_a = I'_b = \emptyset$. D'après les lemmes 3.22 et 3.20, on a

$$E(I_{ab}, I_a) = \frac{1}{6}\ell_a - \frac{1}{3}\ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^2}{\ell_a}, \quad E(I_a, I''_b) = \frac{1}{6}(\ell_a + \ell''_b) \quad \text{et} \quad E(I_{ab}, I''_b) = \frac{1}{6}\ell_b.$$

D'après le lemme 3.19, on a

$$\begin{aligned}
E(I_a, I_{ab} \cup I_b'') &= \frac{\ell_{ab}}{\ell_b} E(I_a, I_{ab}) + \frac{\ell_b''}{\ell_b} E(I_a, I_b'') - \frac{\ell_{ab}\ell_b''}{\ell_b^2} E(I_{ab}, I_b'') \\
&= \frac{1}{6\ell_b} \left(\ell_{ab}(\ell_a - 2\ell_{ab} + \frac{\ell_{ab}^2}{\ell_a}) + \ell_b''(\ell_a + \ell_b'') - \ell_{ab}\ell_b'' \right) \\
&= \frac{1}{6\ell_b} \left(\ell_a\ell_b + \ell_b^2 - 3\ell_{ab}^2 - 3\ell_{ab}\ell_b'' + \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a} \right) \\
&= \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{2}\ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a\ell_b}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.24. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. Avec les notations de la figure 5, supposons que $I_a'' = \emptyset$. Alors, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{2}\ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell_b'\ell_b''}{\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell_a'\ell_b'\ell_{ab}}{\ell_a\ell_b}.$$

Démonstration. — D'après le théorème 3.21 et le lemme 3.23, on a

$$E(I_a, I_b') = \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}\ell_b' - \frac{1}{2}\frac{\ell_a'\ell_{ab}}{\ell_a}, \quad E(I_b', I_{ab} \cup I_b'') = \frac{1}{6}\ell_b$$

et

$$E(I_a, I_{ab} \cup I_b'') = \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}(\ell_{ab} + \ell_b'') - \frac{1}{2}\ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a(\ell_{ab} + \ell_b'')}.$$

D'après le lemme 3.19, on a

$$\begin{aligned}
E(I_a, I_b) &= \frac{\ell_b'}{\ell_b} E(I_a, I_b') + \frac{\ell_{ab} + \ell_b''}{\ell_b} E(I_a, I_{ab} \cup I_b'') - \frac{\ell_b'(\ell_{ab} + \ell_b'')}{\ell_b^2} E(I_b', I_{ab} \cup I_b'') \\
&= \frac{1}{6\ell_b} \left(\ell_b'\ell_a + \ell_b'^2 - 3\frac{\ell_a'\ell_b'\ell_{ab}}{\ell_a} + (\ell_{ab} + \ell_b'')\ell_a + (\ell_{ab} + \ell_b'')^2 - 3(\ell_{ab} + \ell_b'')\ell_{ab} + \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a} \right. \\
&\quad \left. - \ell_b'(\ell_{ab} + \ell_b'') \right) \\
&= \frac{1}{6\ell_b} \left(\ell_b'\ell_a + \ell_b'^2 - 3\ell_{ab}\ell_b - 3\ell_b'\ell_b'' + \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a} - 3\frac{\ell_a'\ell_b'\ell_{ab}}{\ell_a} \right)
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.25. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. Alors, avec les notations de la figure 5, on a

$$E(I_a, I_b) = \frac{1}{6}\ell_a + \frac{1}{6}\ell_b - \ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell_a'\ell_a''}{\ell_a} - \frac{1}{2}\frac{\ell_b'\ell_b''}{\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{(\ell_a'\ell_b' + \ell_a''\ell_b'')\ell_{ab}}{\ell_a\ell_b}.$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.24 et le théorème 3.21, on a

$$E(I_a' \cup I_{ab}, I_b) = \frac{1}{6}(\ell_a' + \ell_{ab}) + \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{2}\ell_{ab} + \frac{1}{6}\frac{\ell_{ab}^3}{(\ell_a' + \ell_{ab})\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell_b'\ell_b''}{\ell_b} - \frac{1}{2}\frac{\ell_a'\ell_b'\ell_{ab}}{(\ell_a' + \ell_{ab})\ell_b},$$

$$E(I_a'', I_b) = \frac{1}{6}\ell_a'' + \frac{1}{6}\ell_b - \frac{1}{2}\frac{(\ell_b' + \ell_{ab})\ell_b''}{\ell_b} \quad \text{et} \quad E(I_a' \cup I_{ab}, I_a'') = \frac{1}{6}\ell_a.$$

D'après le lemme 3.19, on a

$$\begin{aligned}
E(I_a, I_b) &= \frac{\ell'_a + \ell_{ab}}{\ell_a} E((I'_a \cup I_{ab}), I_b) + \frac{\ell''_a}{\ell_a} E(I''_a, I_b) - \frac{(\ell'_a + \ell_{ab})\ell''_a}{\ell_a^2} E(I'_a \cup I_{ab}, I''_a) \\
&= \frac{1}{6\ell_a} \left((\ell'_a + \ell_{ab})^2 + (\ell'_a + \ell_{ab})\ell_b - 3(\ell'_a + \ell_{ab})\ell_{ab} + \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_b} \right. \\
&\quad \left. - 3 \frac{(\ell'_a + \ell_{ab})\ell'_b \ell''_b}{\ell_b} - 3 \frac{\ell'_a \ell'_b \ell_{ab}}{\ell_b} \right. \\
&\quad \left. + \ell''_a{}^2 + \ell''_a \ell_b - 3 \frac{(\ell'_b + \ell_{ab})\ell''_a \ell''_b}{\ell_b} - (\ell'_a + \ell_{ab})\ell''_a \right) \\
&= \frac{1}{6\ell_a} \left(\ell_a^2 + \ell_a \ell_b - 3\ell_a \ell_{ab} - 3\ell'_a \ell''_a + \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_b} - 3 \frac{(\ell'_a + \ell_{ab})\ell'_b \ell''_b}{\ell_b} - 3 \frac{\ell'_a \ell'_b \ell_{ab}}{\ell_b} \right. \\
&\quad \left. - 3 \frac{\ell'_b \ell''_a \ell''_b}{\ell_b} - 3 \frac{\ell_{ab} \ell''_a \ell''_b}{\ell_b} \right).
\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit. \square

Corollaire 3.26. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. Fixons les notations de la figure 5. Pour $i \in \{a, b\}$, posons $m_i := \frac{1}{2}(\ell_i - \ell_{ab})$. On a alors

$$\begin{aligned}
E(I_a, I_b) &\geq \frac{1}{6} \frac{m_a^2}{\ell_a} + \frac{1}{6} \frac{m_b^2}{\ell_b} - \frac{1}{3} \ell_{ab} \frac{m_a}{\ell_a} \frac{m_b}{\ell_b} \\
&\quad \left(= \frac{1}{6} \left(\frac{m_a}{\sqrt{\ell_a}} - \frac{m_b}{\sqrt{\ell_b}} \right)^2 + \frac{1}{3} (\sqrt{\ell_a \ell_b} - \ell_{ab}) \frac{m_a}{\ell_a} \frac{m_b}{\ell_b} \right) \\
&\geq \frac{1}{6} \frac{(\ell_a - \ell_b)^2}{\max(\ell_a, \ell_b)}.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $i \in \{a, b\}$, posons $u_i := \ell'_i - m_i$. On a alors $\ell'_i = m_i + u_i$, $\ell''_i = m_i - u_i$. Posons

$$A := \ell_b \ell'_a \ell''_a + \ell_a \ell'_b \ell''_b + \ell_{ab} (\ell'_a \ell'_b + \ell''_a \ell''_b).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
A &= \ell_b (m_a^2 - u_a^2) + \ell_a (m_b^2 - u_b^2) + \ell_{ab} ((m_a + u_a)(m_b + u_b) + (m_a - u_a)(m_b - u_b)) \\
&= \ell_b m_a^2 + \ell_a m_b^2 + 2\ell_{ab} m_a m_b + 2\ell_{ab} u_a u_b - \ell_b u_a^2 - \ell_a u_b^2.
\end{aligned}$$

Or, on a $\ell_{ab} \leq \ell_a$ et $\ell_{ab} \leq \ell_b$, d'où

$$2\ell_{ab} u_a u_b - \ell_b u_a^2 - \ell_a u_b^2 \leq 2\sqrt{\ell_a} u_a \sqrt{\ell_b} u_b - (\sqrt{\ell_a} u_a)^2 - (\sqrt{\ell_b} u_b)^2 \leq 0.$$

Fixons dorénavant ℓ_a, ℓ_b et ℓ_{ab} , et donc m_a et m_b . La quantité A est maximale lorsque $u_a = u_b = 0$ et vaut alors

$$A_0 := \ell_b m_a^2 + \ell_a m_b^2 + 2\ell_{ab} m_a m_b.$$

D'après le théorème 3.25, la quantité $E(I_a, I_b)$ est donc minimale lorsque $u_a = u_b = 0$ et vaut alors

$$\begin{aligned}
E_0 &:= \frac{1}{6} \ell_a + \frac{1}{6} \ell_b - \frac{1}{2} \ell_{ab} + \frac{1}{6} \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a \ell_b} - \frac{1}{2} \frac{A_0}{\ell_a \ell_b} \\
&= \frac{1}{3} m_a + \frac{1}{3} m_b - \frac{1}{6} \ell_{ab} + \frac{1}{6} \frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a \ell_b} - \frac{1}{2} \frac{m_a^2}{\ell_a} - \frac{1}{2} \frac{m_b^2}{\ell_b} - \ell_{ab} \frac{m_a m_b}{\ell_a \ell_b}.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\ell_{ab}^3}{\ell_a \ell_b} - \ell_{ab} &= \ell_{ab} \left(\frac{\ell_{ab}^2}{\ell_a \ell_b} - 1 \right) \\
&= \ell_{ab} \left(\frac{(\ell_a - 2m_a)(\ell_b - 2m_b)}{\ell_a \ell_b} - 1 \right) \\
&= 4\ell_{ab} \frac{m_a m_b}{\ell_a \ell_b} - 2\ell_{ab} \frac{m_a}{\ell_a} - 2\ell_{ab} \frac{m_b}{\ell_b} \\
&= 4\ell_{ab} \frac{m_a m_b}{\ell_a \ell_b} - 2(\ell_a - 2m_a) \frac{m_a}{\ell_a} - 2(\ell_b - 2m_b) \frac{m_b}{\ell_b} \\
&= 4\ell_{ab} \frac{m_a m_b}{\ell_a \ell_b} - 2m_a + 4\frac{m_a^2}{\ell_a} - 2m_b + 4\frac{m_b^2}{\ell_b},
\end{aligned}$$

d'où

$$E_0 = \frac{1}{6} \frac{m_a^2}{\ell_a} + \frac{1}{6} \frac{m_b^2}{\ell_b} - \frac{1}{3} \ell_{ab} \frac{m_a m_b}{\ell_a \ell_b}.$$

Pour démontrer la dernière égalité, exprimons E_0 à l'aide de ℓ_a , ℓ_b et ℓ_{ab} :

$$\begin{aligned}
3\ell_a \ell_b E_0 &= \ell_b (\ell_a - \ell_{ab})^2 + \ell_a (\ell_b - \ell_{ab})^2 - 2\ell_{ab} (\ell_a - \ell_{ab})(\ell_b - \ell_{ab}) \\
&= -2\ell_{ab}^3 + 3(\ell_a + \ell_b)\ell_{ab}^2 - 6\ell_a \ell_b \ell_{ab} + \ell_a \ell_b (\ell_a + \ell_b).
\end{aligned}$$

Fixons ℓ_a et ℓ_b . L'expression précédente est un polynôme P en ℓ_{ab} , de dérivée

$$P' = -6\ell_{ab}^2 + 6(\ell_a + \ell_b)\ell_{ab} - 6\ell_a \ell_b = -6(\ell_{ab} - \ell_a)(\ell_{ab} - \ell_b).$$

En particulier P est décroissant sur le segment $[0, \min(\ell_a, \ell_b)]$. Puisque ℓ_{ab} appartient à ce segment, on en déduit que

$$6\ell_a \ell_b E_0 \geq P(\min(\ell_a, \ell_b)) = \min(\ell_a, \ell_b) (\ell_a - \ell_b)^2.$$

Le résultat s'ensuit. \square

Corollaire 3.27. — Soient $I_a, I_b \in \text{Seg}_k$ tels que $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. Fixons les notations de la figure 5. Soit $\lambda \in [0, \max(\ell_a - \ell_{ab}, \ell_b - \ell_{ab})]$. Soit $\varrho \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tel que $\max(\ell_a, \ell_b) \leq \varrho \lambda$. Alors, on a

$$E(I_a, I_b) \geq \frac{\lambda}{48\varrho^2}.$$

Démonstration. — Pour $i \in \{a, b\}$, posons $m_i := \frac{1}{2}(\ell_i - \ell_{ab})$. Quitte à échanger I_a et I_b , on peut supposer que $\ell_a \geq \ell_b$, et donc $m_a \geq m_b$.

• Supposons que $m_b \geq \frac{1}{2} m_a$.

On a alors $\min(\ell_a, \ell_b) = \ell_b = \ell_{ab} + 2m_b \geq \ell_{ab} + \frac{1}{2} \lambda$, d'où $\sqrt{\ell_a \ell_b} - \ell_{ab} \geq \frac{1}{2} \lambda$. D'après le corollaire 3.26, on a donc

$$E(I_a, I_b) \geq \frac{1}{6} \lambda \frac{m_a m_b}{\ell_a \ell_b} \geq \frac{\lambda}{48\varrho^2}.$$

• Supposons que $m_b \leq \frac{1}{2} m_a$.

On a alors $|\ell_a - \ell_b| = \ell_a - \ell_b = 2m_a - 2m_b \geq m_a \geq \frac{1}{2} \lambda$. D'après le corollaire 3.26, on a donc

$$E(I_a, I_b) \geq \frac{1}{24} \frac{\lambda^2}{\ell_a} \geq \frac{\lambda}{24\varrho} \geq \frac{\lambda}{48\varrho^2}.$$

\square

4. Morphismes de Lattès

Dans cette section, nous présentons les mesures dont nous allons calculer les énergies mutuelles. Ils s'agit de mesures d'équilibre associées à des morphismes de Lattès, provenant de la multiplication par 2 sur des courbes elliptiques.

4.1. Projections standards. — Soit K un corps et soit E une courbe elliptique sur K .

Définition 4.1. — On appelle *projection standard* sur E tout morphisme $\pi: E \rightarrow \mathbf{P}_K^1$ qui fait commuter un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}_K^1, \\ \downarrow & \nearrow \sim & \\ E/\{\pm 1\} & & \end{array}$$

où $E \rightarrow E/\{\pm 1\}$ est la projection canonique et $E/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_K^1$ est un isomorphisme.

Une telle projection standard sur E est un morphisme de degré 2, ramifié en l'ensemble $E[2]$ des points de 2-torsion de E .

Réciproquement, soit R un ensemble de quatre points distincts de $\mathbf{P}^1(K)$. Soit $\pi_R: E_R \rightarrow \mathbf{P}_K^1$ un revêtement de degré 2 ramifié en les points de R . En choisissant un point rationnel au-dessus de l'un des points de R , E_R acquiert une structure de courbe elliptique. Le morphisme π_R est alors un morphisme standard et l'on a

$$\pi_R(E_R[2]) = R.$$

Dans la suite de ce texte, nous passerons donc librement de couples (E, π) , où E est une courbe elliptique et π une projection standard sur E , à des quadruplets de points distincts de la droite projective, et réciproquement.

4.2. Sur un corps valué complet. — Soit k un corps valué complet de caractéristique différente de 2.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ un quadruplet de points distincts de $\mathbf{P}^1(k)$. Par la construction de la section 4.1, on lui associe une courbe elliptique E_γ et une projection standard $\pi_\gamma: E_\gamma \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. Notons L_γ le morphisme de Lattès associé, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de \mathbf{P}_k^1 qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_\gamma & \xrightarrow{[2]} & E_\gamma \\ \downarrow \pi_\gamma & & \downarrow \pi_\gamma \\ \mathbf{P}_k^1 & \xrightarrow{L_\gamma} & \mathbf{P}_k^1 \end{array}$$

Lorsque $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = 0$ et $\gamma_3 = 1$, on peut décrire la courbe elliptique E_γ par l'équation de Legendre

$$E_\gamma: y^2 = x(x-1)(x-\gamma_4)$$

et le morphisme de Lattès L_γ par la formule

$$L_\gamma: t \in \mathbf{P}_k^1 \mapsto \frac{(t^2 - \gamma_4)^2}{4t(t-1)(t-\gamma_4)} \in \mathbf{P}_k^1.$$

Notation 4.2. — On note μ_γ la mesure d'équilibre sur $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ associée au morphisme de Lattès L_γ^{an} . Elle ne dépend que de l'ensemble $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$. On la note parfois également $\mu_{(E_\gamma, \pi_\gamma)}$.

Cette mesure possède un potentiel continu au sens de la définition 3.2, i).

La notation présentée ici conduit à identifier la mesure μ_γ à son image réciproque sur $\mathbf{P}_{k'}^{1,\text{an}}$ pour toute extension valuée complète k' de k . Aucun problème n'en résulte (*cf.* remarque 3.9).

Dans [FR10, proposition 5.1], Ch. Favre et J. Rivera–Letelier décrivent explicitement la mesure μ_γ sur un corps ultramétrique lorsque $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = 0$ et $\gamma_3 = 1$ (voir aussi [DKY20, proposition 3.2]). On peut toujours se ramener à ce cas par une homographie, et donc décrire μ_γ en général.

Notation 4.3. — Supposons que k est ultramétrique. Il existe une permutation σ de $\{1, 2, 3, 4\}$ telle que $[\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}] \cap [\gamma_{\sigma(3)}, \gamma_{\sigma(4)}] \neq \emptyset$ dans $\mathbf{P}_K^{1,\text{an}}$. On pose

$$I_\gamma := [\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}] \cap [\gamma_{\sigma(3)}, \gamma_{\sigma(4)}].$$

C'est un segment de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ formé de points de type 2 ou 3. Il est indépendant du choix de σ .

Exemple 4.4. — Lorsque $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ et $|\gamma_4| > 1$, on a

$$I_\gamma = [\eta_1, \eta_{|\gamma_4|}].$$

Proposition 4.5. — *Supposons que k est ultramétrique et de caractéristique résiduelle différente de 2. Alors, avec la notation 3.11, on a*

$$\mu_\gamma = \mu_{I_\gamma}.$$

En d'autres termes, la mesure μ_γ est la mesure de masse totale 1 proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur le segment I_γ s'il est non trivial, ou la mesure de Dirac supportée par I_γ . \square

Corollaire 4.6. — *Supposons que*

$$\forall i \neq j, |\gamma_i| = |\gamma_j| = |\gamma_i - \gamma_j|.$$

Alors, on a $I_\gamma = \{\eta_{0,1}\}$ et $\mu_\gamma = \chi_{0,1}$. \square

Il est utile de remarquer que la longueur de I_γ peut être calculée à l'aide d'un birapport. Nous noterons

$$[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] := \frac{(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_4 - \gamma_2)}{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_4 - \gamma_1)} \in K \setminus \{0, 1\}$$

le birapport des points $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ (avec une généralisation convenable de l'expression lorsque l'un des points est à l'infini).

Rappelons que, lorsque l'on modifie l'ordre des points $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, le birapport β peut prendre n'importe laquelle des six valeurs

$$\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}.$$

Lemme 4.7. — *La longueur de I_γ est égale à*

$$\ell(I_\gamma) = \max_{\sigma \in S_4} (|[\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \gamma_{\sigma(3)}, \gamma_{\sigma(4)}]|).$$

Démonstration. — En utilisant l'invariance de la formule à démontrer par permutation des γ_i et l'invariance du birapport par homographie, on se ramène au cas où $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ et $|\gamma_4| > 1$. Un calcul direct basé sur l'exemple 4.4 montre alors que

$$\ell(I_\gamma) = |\gamma_4| = \max_{\sigma \in S_4} (|\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \gamma_{\sigma(3)}, \gamma_{\sigma(4)}|).$$

□

Remarque 4.8. — On peut également décrire la mesure μ_γ dans le cas archimédien. Lorsque $k = \mathbf{C}$, c'est l'image de la mesure de Haar sur $E_\gamma(\mathbf{C})$ par le morphisme $E_\gamma(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Cette mesure présente une densité plus importante au voisinage des points de ramification, ce qui permet de retrouver γ . En particulier, à la différence de la situation ultramétrique, deux quadruplets distincts donnent lieu à deux mesures distinctes.

Introduisons également une notation pour les mesures adéliques formées à partir des mesures précédentes.

Notation 4.9. — Soit K un corps de nombres. Soit $P \in (\mathbf{P}^1(K))^4$ un quadruplet de points distincts. Pour toute place v de K , P définit un élément P_v de $(\mathbf{P}^1(K_v))^4$ et l'on peut considérer la mesure μ_{P_v} associée. Posons

$$\mu_P := (\mu_{P_v})_{v \in M_K}.$$

D'après le corollaire 4.6, c'est une mesure adélique.

Par la construction de la section 4.1, on associe à P une courbe elliptique E_P et une projection standard $\pi_P: E_P \rightarrow \mathbf{P}_K^1$. Notons L_P le morphisme de Lattès sur \mathbf{P}_K^1 correspondant. On a alors

$$\mu_P = \rho_{L_P},$$

au sens de l'exemple 3.5. On notera encore également $\mu_{(E_P, \pi_P)}$ cette mesure.

4.3. En famille. — Nous expliquons maintenant comment définir en famille les mesures associées aux morphismes de Lattès. Considérons la droite affine $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1$ avec coordonnée λ , son ouvert de Zariski

$$\mathcal{Z}^0 := \{\lambda \neq 0, 1\} \subset \mathbf{A}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1$$

et posons

$$\mathcal{X}^0 := \mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1 \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} \mathcal{Z}^0.$$

Dans le facteur $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1$, fixons des coordonnées homogènes $[T_1 : T_2]$. Posons $t := \frac{T_1}{T_2}$ et $u := \frac{T_2}{T_1}$.

Considérons le revêtement de $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1 \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} \mathcal{Z}^0 \subset \mathcal{X}^0$ défini par l'équation $v^2 = t(t-1)(t-\lambda)$ et le revêtement de $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1 \setminus \{0\}) \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} \mathcal{Z}^0 \subset \mathcal{X}^0$ défini par l'équation $w^2 = u(u-1)(u-\lambda^{-1})$. Ces revêtements se recollent par les identifications $u = t^{-1}$ et $w = vt^{-2}$ pour former un revêtement \mathcal{E}^0 de \mathcal{X}^0 de degré 2. Notons $\rho^0: \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{X}^0$ le morphisme obtenu.

Par construction, pour tout $z \in \mathcal{Z}^0$, \mathcal{E}_z^0 est un revêtement de $\mathcal{X}_z^0 \simeq \mathbf{P}_{\kappa(z)}^1$ de degré 2 ramifié en $\infty, 0, 1, \lambda(z)$. Munie du point rationnel situé au-dessus de ∞ , \mathcal{E}_z^0 devient une courbe elliptique dont on peut calculer explicitement l'image des points de 2-torsion :

$$\rho_z^0(\mathcal{E}_z^0[2]) = \{\infty, 0, 1, \lambda(z)\}.$$

La courbe \mathcal{E}^0 est une courbe elliptique relative sur \mathcal{X}^0 et, comme dans la section 4.2, la formule

$$L^0(t) = \frac{(t^2 - \lambda)^2}{4t(t-1)(t-\lambda)}$$

définit un morphisme fini $L^0: \mathcal{X}^0 \rightarrow \mathcal{X}^0$, polarisé de degré 4, qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{[2]} & \mathcal{E}^0 \\ \downarrow \rho^0 & & \downarrow \rho^0 \\ \mathcal{X}^0 & \xrightarrow{L^0} & \mathcal{X}^0 \end{array}.$$

Considérons maintenant l'espace $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1)^4$ avec coordonnées c_1, c_2, c_3, c_4 (sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^4$) et son ouvert de Zariski

$$\mathcal{Z} := \{\forall i \neq j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, c_i \neq c_j\} \subset (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1)^4.$$

Considérons le morphisme $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}^0$ donné par

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) \mapsto [c_1, c_2, c_3, c_4] = \frac{(c_3 - c_1)(c_4 - c_2)}{(c_3 - c_2)(c_4 - c_1)}.$$

Le morphisme obtenu par changement de base

$$\rho^0 \times_{\mathcal{Z}^0} \mathcal{Z}: \mathcal{E}^0 \times_{\mathcal{Z}^0} \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}^0 \times_{\mathcal{Z}^0} \mathcal{Z} \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1 \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} \mathcal{Z}$$

est une courbe elliptique relative dont la fibre au-dessus de $z \in \mathcal{Z}$ est un morphisme ramifié en $\infty, 0, 1, [c_1, c_2, c_3, c_4](z)$. En effectuant le changement de coordonnée global

$$t \mapsto \frac{c_1(c_3 - c_2)t + c_2(c_1 - c_3)}{(c_3 - c_2)t + (c_1 - c_3)}$$

sur le facteur $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1$, on obtient un morphisme

$$\rho: \mathcal{E} := \mathcal{E}^0 \times_{\mathcal{Z}^0} \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X} := \mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^1 \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} \mathcal{Z}$$

au-dessus de \mathcal{Z} qui est une courbe elliptique relative et dont la fibre au-dessus de $z \in \mathcal{Z}$ est un morphisme ramifié en $c_1(z), c_2(z), c_3(z), c_4(z)$.

En tirant en arrière le morphisme L^0 , on obtient un morphisme L fini polarisé de degré 4 qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{[2]} & \mathcal{E} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{L} & \mathcal{X} \end{array}.$$

Considérons maintenant deux copies \mathcal{Z}_a et \mathcal{Z}_b de \mathcal{Z} avec coordonnées respectives $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et posons $\mathcal{Z}_{ab} := \mathcal{Z}_a \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} \mathcal{Z}_b$. Notons respectivement Z_a, Z_b et Z_{ab} leur analytifié au-dessus de \mathcal{U}_2 , au sens de la section 2.2. Rappelons la notation 4.2.

Théorème 4.10. — *La fonction*

$$\mathcal{E}_{ab}: z \in Z_{ab} \mapsto \langle \mu_{a(z)}, \mu_{b(z)} \rangle \in \mathbf{R}$$

est log-flottante et continue.

Démonstration. — Posons $X_{ab} := \mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^{1,\text{an}} \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} Z_{ab}$. Notons φ_a (resp. φ_b) le tiré en arrière sur X_{ab} du morphisme de Lattès sur la droite relative sur Z_a (resp. Z_b). D'après [Poi22, lemmes 6.23 et 6.24], les familles de mesures $(\mu_{a(z)})_{z \in Z_{ab}}$ et $(\mu_{b(z)})_{z \in Z_{ab}}$ sont flottantes à potentiels log-flottants. Il découle alors des définitions que la fonction \mathcal{E}_{ab} est log-flottante. Elle est continue par [Poi22, corollaire D]. \square

5. Estimations centrale et globale

Dans cette section, étant donné un espace de Berkovich flottant sur \mathbf{Z} et une fonction log-flottante, nous expliquons comment obtenir, à partir d'une minoration sur la fibre centrale, une minoration uniforme en presque toute place, ainsi que des minoration plus faibles aux places restantes. Ce résultat nous permettra par la suite d'obtenir des minoration globales par des hauteurs.

Fixons le cadre. Soit $N \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Soit \mathcal{Y} un schéma localement de type fini sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$, génériquement non vide. Notons $Y := \mathcal{Y}^{\text{an}}$ son analytifié, au sens de la section 2.2. C'est un espace de Berkovich sur \mathbf{Z} flottant. L'image du morphisme structural $\text{pr}: Y \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{Z})$ est de la forme \mathcal{U}_{N_Y} , où N_Y est un multiple de N .

Rappelons qu'une fonction $f: Y \rightarrow \mathbf{R}$ est dite log-flottante si

$$\forall y \in Y, \forall \varepsilon \in]0, 1], f(y^\varepsilon) = \varepsilon f(y).$$

Lemme 5.1. — *Soit V une partie flottante de Y et supposons qu'il existe $N_V \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{pr}(V) = \mathcal{U}_{N_V}$. Soient $\mathcal{E}, f_1, f_2 \in \mathcal{C}(V, \mathbf{R})$ des fonctions log-flottantes continues. Pour $s \in \mathbf{R}$, posons*

$$V_s := \{y \in V : f_1(y) = s\} \text{ et } V_{>s} := \{y \in V : f_1(y) > s\}.$$

Supposons qu'il existe $s_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que l'application $\text{pr}|_{V_{s_0}}: V_{s_0} \rightarrow \mathcal{U}_{N_V}$ soit fermée et $e_0 \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall y \in V_{s_0} \cap \text{pr}^{-1}(a_0), \mathcal{E}(y) \geq e_0 + f_2(y).$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $t_\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$ et un ensemble fini $M_\alpha \subset M_{\mathbf{Q}}$ tels que

$$\forall v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus M_\alpha, \forall y \in V_{>0} \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \geq \frac{e_0 - \alpha}{s_0} f_1(y) + f_2(y)$$

et

$$\forall v \in M_\alpha, \forall y \in V_{>t_\alpha} \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \geq \frac{e_0 - \alpha}{s_0} f_1(y) + f_2(y).$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in]0, 1[$. L'ensemble

$$W := \{y \in V_{s_0} : \mathcal{E}(y) \geq e_0 - \alpha + f_2(y)\}$$

est un voisinage de $\text{pr}^{-1}(a_0) \cap V_{s_0}$ dans V_{s_0} . Puisque l'application $\text{pr}|_{V_{s_0}}: V_{s_0} \rightarrow \mathcal{U}_{N_V}$ est fermée, W contient une partie de la forme $\text{pr}^{-1}(B_\alpha) \cap V_{s_0}$, où B_α est un voisinage de a_0 dans \mathcal{U}_{N_V} . Il existe une partie finie M_α de $M_{\mathbf{Q}}$ contenant la place infinie et $\varepsilon_\alpha \in]0, 1[$ telles que

$$B_\alpha \supset \bigcup_{v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus M_\alpha} [a_0, a_{v,\infty}[\cup \bigcup_{v \in M_\alpha} [a_0, a_{v,\varepsilon_\alpha}[.$$

Soient $v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus M_{\alpha}$ et $y \in V_{>0} \cap \text{pr}^{-1}(a_v)$. Posons $\varepsilon := s_0/f_1(y) \in \mathbf{R}_{>0}$. Puisque f_1 est log-flottante, on a $f_1(y^\varepsilon) = \varepsilon f_1(y) = s_0$, donc $y^\varepsilon \in \text{pr}^{-1}(B_\alpha) \cap V_{s_0} \subset W$. On en déduit que $\mathcal{E}(y^\varepsilon) \geq e_0 - \alpha + f_2(y^\varepsilon)$ et donc, puisque \mathcal{E} et f_2 sont log-flottantes, que

$$\mathcal{E}(y) \geq \frac{e_0 - \alpha}{\varepsilon} + f_2(y) = \frac{e_0 - \alpha}{s_0} f_1(y) + f_2(y).$$

Posons $t_\alpha := s_0/\varepsilon_\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. Soient $v \in M_\alpha$ et $y \in V_{>t_\alpha} \cap \text{pr}^{-1}(a_v)$. Posons $\varepsilon := s_0/f_1(y) \in]0, \varepsilon_\alpha[$. En raisonnant comme précédemment, on montre que $y^\varepsilon \in W$, puis que

$$\mathcal{E}(y) \geq \frac{e_0 - \alpha}{s_0} f_1(y) + f_2(y).$$

□

Introduisons quelques notations qui nous seront utiles pour présenter une version globale du résultat.

Notation 5.2. — Soit $Q \in \mathcal{Y}(\overline{\mathbf{Q}})$. Le corps résiduel $\kappa(Q)$ est une extension finie de \mathbf{Q} . Pour tout $v \in M_{\mathbf{Q}}$, l'image $L_v(Q)$ de $\text{Spec}(\kappa(Q) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v) \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbf{Q}_v}$ est un ensemble fini de points fermés. Il s'identifie à un ensemble de points de $\text{pr}^{-1}(a_v) \simeq \mathcal{Y}_{\mathbf{Q}_v}^{\text{an}}$.

Pour tout $q \in L_v(Q)$, posons

$$N_q := \frac{[\mathcal{H}(q) : \mathbf{Q}_v]}{[\kappa(Q) : \mathbf{Q}]}.$$

Posons

$$L(Q) := \bigcup_{v \in M_{\mathbf{Q}}} L_v(Q).$$

Pour toute partie V de Y et toute fonction $\mathcal{E} : V \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, on pose

$$h_{\mathcal{E}, V}(Q) := \sum_{q \in L(Q) \cap V} N_q \mathcal{E}(q).$$

On pose $h_{\mathcal{E}} := h_{\mathcal{E}, Y}$.

Exemple 5.3. — Considérons le schéma \mathbf{G}_m sur \mathbf{Z} avec coordonnée T et la fonction

$$\log^+(|T|) : \mathbf{G}_m^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Alors, pour tout $x \in \overline{\mathbf{Q}}$, on a

$$h_{\log^+(|T|)}(x) = h(x).$$

Théorème 5.4. — Soit V une partie flottante de Y et supposons qu'il existe $N_V \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{pr}(V) = \mathcal{U}_{N_V}$. Soient $\mathcal{E}, f_1 : V \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, $f_2 : V \rightarrow \mathbf{R}$ et $g_1 : V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ des fonctions log-flottantes continues.

Pour $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$, posons

$$V_s := \{y \in V : f_1(y) \leq s\}$$

et

$$W_t := \{y \in V : g_1(y) \leq t f_2(y)\}.$$

Supposons que

- i) pour tous $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$, l'application $\text{pr}|_{V_s \cap W_t} : V_s \cap W_t \rightarrow \mathcal{U}_{N_V}$ est propre ;
- ii) il existe $A \in \mathbf{R}_{>0}$ et une famille presque nulle $(B_v)_{v \in M_{\mathbf{Q}}}$ d'éléments de \mathbf{R} tels que

$$\forall v \in M_{\mathbf{Q}}, \forall y \in V \cap \text{pr}^{-1}(a_v), g_1(y) \leq A f_1(y) + B_v ;$$

iii) il existe $r_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\tau: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$, avec $\lim_{+\infty} \tau = +\infty$, tels que

$$\forall r \geq r_0, \forall y \in W_{\tau(r)} \cap \text{pr}^{-1}(a_0), \mathcal{E}(y) \geq \frac{1}{r} f_2(y).$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $C \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$\sum_{q \in L_{f_1}(Q) \cap V} N_q \mathcal{E}(q) \geq C \left(\sum_{q \in L_{f_1}(Q) \cap V} N_q f_2(q) - \varepsilon \sum_{q \in L(Q) \cap V} N_q f_1(q) \right) + D,$$

où $L_{f_1}(Q) := \{q \in L(Q) : f_1(q) > 0\}$.

Démonstration. — Pour $r, s \in \mathbf{R}_{>0}$, posons

$$Z_{r,s} := \{y \in W_{\tau(r)} : f_1(y) = s\} \text{ et } Z_{r,>s} := \{y \in W_{\tau(r)} : f_1(y) > s\}.$$

Soit $s \in \mathbf{R}_{>0}$. Soit $r \in [r_0, +\infty[$ tel que $\tau(r) \geq \frac{2A}{\varepsilon}$. La partie $W_{\tau(r)}$ de V est log-flottante. Il suit de l'hypothèse i) que l'application $\text{pr}|_{Z_{r,s}} : Z_{r,s} \rightarrow \mathcal{U}_{N_V}$ est propre, donc fermée. On a donc

$$\forall y \in Z_{r,s} \cap \text{pr}^{-1}(a_0), \mathcal{E}(y) \geq \frac{1}{r} f_2(y).$$

D'après le lemme 5.1 appliqué avec $e_0 = 0$, $f_1 = f_1$, $f_2 = \frac{1}{r} f_2$ et $\alpha = \frac{s\varepsilon}{2r}$, il existe $t_r \in \mathbf{R}_{>0}$ et un ensemble fini M_r de places de \mathbf{Q} tels que

$$\forall v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus M_r, \forall y \in Z_{r,>0} \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \geq -\frac{\varepsilon}{2r} f_1(y) + \frac{1}{r} f_2(y)$$

et

$$\forall v \in M_r, \forall y \in Z_{r,>t_r} \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \geq -\frac{\varepsilon}{2r} f_1(y) + \frac{1}{r} f_2(y).$$

Soit $v \in M_r$. Par hypothèse, l'ensemble

$$\{y \in W_{\tau(r)} \cap \text{pr}^{-1}(a_v) : f_1(y) \leq t_r\}$$

est compact. On en déduit qu'il existe une constante $D_v \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall y \in Z_{r,>0} \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \geq -\frac{\varepsilon}{2r} f_1(y) + \frac{1}{r} f_2(y) + D_v.$$

Soit $Q \in \mathcal{Y}(\overline{\mathbf{Q}})$. Posons $L_{f_1,r}(Q) := L_{f_1}(Q) \cap W_{\tau(r)}$ et $L'_{f_1,r}(Q) := L_{f_1}(Q) \setminus L_{f_1,r}(Q)$. Pour tout $q \in L'_{f_1,r}(Q) \cap V$, on a donc

$$f_2(q) \leq \frac{1}{\tau(r)} g_1(q) \leq \frac{A}{\tau(r)} f_1(q) + \frac{B_v}{\tau(r)}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{q \in L_{f_1, r}(Q) \cap V} N_q \mathcal{E}(q) &\geq \sum_{q \in L_{f_1, r}(Q) \cap V} N_q \left(\frac{1}{r} f_2(q) - \frac{\varepsilon}{2r} f_1(q) \right) + \sum_{v \in M_r} D_v \\
&\geq \sum_{q \in L_{f_1}(Q) \cap V} N_q \left(\frac{1}{r} f_2(q) - \frac{\varepsilon}{2r} f_1(q) \right) + \sum_{v \in M_r} D_v \\
&\quad - \sum_{q \in L'_{f_1, r}(Q) \cap V} N_q \frac{1}{r} f_2(q) \\
&\geq \frac{1}{r} \sum_{q \in L_{f_1}(Q) \cap V} N_q f_2(q) - \frac{\varepsilon}{2r} \sum_{q \in L(Q) \cap V} N_q f_1(q) + \sum_{v \in M_r} D_v \\
&\quad - \frac{A}{r\tau(r)} \sum_{q \in L'_{f_1, r}(Q) \cap V} N_q f_1(q) - \frac{1}{r\tau(r)} \sum_{v \in M_{\mathbf{Q}}} B_v \\
&\geq \frac{1}{r} \sum_{q \in L_{f_1}(Q) \cap V} N_q f_2(q) - \frac{1}{r} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{\tau(r)} \right) \sum_{q \in L(Q) \cap V} N_q f_1(q) \\
&\quad + \sum_{v \in M_r} D_v - \frac{1}{r\tau(r)} \sum_{v \in M_{\mathbf{Q}}} B_v.
\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit. \square

Remarque 5.5. — Le résultat du lemme 5.1 reste valable *mutatis mutandis* en remplaçant V par un espace de Berkovich flottant sur un anneau d'entiers de corps de nombres.

Nous présentons maintenant des versions simplifiées du théorème 5.4. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant.

Lemme 5.6. — Soit K un corps de nombres. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in (K^*)^n$, on a

$$\sum_{v \in M_K} N_v \max_{1 \leq i \leq n} (|\log(|u_i|)|_v) \leq (n+1) h(u).$$

Démonstration. — Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in (K^*)^n$. Pour $v \in M_K$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $m_{i,v} := \min(0, \log(|u_i|_v))$ et $M_{i,v} := \max(0, \log(|u_i|_v))$. Pour $v \in M_K$, posons $m_v := \min_{1 \leq i \leq n} (m_{i,v})$ et $M_v := \max_{1 \leq i \leq n} (M_{i,v})$.

On a

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{v \in M_K} \sum_{i=1}^n N_v \log(|u_i|_v) \\
&= \sum_{v \in M_K} \sum_{i=1}^n N_v (m_{i,v} + M_{i,v}) \\
&\leq \sum_{v \in M_K} N_v (m_v + nM_v),
\end{aligned}$$

d'où

$$- \sum_{v \in M_K} N_v m_v \leq n \sum_{v \in M_K} N_v M_v.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in M_K} N_v \max_{1 \leq i \leq n} (|\log(|u_i|)|_v) &= \sum_{v \in M_K} N_v \max_{1 \leq i \leq n} (\max(M_{v,i}, -m_{v,i})) \\
&= \sum_{v \in M_K} N_v \max(M_v, -m_v) \\
&\leq \sum_{v \in M_K} N_v (M_v - m_v) \\
&\leq (n+1) \sum_{v \in M_K} N_v M_v.
\end{aligned}$$

□

Le résultat qui suit propose des versions simplifiées de la conclusion du théorème 5.4, sous certaines hypothèses.

Corollaire 5.7. — *Plaçons-nous dans le cadre du théorème 5.4 avec $V = Y$.*

i) *Supposons qu'il existe une famille finie $F_1 = (F_{1,i})_{i \in I_1}$ d'éléments inversibles de $\mathcal{O}(\mathcal{Y})$ telle que*

$$f_1 = \max_{i \in I_1} (|\log(|F_{1,i}|)|).$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $C \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$h_{\mathcal{E}}(Q) \geq C \left(\sum_{q \in L_{f_1}(Q)} N_q f_2(q) - \varepsilon h(F_1(Q)) \right) + D.$$

ii) *Supposons, en outre, qu'il existe une famille finie $F_2 = (F_{2,i})_{i \in I_2}$ d'éléments inversibles de $\mathcal{O}(\mathcal{Y})$ telle que*

$$f_2 = \max_{i \in I_2} (|\log(|F_{2,i}|)|)$$

et que, pour tout $y \in Y$, on ait

$$(\forall i \in I_1, |F_{1,i}(y)| = 1) \implies (\forall i \in I_2, |F_{2,i}(y)| = 1).$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $C \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$h_{\mathcal{E}}(Q) \geq C (h(F_2(Q)) - \varepsilon h(F_1(Q))) + D.$$

iii) *Supposons, en outre, que $F_1 = F_2$. Alors, il existe $C \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait*

$$h_{\mathcal{E}}(Q) \geq C h(F_2(Q)) + D.$$

□

Remarque 5.8. — L'énoncé du corollaire 5.7 reste valable en remplaçant partout $h_{\mathcal{E}}(Q)$ par $\sum_{q \in L_{f_1}(Q)} N_q \mathcal{E}(q)$.

Intéressons-nous maintenant à des simplifications des hypothèses du théorème 5.4, rendues possibles par le résultat suivant.

Lemme 5.9. — Soit K un corps de nombres. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $P \in K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$. Il existe $A \in \mathbf{R}_{>0}$ et une famille presque nulle $(B_v)_{v \in M_K}$ d'éléments de $\mathbf{R}_{\geq 0}$ telles que, pour toute $v \in M_K$ et tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in (K_v^*)^n$, on ait

$$\log(|P(x)|_v) \leq A \max_{1 \leq i \leq n} (|\log(|x_i|_v)|) + B_v.$$

Démonstration. — Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{Z}^n$, posons $|h| := \sum_{i=1}^n |h_i|$ et $T^h := \prod_{i=1}^n T_i^{h_i}$. Écrivons P sous la forme

$$P = \sum_{h \in H} a_h T^h,$$

où H est une partie finie de \mathbf{Z}^n . On peut supposer que $P \neq 0$ et que, pour tout $h \in H$, $a_h \neq 0$.

Soit $v \in M_K$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in (K_v^*)^n$. Posons $M_x := \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|_v, |x_i|_v^{-1})$ et $m_x := \log(M_x) = \max_{1 \leq i \leq n} (|\log(|x_i|_v)|)$.

- Supposons que $v \in M_{f,K}$. On a alors

$$\begin{aligned} |P(x)|_v &\leq \max_{h=(h_1, \dots, h_n) \in E} \left(|a_h|_v \prod_{i=1}^n |x_i|_v^{h_i} \right) \\ &\leq \max_{h \in H} (|a_h|_v M_x^{|h|}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \log(|P(x)|_v) &\leq \max_{h \in H} (\log(|a_h|_v) + |h| m_x) \\ &\leq \max_{h \in H} (|h|) m_x + \max_{h \in H} (\log(|a_h|_v)). \end{aligned}$$

- Supposons que $v \in M_{\infty,K}$. On a alors

$$|P(x)|_v \leq \#H \max_{h=(h_1, \dots, h_n) \in H} \left(|a_h|_v \prod_{i=1}^n |x_i|_v^{h_i} \right),$$

d'où il découle que

$$\log(|P(x)|_v) \leq \max_{h \in H} (|h|) m_x + \max_{h \in H} (\log(|a_h|_v)) + \log(\#H).$$

□

Le résultat de simplification promis en découle.

Lemme 5.10. — Supposons qu'il existe une famille finie $F_1 = (F_{1,i})_{i \in I_1}$ d'éléments inversibles de $\mathcal{O}(\mathcal{Y})$ telle que

$$f_1 = \max_{i \in I_1} (|\log(|F_{1,i}|)|),$$

ainsi qu'une famille finie $(P_j)_{j \in J_1}$ d'éléments de $\mathbf{Q}[T_i, T_i^{-1}, i \in I_1]$ telle que

$$g_1 \leq \max_{j \in J_1} (\log(|P_j(F_1)|)).$$

Alors l'hypothèse ii) figurant dans l'énoncé du théorème 5.4 est satisfaite. □

Pour conclure cette section, nous proposons un exemple d'utilisation du lemme 5.1 pour obtenir une majoration.

Proposition 5.11. — Soit V une partie flottante de Y et supposons qu'il existe $N_V \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{pr}(V) = \mathcal{U}_{N_V}$. Soit $\mathcal{E}: V \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ une fonction log-flottante continue. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments inversibles de $\mathcal{O}(V)$. Pour $r \in \mathbf{R}_{>0}$, posons

$$W_r := \{y \in V : \max_{i \in I} (|F_i(y)|, |F_i^{-1}(y)|) = r\}$$

et

$$W'_r := \{y \in V : \min_{i \in I} (|F_i(y)|) < r^{-1} \text{ ou } \max_{i \in I} (|F_i(y)|) > r\}.$$

Supposons qu'il existe $r_0 \in \mathbf{R}_{>1}$ tel que l'application $\text{pr}|_{W_{r_0}}: W_{r_0} \rightarrow \mathcal{U}_{N_V}$ soit fermée et $e_0 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tel que

$$\forall y \in W_{r_0} \cap \text{pr}^{-1}(a_0), \mathcal{E}(y) \leq e_0.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $s_\alpha \in \mathbf{R}_{>1}$ et un ensemble fini M_α de places de \mathbf{Q} tels que

$$\forall v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus M_\alpha, \forall y \in W'_1 \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \leq \frac{e_0 + \alpha}{\log(r_0)} \max_{i \in I} (|\log(|F_i(y)|)|)$$

et

$$\forall v \in M_\alpha, \forall y \in W'_{s_\alpha} \cap \text{pr}^{-1}(a_v), \mathcal{E}(y) \leq \frac{e_0 + \alpha}{\log(r_0)} \max_{i \in I} (|\log(|F_i(y)|)|).$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. Le résultat découle du lemme 5.1 appliqué avec $\mathcal{E} = -\mathcal{E}$, $f_1 = \max_{i \in I} (|\log(|F_i|)|)$, $f_2 = 0$, $V = V$, $s_0 = \log(r_0)$ et $e_0 = -e_0$, $\alpha = \alpha$. \square

Une fois ce résultat appliqué, pour obtenir une majoration globale de la fonction \mathcal{E} , il reste à traiter le cas de « bonne réduction » ($|F_i| = 1$ pour tout i), qui est généralement plus simple, et celui des compacts $\{s_\alpha \leq |F_i| \leq s_\alpha^{-1}\} \cap \text{pr}^{-1}(a_v)$, pour v appartenant à l'ensemble fini de places M_α , où l'on sait qu'une majoration existe *a priori*.

Remarque 5.12. — Comme pour le lemme 5.1 (cf. remarque 5.5), le résultat de la proposition 5.11 reste valable en remplaçant V par un espace de Berkovich flottant sur un anneau d'entiers de corps de nombres.

6. Minoration de l'énergie mutuelle globale

Dans cette section, nous combinons les résultats de la section 5 aux estimations sur la fibre centrale de la section 3.2 pour obtenir une minoration de l'énergie mutuelle globale. Nous reprenons les notations de la section ??.

Posons

$$Z'_a := \{a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, a_4 = \infty\} \subset Z_a,$$

$$Z'_b := \{b_1 \neq \infty, b_2 \neq \infty, b_3 \neq \infty, b_4 = 0\} \subset Z_b$$

et $Z'_{ab} := Z'_a \times_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]} Z'_b \subset Z_{ab}$. D'après le théorème 4.10, la fonction

$$\mathcal{E}_{ab}: z \in Z'_{ab} \mapsto \langle \mu_{a(z)}, \mu_{b(z)} \rangle,$$

où $a = (a_1, a_2, a_3, \infty)$ et $b = (b_1, b_2, b_3, 0)$, est continue.

Notons \mathcal{Y}'_{ab} l'ouvert de Zariski de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^5$ avec coordonnées homogènes $[a_1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3]$ défini par les conditions

$$\mathcal{Y}'_{ab} := \{\forall i, a_i \neq 0, b_i \neq 0, \forall i \neq j, a_i \neq a_j, b_i \neq b_j\} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]}^5.$$

Son analytifié Y'_{ab} est un quotient de Z'_{ab} .

L'invariance de l'énergie mutuelle par changement de coordonnées assure que, pour tout $z \in Z'_{ab}$ et tout $s \in \mathcal{H}(z) \setminus \{0\}$, on a

$$\langle \mu_{sa(z)}, \mu_{sb(z)} \rangle = \langle \mu_{a(z)}, \mu_{b(z)} \rangle.$$

Par conséquent, l'application \mathcal{E}_{ab} se factorise par Y'_{ab} .

Rappelons que, d'après la proposition 4.5, si $z \in \text{pr}^{-1}(a_0)$, les mesures $\mu_{a(z)}$ et $\mu_{b(z)}$ s'identifient à des mesures de Lebesgue sur des segments. En particulier, on peut calculer leur énergie mutuelle en utilisant les résultats de la section 3.2.

Le but de cette section est de démontrer une minoration de l'énergie mutuelle globale $h_{\mathcal{E}_{ab}}$ sur $\mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$. Dans un premier temps, nous minorerons $h_{\mathcal{E}_{ab}}$ par une hauteur.

Notation 6.1. — Pour $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$, posons

$$\begin{aligned} h_{ab}([Q]) &:= h([a_1(Q) : a_2(Q) : a_3(Q) : b_1(Q) : b_2(Q) : b_3(Q)]) \\ &= \sum_{q \in L(Q)} \max_{1 \leq i, j \leq 3} (\log(|a_i(q)|), \log(|b_j(q)|)) \\ &= \sum_{q \in L(Q)} \max_{1 \leq i, j \leq 3} \left(0, \log \left(\left| \frac{a_i(q)}{b_1(q)} \right| \right), \log \left(\left| \frac{b_j(q)}{b_1(q)} \right| \right) \right) \end{aligned}$$

Pour des raisons pratiques, posons

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) := (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3).$$

Lemme 6.2. — *Considérons la fonction de Y'_{ab} dans \mathbf{R} définie par*

$$f_1 := \max_{i \neq j} \left(\left| \log \left(\left| \frac{u_i}{u_j} \right| \right) \right|, \left| \log \left(\left| \frac{u_i}{u_j} - 1 \right| \right) \right| \right).$$

Il existe $C_1, D_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$h_{f_1}(Q) \leq C_1 h_{ab}([Q]) + D_1.$$

Démonstration. — Soit $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$. D'après le lemme 5.6, on a

$$h_{f_1}(Q) \leq 61 \sum_{q \in L(Q)} N_q \max_{i \neq j} \left(0, \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} \right| \right), \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} - 1 \right| \right) \right).$$

Soient $i, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ avec $i \neq j$. Pour tout $q \in Y'_{ab}$, on a

$$\begin{aligned} \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} \right| \right) &\leq \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{b_1(q)} \right| \right) - \log \left(\left| \frac{u_j(q)}{b_1(q)} \right| \right) \\ &\leq 2 \max \left(\left| \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{b_1(q)} \right| \right) \right|, \left| \log \left(\left| \frac{u_j(q)}{b_1(q)} \right| \right) \right| \right). \end{aligned}$$

Pour tout $q \in Y'_{ab}$, on a également

$$\begin{aligned} \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} - 1 \right| \right) &\leq \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} \right| + 1 \right) \\ &\leq \log \left(2 \max \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} \right|, 0 \right) \right) \\ &\leq \log(2) + 2 \max \left(\left| \log \left(\left| \frac{u_i(q)}{b_1(q)} \right| \right) \right|, \left| \log \left(\left| \frac{u_j(q)}{b_1(q)} \right| \right) \right| \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$h_{f_1}(Q) \leq 61 \log(2) + 122 \sum_{q \in L(Q)} N_q \max_{1 \leq i \leq 6} (|\log(|\frac{u_i(q)}{b_1(q)}|)|)$$

et on conclut par le lemme 5.6. \square

Lemme 6.3. — Soit $\rho \in [1, +\infty[$. Considérons les fonctions de Y'_{ab} dans \mathbf{R} définies par

$$f_2 := \max(0, \text{smax}_{1 \leq i, j \leq 3} (\log(|\frac{a_i}{b_j}|)))$$

et

$$g_1 := \max_{i, j, k \text{ distincts}} \left(\log\left(|\frac{a_i - a_j}{a_i - a_k}|\right), \log\left(|\frac{b_j}{b_k} \frac{b_k - b_i}{b_j - b_i}|\right) \right).$$

Soit $q \in Y'_{ab} \cap \pi^{-1}(a_0)$ tel que $g_1(q) \leq \rho f_2(q)$. Alors, on a

$$\mathcal{E}_{ab}(q) \geq \frac{1}{48\rho^2} f_2(q).$$

Démonstration. — On peut supposer que $|a_3(q)| \geq |a_2(q)| \geq |a_1(q)|$ et $|b_3(q)| \geq |b_2(q)| \geq |b_1(q)|$. On a alors $f_2(q) = \max(0, \log(|\frac{a_3(q)}{b_2(q)}|), \log(|\frac{a_2(q)}{b_1(q)}|))$.

Rappelons que l'énergie commune est invariante par changement de coordonnées sur \mathbf{P}^1 . Le changement de t en t^{-1} a pour effet de remplacer $(a_1(q), a_2(q), a_3(q), \infty)$ par $(b_3^{-1}(q), b_2^{-1}(q), b_1^{-1}(q), 0)$ et $(b_1(q), b_2(q), b_3(q), 0)$ par $(a_3^{-1}(q), a_2^{-1}(q), a_1^{-1}(q), 0)$. En particulier, $\frac{a_3(q)}{b_2(q)}$ et $\frac{a_2(q)}{b_1(q)}$ sont échangés par cette opération. On peut donc supposer que $f_2(q) = \max(0, \log(|\frac{a_3(q)}{b_2(q)}|))$.

On peut également supposer que $f_2(q) > 0$, autrement dit, que $|a_3(q)| > |b_2(q)|$.

Avec la notation 4.3, considérons les segments de $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$ suivants : $I_1 := I_{(a_1(q), a_2(q), a_3(q), \infty)}$ et $I_2 := I_{(b_1(q), b_2(q), b_3(q), 0)}$. L'interprétation de leur longueur en termes de birapport (cf. lemme 4.7) assure que l'on a

$$\max(\ell(I_1), \ell(I_2)) \leq g_1(q) \leq \rho f_2(q).$$

- Supposons que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Notons d_{12} la distance de I_1 à I_2 . On a alors $\ell_1 + \ell_2 + d_{12} \geq \log(|\frac{a_3(q)}{b_2(q)}|)$, cf. figure 6. En utilisant le théorème 3.21, on en déduit que

$$\mathcal{E}_{ab}(q) \geq \frac{1}{24} \log\left(|\frac{a_3(q)}{b_2(q)}|\right) \geq \frac{1}{48\rho^2} f_2(q).$$

- Supposons que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

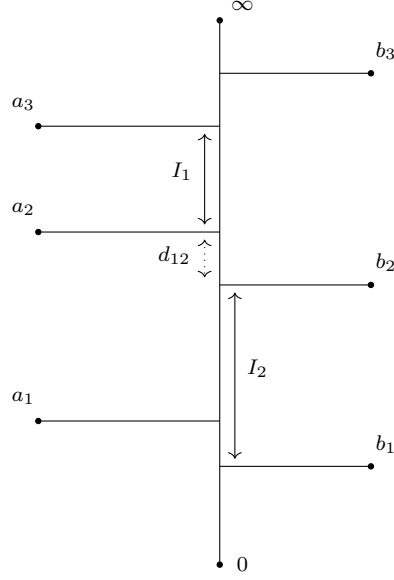
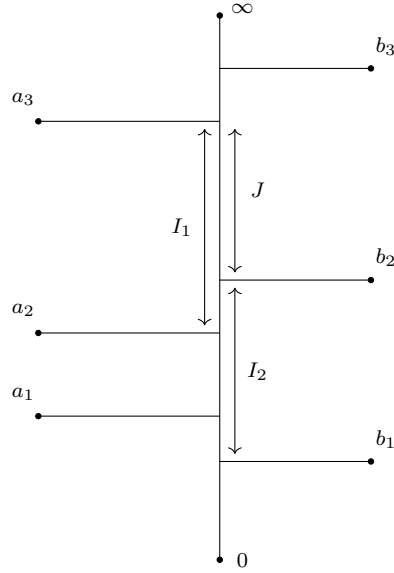
Alors, $I_1 \setminus I_2$ contient un intervalle J de longueur supérieure ou égale à $\log(|\frac{a_3(q)}{b_2(q)}|)$, cf. figure 7. D'après le corollaire 3.27 appliqué avec $\lambda = f_2(q)$, on a donc

$$\mathcal{E}_{ab}(q) \geq \frac{1}{48\rho^2} f_2(q).$$

\square

Lemme 6.4. — Avec les notations du lemme 6.3, il existe $C_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$h_{f_2}(Q) \geq C_2 h_{ab}([Q]).$$

FIGURE 6. Segments I_1 et I_2 disjoints.FIGURE 7. Segments I_1 et I_2 qui se rencontrent.

Démonstration. — Posons $P := \prod_{i=1}^3 \frac{a_i}{b_i} : Y'_{ab} \rightarrow \mathbf{R}$. Pour tout $q \in Y'_{ab}$, on a

$$\begin{aligned}
 \operatorname{smax}_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\log \left(\left| \frac{a_i(q)}{b_j(q)} \right| \right) \right) &= \operatorname{smax}_{1 \leq i \leq 3} (\log(|a_i(q)|) + \log(|b_j(q)^{-1}|)) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq 3} (\log(|a_i(q)|)) + \operatorname{smax}_{1 \leq i \leq 3} (\log(|b_j(q)^{-1}|)) \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{smax}_{1 \leq i \leq 3} (\log(|a_i(q)|)) + \max_{1 \leq i \leq 3} (\log(|b_j(q)^{-1}|)) \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \log(|a_i(q)|) - \min_{1 \leq i \leq 3} (\log(|a_i(q)|)) \right)
 \end{aligned}$$

Soit $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$. À l'aide de l'inégalité précédente et du lemme 5.6, on obtient

$$h_{f_2}(Q) \geq \frac{1}{20} \sum_{q \in L(Q)} N_q \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|\log (|P(q) \frac{b_j(q)}{a_i(q)}|)|).$$

Soient $i, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Pour tout $q \in Y'_{ab}$, on a

$$\left| \log \left(\left| \frac{b_i(q)}{b_j(q)} \right| \right) \right| \leq \left| \log \left(\left| P(q) \frac{b_i(q)}{a_1(q)} \right| \right) \right| + \left| \log \left(\left| P(q) \frac{b_j(q)}{a_1(q)} \right| \right) \right|$$

et

$$\left| \log \left(\left| \frac{a_i(q)}{a_j(q)} \right| \right) \right| \leq \left| \log \left(\left| P(q) \frac{b_1(q)}{a_i(q)} \right| \right) \right| + \left| \log \left(\left| P(q) \frac{b_1(q)}{a_j(q)} \right| \right) \right|.$$

Soit $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Pour tout $q \in Y'_{ab}$, il existe $u, v \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ tels que

$$\log \left(\left| \frac{a_k(q)}{b_1(q)} \right| \right) = \text{smax}_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\log \left(\left| \frac{a_i(q)}{b_j(q)} \right| \right) \right) + \log \left(\left| \frac{a_k(q)}{a_u(q)} \right| \right) + \log \left(\left| \frac{b_v(q)}{b_1(q)} \right| \right).$$

Par conséquent, pour tout $q \in Y'_{ab}$, on a

$$\log \left(\left| \frac{a_k(q)}{b_1(q)} \right| \right) \leq f_2(q) + \max_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\left| \log \left(\left| \frac{a_i(q)}{a_j(q)} \right| \right) \right| \right) + \max_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\left| \log \left(\left| \frac{b_i(q)}{b_j(q)} \right| \right) \right| \right)$$

En combinant les inégalités précédentes, on obtient finalement

$$\begin{aligned} h_{ab}([Q]) &= \sum_{q \in L(Q)} N_q \max_{1 \leq i, j \leq 3} \left(0, \log \left(\left| \frac{a_i(q)}{b_1(q)} \right| \right), \log \left(\left| \frac{b_j(q)}{b_1(q)} \right| \right) \right) \\ &\leq h_{f_2}(Q) + 4 \sum_{q \in L(Q)} N_q \max_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\left| \log \left(\left| P(q) \frac{b_j(q)}{a_i(q)} \right| \right) \right| \right) \\ &\leq 81 h_{f_2}(Q). \end{aligned}$$

□

Théorème 6.5. — Il existe $C_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D_0 \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q) \geq C_0 h_{ab}([Q]) + D_0.$$

Démonstration. — Définissons les fonctions f_1 , f_2 et g_1 comme dans les lemmes 6.2 et 6.3. Montrons que les trois conditions du théorème 5.4 sont satisfaites pour $V = Y'_{ab}$.

i) Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$. On a

$$V_s := \left\{ e^{-s} \leq \left| \frac{u_i}{u_j} \right|, \left| \frac{u_i - u_j}{u_j} \right| \leq e^s, 1 \leq i, j \leq 6 \right\} \subset Y'_{ab},$$

donc l'application $V_s \rightarrow \mathcal{U}_2$ est propre. La condition s'en déduit.

ii) Pour tous i, j, k distincts, on a

$$\log \left(\left| \frac{a_i - a_j}{a_i - a_k} \right| \right) = \log \left(\left| 1 - \frac{a_j}{a_i} \right| \right) - \log \left(\left| 1 - \frac{a_k}{a_i} \right| \right)$$

et

$$\log \left(\left| \frac{b_j}{b_k} \frac{b_k - b_i}{b_j - b_i} \right| \right) = \log \left(\left| \frac{b_j}{b_k} \right| \right) + \log \left(\left| \frac{b_k}{b_i} - 1 \right| \right) - \log \left(\left| \frac{b_j}{b_i} - 1 \right| \right).$$

La condition découle alors du lemme 5.10.

iii) Cette condition découle du lemme 6.3.

On peut donc appliquer le théorème 5.4. Il assure que, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, il existe $C_{0,\varepsilon} \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D_{0,\varepsilon} \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait

$$h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q) \geq C_{0,\varepsilon} \left(\sum_{q \in L_{f_1}(Q)} N_q f_2(q) - \varepsilon \sum_{q \in L(Q)} N_q f_1(q) \right) + D_{0,\varepsilon},$$

d'où

$$h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q) \geq C_{0,\varepsilon} (h_{f_2}(Q) - \varepsilon h_{f_1}(Q)) + D_{0,\varepsilon},$$

en utilisant le fait que f_2 est nulle dès que f_1 l'est. On conclut à l'aide des lemmes 6.2 et 6.4 en choisissant ε assez petit. \square

Remarque 6.6. — Signalons que tous les arguments présentés jusqu'ici s'appliquent encore si l'on travaille non plus sur un corps de nombres, mais sur un corps de fonctions de caractéristique différente de 2. En particulier, le théorème 6.5 reste valable dans ce cadre, avec la même preuve. Plus précisément, on peut remplacer \mathbf{Q} par $k(T)$, où k est un corps de caractéristique différente de 2, et appliquer la théorie en prenant comme espace de base non plus l'ouvert \mathcal{U}_2 de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, mais la droite projective de Berkovich $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$.

Remarque 6.7. — Pour illustrer la portée des méthodes employées, montrons comment elles s'adaptent pour obtenir une minoration de l'énergie mutuelle de deux systèmes dynamiques de la forme $P_c: z \mapsto z^2 + c$ avec $c \in \overline{\mathbf{Q}}$.

Ce résultat est bien plus simple à établir que son analogue dans le cas des morphismes de Lattès. Expliquons, tout d'abord, comment adapter les constructions de la section 4. Au lieu de l'espace de modules \mathcal{Z} , considérons la droite affine $\widetilde{\mathcal{Z}} := \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^1$ avec coordonnée u . Notons $\widetilde{\mathcal{X}}$ la droite projective relative au-dessus de $\widetilde{\mathcal{Z}}$ et Π l'endomorphisme de $\widetilde{\mathcal{X}}$ polarisé de degré 2 défini par $z \mapsto z^2 + u$, où z est une coordonnée affine relative sur $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Pour chaque point $z \in \widetilde{\mathcal{Z}}^{\text{an}}$, la fibre de $\widetilde{\mathcal{X}}^{\text{an}}$ au-dessus de z s'identifie à $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(z)}^{1,\text{an}}$, et l'on dispose d'une mesure d'équilibre $\tilde{\mu}_{u(z)}$ associée à l'endomorphisme induit par Π .

Considérons maintenant deux copies $\widetilde{\mathcal{Z}}_c$ et $\widetilde{\mathcal{Z}}_d$ de $\widetilde{\mathcal{Z}}$ avec coordonnées respectives c et d et posons $\widetilde{\mathcal{Z}}_{cd} := \widetilde{\mathcal{Z}}_c \times_{\mathbf{Z}} \widetilde{\mathcal{Z}}_d$. D'après [Poi22, Corollaire D], la fonction

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{cd}: z \in \widetilde{\mathcal{Z}}_{cd}^{\text{an}} \mapsto \langle \tilde{\mu}_{c(z)}, \tilde{\mu}_{d(z)} \rangle \in \mathbf{R}$$

est log-flottante et continue. Notons que, par définition, pour tout $Q \in \widetilde{\mathcal{Z}}_{cd}(\overline{\mathbf{Q}})$, on a

$$\langle P_{c(Q)}, P_{d(Q)} \rangle = h_{\widetilde{\mathcal{E}}_{cd}}(Q).$$

Finalement, notons $\widetilde{\mathcal{Y}}_{cd}$ l'ouvert de Zariski de $\widetilde{\mathcal{Z}}_{cd}$ défini par la condition $c \neq d$.

Suivant le principe exposé à la section 5, pour minorer la fonction $h_{\widetilde{\mathcal{E}}_{cd}}$ sur $\widetilde{\mathcal{Y}}_{cd}(\overline{\mathbf{Q}})$, nous allons chercher à minorer $\widetilde{\mathcal{E}}_{cd}$ sur la fibre centrale. Pour ce faire, reprenons les estimations établies par L. DeMarco, H. Krieger et H. Ye dans [DKY22, Theorem 5.1] : pour tout point z de $\widetilde{\mathcal{Y}}_{cd}$ au-dessus de $|\cdot|_0$, on a

$$\langle \tilde{\mu}_{c(z)}, \tilde{\mu}_{d(z)} \rangle \geq \frac{1}{4} \log^+(|c(z) - d(z)|).$$

De plus, si $|c(z)| = |d(z)| > 1$ et $|c(z) - d(z)| > |c(z)|^{-1/2}$, alors on a

$$\langle \tilde{\mu}_{c(z)}, \tilde{\mu}_{d(z)} \rangle \geq \frac{1}{16} \log |c(z)|.$$

(Ces minoration sont énoncées pour le complété d'un corps de nombres en une place finie ne divisant pas 2, mais les preuves restent valables pour tout corps valué complet ultramétrique de caractéristique résiduelle différente de 2, et en particulier sur la fibre centrale.)

On en déduit aisément que, pour tout point z de $\tilde{\mathcal{Y}}_{cd}$ au-dessus de $|\cdot|_0$, on a

$$\langle \tilde{\mu}_{c(z)}, \tilde{\mu}_{d(z)} \rangle \geq \frac{1}{12} \left(\log(|c(z) - d(z)|) + \frac{1}{2} \log^+(\max(|c(z)|, |d(z)|)) \right).$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 5.4 avec les fonctions

$$\begin{cases} f_1 = \max(\log(|c|), \log(|d|), |\log(|c - d|)|), \\ f_2 = \frac{1}{12} (\log(|c - d|) + \frac{1}{2} \log^+(\max(|c|, |d|))), \\ g_1 = -\infty. \end{cases}$$

En remarquant que, pour tout $z \in \tilde{\mathcal{Y}}_{cd}$, la condition $f_1(z) = 0$ entraîne $\tilde{\mathcal{E}}_{cd}(z) = 0$, on en déduit qu'il existe $C' \in \mathbf{R}_{>0}$ et $D' \in \mathbf{R}$ telles que, pour tout $Q \in \tilde{\mathcal{Y}}_{cd}(\overline{\mathbf{Q}})$, on a

$$h_{\tilde{\mathcal{E}}_{cd}}(Q) \geq C' h(c(Q), d(Q)) + D',$$

où $h(\cdot, \cdot)$ désigne la hauteur logarithmique usuelle sur $\overline{\mathbf{Q}}^2$. Autrement dit, pour tous $c \neq d \in \overline{\mathbf{Q}}$, on a

$$\langle P_c, P_d \rangle \geq C' h(c, d) + D'.$$

Nous obtenons ainsi une démonstration rapide de [DKY22, Theorem 1.7] (sans valeur explicite pour les constantes). Nous renvoyons à *ibid.* pour l'application à la majoration du nombre de points prépériodiques communs à P_c et P_d , uniformément en c et d .

Revenons maintenant au cas des morphismes de Lattès.

Théorème 6.8. — *Il existe $m_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour tout $Q \in \mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$, on ait $h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q) \geq m_0$.*

Démonstration. — On suit fidèlement [DKY20, section 6.3]. Considérons la fonction de Y'_{ab} dans \mathbf{R} définie par

$$m := \min_{i \neq j} \left(\left| \frac{u_i}{u_j} \right|, \left| \frac{u_i - u_j}{u_j} \right|, \left| \frac{u_i}{u_i - u_j} \right| \right).$$

Rappelons que la fonction $\mathcal{E}_{ab}: Y'_{ab} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ est continue. En outre, d'après la remarque 4.8 et les propriétés de l'énergie mutuelle des mesures, elle est strictement positive en tout point de $\pi^{-1}(a_\infty)$.

Pour tout $u \in \mathbf{R}_{>0}$,

$$K_u := \{y \in \pi^{-1}(a_\infty) : m(y) \geq u\}$$

est une partie compacte non vide de $\pi^{-1}(a_\infty)$. Notons $e_0 > 0$ le minimum de \mathcal{E}_{ab} sur K_1 .

Pour tout $e \in]0, e_0[$, posons

$$s(e) := \sup(\{m(y) : y \in \pi^{-1}(a_\infty), \mathcal{E}_{ab}(y) \leq e\}) \in [0, 1].$$

La fonction $s:]0, e_0[\rightarrow [0, 1]$ est décroissante.

Posons $u_0 := \inf(\{s(e) : e \in]0, e_0[\})$. Supposons, par l'absurde, que $u_0 > 0$. Soit $u_1 \in]0, u_0[$ et notons $m > 0$ le minimum de \mathcal{E}_{ab} sur la partie compacte K_{u_1} de $\pi^{-1}(a_\infty)$. Alors, pour tout $e \in]0, m[$, on a $s(e) \leq u_1$ et on aboutit à une contradiction. Nous avons ainsi montré que $u_0 = 0$. On en déduit que $\lim_{e \rightarrow 0} s(e) = 0$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de $\mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q_n) = 0.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q_n) \leq \frac{1}{2n}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit K_n un corps de nombres tel que $Q_n \in \mathcal{Y}'_{ab}(K_n)$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque \mathcal{E}_{ab} est à valeurs positives, on a

$$\sum_{q \in L_\infty(Q_n)} N_q \mathcal{E}_{ab}(q) \leq \frac{1}{2n}.$$

Posons $M_n := \{q \in L_\infty(Q_n) : \mathcal{E}_{ab}(q) \leq \frac{1}{n}\}$. Pour tout $q \in M_n$, on a alors

$$m(q) = \min_{i \neq j} \left(\left| \frac{u_i(q)}{u_j(q)} \right|, \left| \frac{u_i(q) - u_j(q)}{u_j(q)} \right|, \left| \frac{u_i(q)}{u_i(q) - u_j(q)} \right| \right) \leq s\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarquons que l'on a

$$\sum_{q \in L_\infty(Q_n) \setminus M_n} N_q \mathcal{E}_{ab}(q) > \frac{1}{n} \sum_{q \in L_\infty(Q_n) \setminus M_n} N_q,$$

d'où

$$\sum_{q \in M_n} N_q = 1 - \sum_{q \in L_\infty(Q_n) \setminus M_n} N_q > \frac{1}{2}.$$

Il existe un sous-ensemble M'_n de M_n et une fonction $v : Y'_{ab} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ de la forme $\frac{u_i}{u_j}$ ou $(\frac{u_i}{u_j} - 1)^{\pm 1}$ avec $i, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $i \neq j$, tels que

$$\forall q \in M'_n, |v(q)| \leq s\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\sum_{q \in M'_n} N_q > \frac{1}{18}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que v est indépendante de n .

On a alors

$$\sum_{q \in L(Q_n)} N_q |\log(|v(q)|)| > -\frac{1}{18} \log\left(s\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où, d'après le lemme 6.2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{ab}([Q_n]) = +\infty$, ce qui contredit le théorème 6.5. \square

7. Retour aux courbes elliptiques

Dans cette section finale, nous appliquons les inégalités obtenues jusqu'ici pour étudier les images de points de torsion ou de petite hauteur sur des courbes elliptiques.

Soient K un corps de nombres, E une courbe elliptique sur K telle que $E[2] \subset E(K)$ et $\pi : E \rightarrow \mathbf{P}_K^1$ une projection standard. Rappelons que l'on peut associer à ces données une mesure adélique $\mu_{(E, \pi)}$ (cf. notation 4.9) et une hauteur $h_{\mu_{(E, \pi)}}$ (cf. notation 3.8), que nous noterons également $h_{(E, \pi)}$, par souci de simplicité. Cette dernière n'est autre que la hauteur dynamique associée au morphisme de Lattès

correspondant à (E, π) . Rappelons également que, d'après la remarque 3.9, le corps de nombres sur laquelle est définie la courbe elliptique est sans importance pour les calculs d'énergie.

Commençons par réécrire le théorème 6.8 dans le cadre des courbes elliptiques.

Théorème 7.1. — *Il existe $m_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour toutes courbes elliptiques munies de projections standards (E_1, π_1) et (E_2, π_2) sur $\overline{\mathbf{Q}}$ avec $\pi_1(E_1[2]) \neq \pi_2(E_2[2])$, on ait*

$$\langle \mu_{(E_1, \pi_1)}, \mu_{(E_2, \pi_2)} \rangle \geq m_0.$$

Démonstration. — Soient (E_1, π_1) et (E_2, π_2) comme dans l'énoncé. D'après les rappels effectués à la section 3.1, la quantité $\langle \mu_{P_1}, \mu_{P_2} \rangle$ est invariante par changement de coordonnées sur \mathbf{P}^1 . On peut donc supposer que $\pi_1(E_1) = \{a_1, a_2, a_3, \infty\}$ et $\pi_2(E_2) = \{b_1, b_2, b_3, 0\}$, avec $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \overline{\mathbf{Q}}^*$. Posons $P_1 := (a_1, a_2, a_3, \infty) \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})^4$, $P_2 := (b_1, b_2, b_3, 0) \in \overline{\mathbf{Q}}^4$ et $Q_{12} := (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in (\overline{\mathbf{Q}}^*)^5$. On a alors $\mu_{(E_1, \pi_1)} = \mu_{P_1}$ et $\mu_{(E_2, \pi_2)} = \mu_{P_2}$, Q_{12} définit un point de $\mathcal{Y}'_{ab}(\overline{\mathbf{Q}})$ et on a $h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q_{12}) = \langle \mu_{P_1}, \mu_{P_2} \rangle$. Le résultat découle maintenant du théorème 6.8. \square

Pour conclure, nous utilisons un résultat de majoration de l'énergie mutuelle en termes de hauteurs dû à Thomas Gauthier (*cf.* [Gau23]). Il vaut pour des familles quelconques de systèmes dynamiques sur \mathbf{P}^1 . Nous nous contentons de l'énoncer ici dans le cas particulier qui nous intéresse.

Théorème 7.2. — *Il existe une constante $C_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ satisfaisant la propriété suivante. Soit K un corps de nombres. Soient $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in (K^*)^3$ tels que, pour tous $j \neq j'$, $a_j \neq a_{j'}$ et $b_j \neq b_{j'}$. Posons $P_1 := (a_1, a_2, a_3, \infty) \in (\mathbf{P}^1(K))^4$, $P_2 := (b_1, b_2, b_3, 0) \in K^4$ et $Q_{12} := (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in (K^*)^5$. Pour toute partie non vide F de K et tout $\delta \in]0, 1[$, on a*

$$\langle \mu_{P_1}, \mu_{P_2} \rangle \leq 4 \max(h_{\mu_{P_1}}(F), h_{\mu_{P_2}}(F)) + C_1 \left(\delta - \frac{\log(\delta)}{\#F} \right) (h([Q_{12}]) + 1).$$

\square

Théorème 7.3. — *Il existe $m, M \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que, pour tout corps de nombres K , toutes courbes elliptiques E_1 et E_2 sur K avec $E_1[2] \subset E_1(K)$ et $E_2[2] \subset E_2(K)$ et toutes projections standards $\pi_1: E_1 \rightarrow \mathbf{P}_K^1$ et $\pi_2: E_2 \rightarrow \mathbf{P}_K^1$ avec $\pi_1(E_1[2]) \neq \pi_2(E_2[2])$, on ait*

$$\#\{x \in \mathbf{P}^1(\overline{K}) : \max(h_{(E_1, \pi_1)}(x), h_{(E_2, \pi_2)}(x)) \leq m\} \leq M.$$

En particulier, on a

$$\#(\pi_1(E_1[\infty]) \cap \pi_2(E_2[\infty])) \leq M.$$

Démonstration. — Reprenons les notations des théorèmes 6.5, 7.1 et 7.2. Posons $m := \frac{m_0}{8}$.

Soit K un corps de nombres et soient (E_1, π_1) et (E_2, π_2) comme dans l'énoncé. Quitte à effectuer un changement de coordonnées sur \mathbf{P}^1 , on peut supposer que $\pi_1(E_1) = \{a_1, a_2, a_3, \infty\}$ et $\pi_2(E_2) = \{b_1, b_2, b_3, 0\}$, avec $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in K^*$. Posons $P_1 := (a_1, a_2, a_3, \infty) \in (\mathbf{P}^1(K))^4$, $P_2 := (b_1, b_2, b_3, 0) \in K^4$ et $Q_{12} := (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in (K^*)^5$. On a alors $\mu_{(E_1, \pi_1)} = \mu_{P_1}$ et $\mu_{(E_2, \pi_2)} = \mu_{P_2}$. En outre, Q_{12} définit un point de $\mathcal{Y}'_{ab}(K)$ et on a

$$h_{\mathcal{E}_{ab}}(Q_{12}) = \langle \mu_{P_1}, \mu_{P_2} \rangle \text{ et } h_{ab}([Q_{12}]) = h([Q_{12}]).$$

Soit F une partie finie non vide de $\#\{x \in \overline{K} : \max(h_{(E_1, \pi_1)}(x), h_{(E_2, \pi_2)}(x)) \leq m\}$. Il suffit de trouver $M \in \mathbf{R}_{>0}$, indépendante des données telle que $\#F \leq M$. Soit L

une extension de K contenant F . D'après la remarque 3.9, on peut calculer toutes les énergies après extension des scalaires à L .

Il existe $h_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $h \geq h_0$, on ait $\frac{C_0 h + D_0 - 4m}{h+1} \geq \frac{1}{2} C_0$.

• Supposons que $h([Q_{12}]) \geq h_0$.

D'après le théorème 6.5 et le théorème 7.2 appliqué avec $\delta_0 := \min(\frac{1}{2}, \frac{C_0}{4C_1})$, on a

$$C_0 h([Q_{12}]) + D_0 \leq 4m + C_1 \left(\delta_0 - \frac{\log(\delta_0)}{\#F} \right) (h([Q_{12}]) + 1),$$

d'où

$$\#F \leq \frac{-C_1 \log(\delta_0)}{\frac{C_0 h([Q_{12}]) + D_0 - 4m}{h([Q_{12}]) + 1} - C_1 \delta_0} \leq \frac{-4C_1 \log(\delta_0)}{C_0}.$$

• Supposons que $h([Q_{12}]) \leq h_0$.

D'après le théorème 7.1 et le théorème 7.2 appliqué avec $\delta_1 := \min(\frac{1}{2}, \frac{m_0}{4(h_0+1)C_1})$, on a

$$m_0 \leq 4m + C_1 \left(\delta_1 - \frac{\log(\delta_1)}{\#F} \right) (h([Q_{12}]) + 1),$$

d'où

$$\frac{-C_1 \log(\delta_1)}{\#F} \geq \frac{m_0 - 4m}{h([Q_{12}]) + 1} - C_1 \delta_1 \geq \frac{m_0}{4(h_0 + 1)}$$

et

$$\#F \leq \frac{-4(h_0 + 1)C_1 \log(\delta_1)}{m_0}.$$

Le résultat s'en déduit. \square

Par un argument de spécialisation (cf. [DKY20, §8.2]), la dernière partie du résultat s'étend à tout corps de caractéristique nulle.

Corollaire 7.4. — *Il existe $M \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour tout corps L de caractéristique 0 et toutes courbes elliptiques munies de projections standards (E_1, π_1) et (E_2, π_2) sur L avec $\pi_1(E_1[2]) \neq \pi_2(E_2[2])$, on ait*

$$\#(\pi_1(E_1[\infty]) \cap \pi_2(E_2[\infty])) \leq M.$$

\square

Références

- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [BFT18] Fedor Bogomolov, Hang Fu, and Yuri Tschinkel. Torsion of elliptic curves and unlikely intersections. In *Geometry and physics. Vol. I*, pages 19–37. Oxford Univ. Press, Oxford, 2018.
- [BT07] Fedor Bogomolov and Yuri Tschinkel. Algebraic varieties over small fields. In *Diophantine geometry*, volume 4 of *CRM Series*, pages 73–91. Ed. Norm., Pisa, 2007.
- [CS93] Gregory S. Call and Joseph H. Silverman. Canonical heights on varieties with morphisms. *Compositio Math.*, 89(2) :163–205, 1993.
- [DKY20] Laura DeMarco, Holly Krieger, and Hexi Ye. Uniform Manin-Mumford for a family of genus 2 curves. *Ann. Math. (2)*, 191(3) :949–1001, 2020.
- [DKY22] Laura Demarco, Holly Krieger, and Hexi Ye. Common preperiodic points for quadratic polynomials. *J. Mod. Dyn.*, 18 :363–413, 2022.

- [DM24] Laura DeMarco and Niki Myrto Mavraki. Dynamics on \mathbb{P}^1 : preperiodic points and pairwise stability. *Compos. Math.*, 160(2) :356–387, 2024.
- [Fav20] Charles Favre. Degeneration of endomorphisms of the complex projective space in the hybrid space. *J. Inst. Math. Jussieu*, 19(4) :1141–1183, 2020.
- [Fil17] Paul Fili. A metric of mutual energy and unlikely intersections for dynamical systems. arXiv, 2017. <https://arxiv.org/abs/1708.08403>.
- [FR06] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective. *Math. Ann.*, 335(2) :311–361, 2006.
- [FR10] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Théorie ergodique des fractions rationnelles sur un corps ultramétrique. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(1) :116–154, 2010.
- [Gau23] Thomas Gauthier, 2023. Exposé à l’IMJ.
- [GGK21] Ziyang Gao, Tangli Ge, and Lars Kühne. The uniform Mordell-Lang conjecture. arXiv, 2021. <https://arxiv.org/abs/2105.15085>.
- [Küh21] Lars Kühne. The relative Bogomolov conjecture for fibered products of elliptic surfaces. arXiv, 2021. <https://arxiv.org/abs/2103.06203>.
- [LP20] Thibaud Lemanisser and Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} : catégorie, topologie, cohomologie. arXiv, 2020. <https://arxiv.org/abs/2010.08858>.
- [Poi10] Jérôme Poineau. La droite de Berkovich sur \mathbf{Z} . *Astérisque*, 334 :xii+284, 2010.
- [Poi13] Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} : étude locale. *Invent. Math.*, 194(3) :535–590, 2013.
- [Poi22] Jérôme Poineau. Dynamique analytique sur \mathbf{Z} . I : Mesures d’équilibre sur une droite projective relative. arXiv, 2022. <https://arxiv.org/abs/2201.08480>.
- [PST12] Clayton Petsche, Lucien Szpiro, and Thomas J. Tucker. A dynamical pairing between two rational maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(4) :1687–1710, 2012.
- [Ray83] Michel Raynaud. Courbes sur une variété abélienne et points de torsion. *Invent. Math.*, 71 :207–233, 1983.
- [Zha95] Shouwu Zhang. Small points and adelic metrics. *J. Algebr. Geom.*, 4(2) :281–300, 1995.

14 février 2024

JÉRÔME POINEAU, Normandie Univ., UNICAEN, CNRS, Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, 14000 Caen, France • *E-mail* : jerome.poineau@unicaen.fr
Url : <https://poineau.users.lmno.cnrs.fr/>