
DYNAMIQUE ANALYTIQUE SUR \mathbf{Z} . I : MESURES D'ÉQUILIBRE SUR UNE DROITE PROJECTIVE RELATIVE.

par

Jérôme Poineau

Résumé. — Considérons un espace de Berkovich sur un bon anneau de Banach et la droite projective relative sur celui-ci. (C'est un espace dont les fibres sont des droites projectives sur différents corps valués complets.) Pour tout endomorphisme polarisé de cette droite, nous montrons que la famille des mesures d'équilibre associées aux restrictions de l'endomorphisme aux fibres est continue. Le résultat vaut, par exemple, lorsque l'anneau de Banach est un corps valué complet, un corps hybride, un anneau de valuation discrète complet ou un anneau d'entiers de corps de nombres.

Abstract (Analytic dynamics over \mathbf{Z} . I: Equilibrium measures on a relative projective line.)

Consider a Berkovich space over a good Banach ring and the relative projective line over it. (It is a space whose fibers are projective lines over different complete valued fields.) For each polarized endomorphism of this line, we prove that the family of equilibrium measures associated to the restrictions of the endomorphism to the fibers is continuous. The result holds, in particular, when the Banach ring is a complete valued field, a hybrid field, a complete discrete valuation ring, or the ring of integers of a number field.

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Espaces de Berkovich sur un anneau de Banach.....	8
3. Mesures de Radon.....	16
4. Métriques sur les fibrés en droites.....	19
5. Laplacien sur la droite projective sur un corps valué complet....	22
6. Systèmes dynamiques sur une droite projective relative.....	28
Références.....	40

1. Introduction

Dans ce texte, nous initions l'étude des systèmes dynamiques dans le cadre des espaces analytiques sur \mathbf{Z} , au sens de Vladimir G. Berkovich (*cf.* [Ber90]), ou sur

Classification mathématique par sujets (2020). — 37P50, 37P15, 37F44, 14G22.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} , espaces hybrides, mesures d'équilibre, théorie du potentiel.

d'autres anneaux de Banach aux propriétés similaires. Ces espaces mêlent naturellement fibres archimédiennes (espaces analytiques complexes usuels, éventuellement à conjugaison près) et fibres ultramétriques (espaces de Berkovich classiques sur les différents \mathbf{Q}_p et d'autres corps valués). Aussi les systèmes dynamiques que nous considérons se présentent-ils comme des familles de systèmes dynamiques sur des espaces analytiques de différente nature. L'objectif de ce texte est de démontrer que, sous des hypothèses très générales, les mesures d'équilibre associées forment des familles continues de mesures.

1.1. Énoncé des résultats. — Commençons par quelques rappels sur la notion de mesure d'équilibre, tout d'abord dans le cas de la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Soit φ une fraction rationnelle complexe de degré d . Pour $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, notons δ_a la mesure de Dirac supportée au point a . Pour $n \in \mathbf{N}$, notons a_1, \dots, a_{d^n} les solutions de l'équation $\varphi^n = a$, comptées avec multiplicité, et posons

$$[\varphi^{-n}(a)] := \sum_{i=1}^{d^n} \delta_{a_i}.$$

Rappelons que l'on définit l'ensemble exceptionnel de φ par

$$\text{Exc}(\varphi) := \{a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) : \varphi^{-1}(a) = \{a\}\}$$

et qu'il contient au plus 2 éléments. Les travaux de H. Brolin [Bro65], dans le cas polynomial, puis de M. Lyubich [Lyu83] et A. Freire-A. Lopez-R. Mañé [FLM83], dans le cas général, montrent qu'il existe une mesure de probabilité μ_φ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ telle que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} [\varphi^{-n}(a)] = \mu_\varphi,$$

pour tout $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ hors de l'ensemble exceptionnel $\text{Exc}(\varphi)$. La mesure μ_φ ainsi définie, dite *mesure d'équilibre* associée à φ , satisfait deux propriétés fondamentales, qui, prises ensemble, la caractérisent (cf. [Mañ88, début de II]) :

- i) $\varphi^* \mu_\varphi = d \mu_\varphi$;
- ii) le support de μ_φ est disjoint de $\text{Exc}(\varphi)$.

On vérifie, en outre, que le support de μ_φ n'est autre que l'ensemble de Julia $J(\varphi)$ associée à φ .

Plaçons-nous maintenant sur un corps valué ultramétrique complet k , et remplaçons la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par la droite projective $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ au sens de Berkovich. Nonobstant le caractère totalement discontinu de k , l'espace $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ jouit de bonnes propriétés topologiques, telles la compacité et la connexité par arcs locales, et propose un cadre pertinent où adapter les théories complexes classiques. Ch. Favre et J. Rivera-Letelier l'ont ainsi utilisé pour associer à toute fraction rationnelle φ à coefficients dans k une mesure d'équilibre μ_φ , possédant les mêmes propriétés que son analogue classique, cf. [FRL04].

L'objet de ce texte est d'étudier la variation de ces mesures d'équilibre. Plaçons-nous tout d'abord dans le cadre complexe et considérons une suite de fractions rationnelles complexes $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers une fraction rationnelle complexe f , au

sens de la convergence uniforme pour les endomorphismes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ associés. D'après [Mañ88, theorem B], la suite de mesures $(\mu_{f_n})_{n \in \mathbf{N}}$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ converge alors vers la mesure μ_f pour la topologie faible. L'analogie ultramétrique de ce résultat est également valable.

Nous souhaitons démontrer un résultat analogue, mais avec des corps de base variables. Pour le formuler, nous considérons une famille de fractions rationnelles paramétrée par un espace de Berkovich Y sur un anneau de Banach \mathcal{A} . Remettant à plus tard les définitions précises (cf. section 2.1), nous nous contentons de rappeler qu'à tout point y de Y est associé un corps résiduel complété $\mathcal{H}(y)$, qui peut être aussi bien ultramétrique : \mathbf{Q}_p , $\mathbf{C}((t))$, $\mathbf{F}_p((t))$, etc. qu'archimédien : \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Signalons que la théorie de Berkovich garde un sens dans ce dernier cadre et que la droite projective $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$ s'identifie alors à un espace familier : la droite projective complexe usuelle $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, dans le cas de \mathbf{C} , et son quotient par la conjugaison complexe, dans le cas de \mathbf{R} . La théorie des mesures d'équilibre s'étend sans peine à ces espaces.

Le résultat principal de ce texte s'énonce ainsi. Il est valable sous certaines conditions techniques sur l'anneau de Banach \mathcal{A} considéré, cf. section 2.2.4. Elles sont satisfaites pour les anneaux classiques de la théorie tels que \mathbf{Z} et les anneaux d'entiers de corps de nombres, les corps hybrides, ou encore les anneaux de valuation discrète complets (et bien sûr les corps valués complets).

Théorème A (infra théorème 6.26). — *Soit Y un espace de Berkovich sur un bon anneau de Banach \mathcal{A} . Notons $X := Y \times_{\mathcal{A}} \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ la droite projective relative au-dessus de Y . Soit φ un endomorphisme polarisé de X au-dessus de Y de degré supérieur à 2.*

Pour tout point y de Y , l'endomorphisme φ induit un endomorphisme φ_y de la fibre $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$. Notons μ_{φ_y} la mesure d'équilibre associée, identifiée à son image sur X .

Alors la famille de mesures $(\mu_{\varphi_y})_{y \in Y}$ sur X est continue.

La continuité de la famille de mesures est à prendre au sens de la topologie faible et signifie précisément que, pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ continue à support compact, la fonction

$$y \in Y \mapsto \int f|_{X_y} d\mu_{\varphi_y} \in \mathbf{R}$$

est continue.

Le cas le plus simple du théorème A, celui où l'endomorphisme φ est l'application d'élevation au carré $z \mapsto z^2$ est déjà intéressant. Dans ce cas, la mesure d'équilibre est complètement explicite. Sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{1,\text{an}} = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, il s'agit de la mesure de Haar $\mu_{\mathbf{H}}$ de masse totale 1 sur le cercle unité. Sur $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^{1,\text{an}}$ (quotient de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par la conjugaison complexe), c'est l'image de la précédente, et nous la noterons identiquement. Sur un corps valué ultramétrique complet k , en revanche, on obtient la mesure de Dirac $\delta_{\mathbf{G}}$ supportée au point de Gauß, un point particulier de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ qui joue le rôle de point générique du cercle unité. L'analogie entre ces mesures se situe au cœur du travail [CL06] d'Antoine Chambert–Loir, qui l'a remarquée et largement diffusée. Revenant

au problème qui nous intéresse, nous montrons que ces différentes mesures forment une famille continue.

Théorème B (*infra* théorème 6.8). — Soit Y un espace de Berkovich sur un bon anneau de Banach \mathcal{A} . Pour tout point y de Y , considérons la mesure χ_y sur $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$ définie par

$$\chi_y := \begin{cases} \mu_{\mathbb{H}} & \text{si } \mathcal{H}(y) \text{ est archimédien;} \\ \delta_{\mathbb{G}} & \text{si } \mathcal{H}(y) \text{ est ultramétrique,} \end{cases}$$

identifiée à son image sur X .

Alors la famille de mesures $(\chi_y)_{y \in Y}$ sur X est continue.

Ajoutons que nous démontrons, en même temps que le théorème A, un résultat de continuité des potentiels des mesures μ_{φ_y} . Rappelons que, sur tout corps valué ultramétrique complet, on peut, comme sur \mathbf{C} , définir une théorie du potentiel sur la droite projective au sens de Berkovich, et, en particulier, pour une certaine classe de fonctions, un opérateur laplacien Δ qui prend ses valeurs dans l'ensemble des mesures de Radon.

Proposition C (*infra* lemme 6.23 et proposition 6.25). — Avec les hypothèses et notations des théorèmes A et B, il existe une fonction continue $\lambda_{\varphi}: X \rightarrow \mathbf{R}$ telle que, pour tout $y \in Y$, le laplacien de $\lambda_{\varphi}|_{X_y}$ est bien défini et satisfait l'égalité

$$\Delta(\lambda_{\varphi}|_{X_y}) = \chi_y - \mu_{\varphi_y}.$$

La précision sur les potentiels est particulièrement intéressante lorsqu'on cherche à étudier des accouplements de mesures au sens de C. Favre et J. Rivera-Letelier. Dans l'article [FR06], ces auteurs définissent, pour des mesures de probabilités μ_1 et μ_2 suffisamment régulières, un accouplement $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ qui se comporte comme une distance entre ces deux mesures (ou plutôt son carré). Il peut être obtenu en intégrant un potentiel de $\mu_1 - \mu_2$ par rapport à cette même mesure.

Corollaire D. — Soit Y un espace de Berkovich sur un bon anneau de Banach \mathcal{A} . Notons $X := Y \times_{\mathcal{A}} \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ la droite projective relative au-dessus de Y . Soient φ et ψ des endomorphismes polarisés de X au-dessus de Y de degré supérieur à 2.

Pour tout point y de Y , notons μ_{φ_y} (resp. μ_{ψ_y}) la mesure d'équilibre associée à l'endomorphisme φ_y (resp. ψ_y) induit par φ (resp. ψ) sur la fibre $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$.

Alors, la fonction $y \in Y \mapsto \langle \mu_{\varphi_y}, \mu_{\psi_y} \rangle$ est continue.

Démonstration. — Considérons des fonctions continues λ_{φ} et λ_{ψ} comme dans la proposition C. Pour tout $y \in Y$, on a

$$\Delta(\lambda_{\psi}|_{X_y} - \lambda_{\varphi}|_{X_y}) = (\chi_y - \mu_{\psi_y}) - (\chi_y - \mu_{\varphi_y}) = \mu_{\varphi_y} - \mu_{\psi_y},$$

d'où

$$\langle \mu_{\varphi_y}, \mu_{\psi_y} \rangle = \int (\lambda_{\psi}|_{X_y} - \lambda_{\varphi}|_{X_y}) d(\mu_{\varphi_y} - \mu_{\psi_y}).$$

L'énoncé découle alors des résultats de continuité précédents (théorème A et proposition C). \square

Le théorème A s’inspire directement du résultat principal de l’article [Fav20]. Charles Favre y démontre un résultat de continuité de mesures d’équilibre pour un espace projectif de dimension quelconque au-dessus d’une base Y fixée : le disque hybride (un avatar du disque unité complexe de dimension 1 muni d’un point ultramétrique en son centre, réalisé comme un espace de Berkovich sur un anneau de Banach dit hybride). Notre théorème autorise une plus grande variété dans la direction horizontale.

Dans la direction verticale, en revanche, nous nous cantonnons à la dimension 1, faute de disposer des outils nécessaires en théorie du potentiel. Les démonstrations de [Fav20] font en effet intervenir de façon cruciale des résultats analytiques subtils : théorie de Bedford-Taylor, inégalités de Chern-Levine-Nirenberg, etc., dont les analogues ultramétriques sont largement conjecturaux à l’heure actuelle. Le travail fondateur [CLD11] d’A. Chambert-Loir et A. Ducros propose une définition de formes différentielles réelles et de courants dans ce cadre, mais les propriétés plus fines requises ici ne sont pas encore disponibles.

Indiquons que d’autres résultats de convergence de mesures depuis l’archimédien vers l’ultramétrique existent dans la littérature : [BJ17] (par des techniques tropicales), [DHL22] (par la théorie des modèles), etc. Ils ont tous pour objet des familles à un paramètre et le théorème A apparaît donc, à notre connaissance, comme le premier de ce genre à valoir sur une base de dimension supérieure.

Dans le texte compagnon [Poi22], nous appliquons les résultats de continuité obtenus ici à un espace de modules (de dimension 5) de paires de courbes elliptiques. Nous en tirons une démonstration de l’énoncé suivant, initialement conjecturé par F. Bogomolov, H. Fu et Yu. Tschinkel (*cf.* [BFT18, conjectures 2 et 12]).

Théorème E. — *Il existe $M \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour toutes courbes elliptiques E_a et E_b sur \mathbf{C} et tous revêtements doubles $\pi_a: E_a \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ et $\pi_b: E_b \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ tels que $\pi_a(E_a[2]) \neq \pi_b(E_b[2])$, on ait*

$$\#(\pi_a(E_a[\infty]) \cap \pi_b(E_b[\infty])) \leq M.$$

1.2. Stratégie de la preuve du théorème A. — Soit \mathcal{A} un bon anneau de Banach. Soit Y un espace de Berkovich sur \mathcal{A} et notons $X := Y \times_{\mathcal{A}} \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ la droite projective relative au-dessus de Y .

Notre première étape consiste à démontrer le théorème B, incarnation de l’analogie d’A. Chambert-Loir, qui assure la continuité de la famille constituée de mesures de Haar sur le cercle, pour la partie archimédienne, et de mesures de Dirac au point de Gauß, pour la partie ultramétrique.

Pour la preuve, on considère une suite (ou une suite généralisée) convergente $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de Y de limite y . Il faut montrer que la suite de mesures $(\chi_{y_n})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers χ_y . Le cas crucial est celui où les points y_n sont archimédiens et le point y ultramétrique. Rappelons que les espaces de Berkovich sont localement compacts et que l’espace des mesures de probabilité sur un compact est lui-même compact. On en déduit qu’il suffit de montrer que toute valeur d’adhérence de la

suite $(\chi_{y_n})_{n \in \mathbf{N}}$ coïncide avec $\chi_y = \delta_G$, autrement dit qu'elle est supportée au point de Gauß, ce qu'on peut prouver directement.

Ajoutons que nous démontrons une version raffinée du résultat, où le centre et le rayon des cercles sont autorisés à varier continûment sur Y .

Passons maintenant au théorème A. Soit φ un endomorphisme de X au-dessus de Y polarisé de degré $d \geq 2$. Rappelons, tout d'abord, que, pour tout $y \in Y$, la mesure d'équilibre associée à φ_y sur $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1, \text{an}}$ peut être obtenue en tirant en arrière la mesure χ_y :

$$\mu_{\varphi_y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} (\varphi_y^*)^n \chi_y.$$

Cette remarque suggère une stratégie de preuve. À partir du théorème B, en tirant en arrière par φ de façon répétée, on montre que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille de mesures $(\mu_{n,y} := \frac{1}{d^n} (\varphi_y^*)^n \chi_y)_{y \in Y}$ est encore continue. Il reste à passer à la limite.

Pour ce dernier point, nous avons recours à des arguments de théorie de potentiel. En utilisant un raisonnement classique dû à S. W. Zhang (*cf.* [Zha95]), on construit une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur X convergeant uniformément vers une fonction u_φ et dont les potentiels sur la fibre X_y sont respectivement la suite $(\mu_{n,y})_{n \in \mathbf{N}}$ et μ_{φ_y} . (Ces fonctions sont obtenues à partir de la norme d'une section du fibré $\mathcal{O}(1)$ convenablement métrisé.)

Soit $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ continue à support compact. Sous des hypothèses convenables, pour tout $y \in Y$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \int f|_{X_y} d\mu_{\varphi_y} - \int f|_{X_y} d\mu_{n,y} \right| &= \left| \int f|_{X_y} d\Delta(u_{\varphi,|X_y} - u_{n,|X_y}) \right| \\ &= \left| \int (u_{\varphi,|X_y} - u_{n,|X_y}) d\Delta f|_{X_y} \right| \\ &\leq \|u_\varphi - u_n\|_{X_y} \int d|\Delta f|_{X_y}. \end{aligned}$$

Si la fonction $y \mapsto \int d|\Delta f|_{X_y}$ est bornée sur tout compact, alors la suite de fonctions $(y \mapsto \int f|_{X_y} d\mu_{n,y})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $y \mapsto \int f|_{X_y} d\mu_{\varphi_y}$ sur tout compact. La continuité de cette dernière en découle.

La stratégie exposée ci-dessus ne s'applique que sous certaines hypothèses sur f et une partie importante de notre travail consiste à identifier un sous-ensemble dense de fonctions continues à support compact possédant les propriétés requises. Nous introduisons à cet effet la notion de fonction *affable*, inspirée de la notion de fonction modèle définie par Ch. Favre dans [Fav20]. Il s'agit de fonctions pouvant s'écrire localement comme différences de fonctions de la forme

$$\max(q_0, q_1 \log(|g_1|), \dots, q_n \log(|g_n|)),$$

où q_0 est un nombre rationnel ou $-\infty$, q_1, \dots, q_n sont des nombres rationnels positifs et g_1, \dots, g_n sont des fonctions analytiques (*cf.* définitions 6.9 et 6.11 pour les détails).

1.3. Organisation du texte. — Le texte est découpé en 5 sections. Les trois premières sont essentiellement composées de rappels. Dans la section 2, nous abordons la théorie, encore exotique, des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach, en

rappelant définitions et propriétés de base. Nous insistons sur la notion de flot, action du monoïde $]0, 1]$ correspondant à l'élevation d'une valeur absolue à une puissance. C'est par son intermédiaire que l'on peut faire dégénérer des familles d'espaces sur des espaces au-dessus de corps trivialement valués, ce qui jouera un rôle crucial pour des applications ultérieures.

Dans la section 3, nous considérons des mesures de Radon sur des espaces de Berkovich et étudions notamment les opérations d'image directe et réciproque dans ce cadre. Nous nous appuyons de façon essentielle sur les bonnes propriétés topologiques des espaces de Berkovich sur certains anneaux de Banach démontrées dans [LP20].

Dans la section 4, nous adaptons la notion de fibré métrisé issue de la théorie d'Arakelov au cadre des espaces analytiques sur un anneau de Banach au sens de Berkovich. Nous montrons que l'espace des fibrés métrisés peut être muni d'une structure uniforme pour laquelle il est complet et rappelons, suivant [Zha95], comment construire une métrique invariante par un système dynamique polarisé donné.

La section 5 contient des rappels de théorie du potentiel sur la droite projective au-dessus d'un corps valué complet, archimédien ou non. L'un des ingrédients essentiels, d'intérêt indépendant, est l'existence, pour une fonction sous-harmonique u sur un disque D , d'une majoration de la forme

$$\int_D d\Delta u \leq C_{D,D'} \|u\|_{D'},$$

où D' est un disque strictement plus grand que D et $C_{D,D'}$ un nombre réel qui ne dépend que des rayons des disques et pas du corps de base. C'est cette dernière propriété qui permet de borner la masse totale du laplacien d'une fonction affable, ingrédient sur lequel repose la convergence uniforme de la famille de mesures $(\mu_{n,y})_{n \in \mathbb{N}}$, comme expliqué plus haut.

Dans la section finale 6, nous démontrons les résultats annoncés, en commençant par le théorème B. Nous introduisons ensuite les fonctions affables et concluons par la démonstration du théorème A.

1.4. Remerciements. — Je remercie Charles Favre et Marco Maculan pour de fructueux échanges autour de la théorie du potentiel, ainsi que Dorian Berger pour ses commentaires. Merci également au rapporteur d'une première version. Ce texte est imprégné de l'influence d'Antoine Chambert–Loir. Je saisis l'occasion ainsi offerte de lui exprimer ma gratitude sincère pour son soutien et la générosité avec laquelle il partage ses idées.

Une partie de ce texte a été rédigée pendant un séjour de l'auteur à Francfort. Il remercie l'université Goethe et ses membres pour les excellentes conditions d'accueil dont il a bénéficié, ainsi que la Deutsche Forschungsgemeinschaft (TRR 326 Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures, project number 444845124) pour son soutien financier.

Conventions

Soient X, Y des ensembles. On note $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y . Pour $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$, on pose

$$\|f\|_X := \sup_{x \in X} (|f(x)|).$$

Soient X, Y des espaces topologiques. On note $\mathcal{C}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}_c(X, Y)$) l'ensemble des applications continues (resp. à support compact) de X dans Y .

Soit T une partie de X . On note \bar{T} son adhérence, $\overset{\circ}{T}$ son intérieur et $\partial T := \bar{T} \setminus \overset{\circ}{T}$ son bord.

2. Espaces de Berkovich sur un anneau de Banach

Cette section est consacrée aux fondements de la théorie de Berkovich sur les anneaux de Banach. Nous commençons par rappeler les définitions (section 2.1 puis donnons des exemples d'anneaux de Banach sur lesquels appliquer la théorie (section 2.2). Nous terminons en considérant le flot, une opération naturelle sur les espaces de Berkovich utile dans l'étude des dégénérescences (section 2.3).

2.1. Définitions. — Dans cette section, nous rappelons la définition d'espace analytique sur un anneau de Banach au sens de Berkovich (*cf.* [Ber90, Section 1.5]).

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Intéressons-nous tout d'abord à l'*espace affine analytique de dimension n sur \mathcal{A}* , noté $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. C'est un espace localement annelé que nous définirons en trois temps : ensemble sous-jacent, topologie, faisceau structural.

• *Ensemble* : L'ensemble sous-jacent à $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ qui sont bornées sur \mathcal{A} , c'est-à-dire l'ensemble des applications

$$|\cdot| : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

qui satisfont les propriétés suivantes :

- i) $|0| = 0$ et $|1| = 1$;
- ii) $\forall P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n], |P + Q| \leq |P| + |Q|$;
- iii) $\forall P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n], |P + Q| = |P||Q|$;
- iv) $\forall a \in \mathcal{A}, |a| \leq \|a\|$.

On pose $\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{0,\text{an}}$ et on l'appelle *spectre* of \mathcal{A} . Lorsque \mathcal{A} n'est pas nul, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ ne sont pas vides.

Pour tout $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le morphisme d'inclusion $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_m] \rightarrow \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ induit une application $\text{pr}_{n,m} : \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$, dite de *projection sur les m premières coordonnées*.

Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Notons $|\cdot|_x$ la semi-norme multiplicative associée à x . L'anneau $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] / \ker(|\cdot|_x)$ est intègre. La semi-norme $|\cdot|_x$ induit une valeur absolue sur $\text{Frac}(\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] / \ker(|\cdot|_x))$ et on peut considérer le complété de ce corps, noté $\mathcal{H}(x)$. Nous noterons simplement $|\cdot|$ la valeur absolue sur $\mathcal{H}(x)$ induite par $|\cdot|_x$.

On a un morphisme naturel $\chi_x : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$, dit d'*évaluation*. Pour tout $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, on pose $P(x) := \chi_x(P)$. On a alors $|P(x)| = |P|_x$, par définition.

• *Topologie* : On munit l'ensemble $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ de la topologie la plus grossière telle que, pour tout $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, l'application

$$x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \longmapsto |P(x)| \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

soit continue. L'espace topologique ainsi obtenu est séparé et localement compact. Le spectre $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est compact.

L'application de projection $\text{pr}_{\mathcal{A}}$ est continue et surjective et, pour tout $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, on a un homéomorphisme canonique

$$\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{\mathcal{A}}^{-1}(b).$$

• *Faisceau structural* : Pour tout ouvert V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, on note S_V l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ qui ne s'annulent pas sur V et on pose $\mathcal{K}(V) := S_V^{-1}\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. On définit $\mathcal{O}(U)$ comme l'ensemble des applications

$$f: U \longrightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x)$$

telles que

- i) pour tout $x \in U$, $f(x) \in \mathcal{H}(x)$;
- ii) tout $x \in U$ possède un voisinage ouvert V sur lequel f est limite uniforme d'éléments de $\mathcal{K}(V)$.

Nous pouvons maintenant énoncer la définition générale d'espace analytique sur \mathcal{A} . Un *modèle local d'espace \mathcal{A} -analytique* et un espace localement annelé de la forme $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I})$, où U est un ouvert d'un espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{N,\text{an}}$ et \mathcal{I} est un faisceau d'idéaux cohérent de \mathcal{O}_U . Un *espace \mathcal{A} -analytique* est un espace localement annelé qui est localement isomorphe à un modèle local d'espace \mathcal{A} -analytique. Un tel espace X possède un morphisme naturel $\text{pr}_{\mathcal{A}}: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et, pour tout $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, la fibre $\text{pr}_{\mathcal{A}}^{-1}(b)$ peut naturellement être munie d'une structure d'espace analytique sur $\mathcal{H}(b)$.

On dispose de peu de résultats dans cette généralité. Signalons tout de même que tout espace \mathcal{A} -analytique est localement compact.

On peut répéter de nombreuses constructions classiques dans ce contexte. On construit, par exemple, un *espace projectif analytique de dimension n sur \mathcal{A}* , noté $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, en recollant $n + 1$ copies de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ selon le procédé habituel.

Considérons un modèle local d'espace \mathcal{A} -analytique $Z = (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I})$, avec les mêmes notations que précédemment. Considérons l'application $\text{pr}_{N+n,N}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{N+n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{N,\text{an}}$ de projection sur les n dernières coordonnées. Posons $U' := \text{pr}_{N+n,N}^{-1}(U)$ et $\mathcal{I}' := \text{pr}_{N+n,N}^* \mathcal{I}$, qui est un faisceau d'idéaux cohérent de $\mathcal{O}_{U'}$. L'espace $(V(\mathcal{I}'), \mathcal{O}_{U'}/\mathcal{I}')$ est appelé *espace affine relatif de dimension n sur Z* et noté $\mathbf{A}_Z^{n,\text{an}}$.

La construction précédente se recolle et permet de définir, pour tout espace \mathcal{A} -analytique X , un espace affine relatif de dimension n sur X noté $\mathbf{A}_X^{n,\text{an}}$. On définit de même un espace projectif relatif de dimension n sur X noté $\mathbf{P}_X^{n,\text{an}}$.

Le lemme technique suivant sera utile dans la suite du texte.

Lemme 2.1. — Soit X un espace \mathcal{A} -analytique. Soient $x \in X$ et $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}(X)$. Alors, il existe un voisinage compact V de x dans X , une \mathcal{A} -algèbre de Banach \mathcal{B} , une application $\varphi: \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow V$ au-dessus de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et des éléments F_1, \dots, F_d de \mathcal{B} tels que

- i) φ soit un homéomorphisme ;
- ii) pour tout $y \in V$, le morphisme $\psi_y: \mathcal{H}(\varphi(y)) \rightarrow \mathcal{H}(y)$ induit par φ soit un isomorphisme isométrique ;
- iii) pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et tout $y \in V$, on ait $\psi_y(f_i(\varphi(y))) = F_i(y)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathbf{A}_V^{n,\text{an}}$ (resp. $\mathbf{P}_V^{n,\text{an}}$) l'image réciproque de V par la projection $\mathbf{A}_X^{n,\text{an}} \rightarrow X$ (resp. $\mathbf{P}_X^{n,\text{an}} \rightarrow X$). La propriété ii) entraîne que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'application φ induit des applications $\mathbf{A}_\mathcal{B}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_V^{n,\text{an}}$ et $\mathbf{P}_\mathcal{B}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_V^{n,\text{an}}$.

On peut construire φ de façon à avoir également

- iv) pour tout $n \in \mathbf{N}$, les applications $\mathbf{A}_\mathcal{B}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_V^{n,\text{an}}$ et $\mathbf{P}_\mathcal{B}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_V^{n,\text{an}}$ induites par φ sont des homéomorphismes.

Démonstration. — Par définition, il existe un voisinage ouvert U_x de x isomorphe à un fermé de Zariski Z d'un ouvert U d'un espace affine $\mathbf{A}_\mathcal{A}^{N,\text{an}}$. Quitte à restreindre, on peut supposer qu'il existe $f'_1, \dots, f'_d \in \mathcal{O}(U)$ dont les images dans $\mathcal{O}(U_x)$ sont f_1, \dots, f_d . On peut également supposer qu'il existe $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}(U)$ tels que le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_U définissant Z soit engendré par g_1, \dots, g_m .

Notons x' l'image de x dans U . Soit W un voisinage compact rationnel de x' dans $\mathbf{A}_\mathcal{A}^{n,\text{an}}$ contenu dans U (cf. [Poi10, définition 1.2.8]). Notons $\mathcal{B}(W)$ le complété de $\mathcal{K}(W)$ pour la norme uniforme sur W (cf. [Poi10, définition 1.2.1]). Quitte à restreindre W , on peut supposer que les f'_i et les g_j appartiennent à $\mathcal{B}(W)$. D'après [Poi10, théorème 1.2.11], le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_N] \rightarrow \mathcal{B}(W)$ induit un homéomorphisme $\varphi_0: \mathcal{M}(\mathcal{B}(W)) \xrightarrow{\sim} W$. Notons I l'idéal de $\mathcal{B}(W)$ engendré par g_1, \dots, g_m . Le morphisme φ_0 induit alors un homéomorphisme entre les fermés de Zariski de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(W))$ et W définis par l'idéal I . En outre, en notant \mathcal{B} le séparé complété de $\mathcal{B}(W)/I$ muni de sa semi-norme résiduelle, le morphisme canonique $\mathcal{B}(W) \rightarrow \mathcal{B}$ induit un homéomorphisme entre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ et le fermé de Zariski de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(W))$ défini par l'idéal I . Les propriétés i), ii) et iii) de l'énoncé sont alors vérifiées en définissant V comme l'image de W dans U_x et, pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, F_i comme l'image de f'_i dans \mathcal{B} .

La propriété iv) pour $\mathbf{A}^{n,\text{an}}$ découle de [Poi10, proposition 1.2.15]. L'homéomorphisme est encore valable pour les ouverts de $\mathbf{A}^{n,\text{an}}$ complémentaires des hyperplans de coordonnées. Le cas de $\mathbf{P}^{n,\text{an}}$ s'en déduit par recollement. \square

2.2. Exemples. — Nous regroupons ici quelques exemples d'anneaux de Banach. Nous renvoyons à [LP20, Section 1.1] pour un traitement plus détaillé, ainsi que d'autres exemples.

2.2.1. Corps archimédiens. — Le corps \mathbf{C} muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$ est un anneau de Banach.

Soit $n \in \mathbf{N}$. À tout $z \in \mathbf{C}^n$, on associe la semi-norme multiplicative

$$\begin{aligned} |\cdot|_z: \quad \mathbf{C}[T_1, \dots, T_n] &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ P &\longmapsto |P(z)|_\infty \end{aligned} .$$

L'application

$$z \in \mathbf{C}^n \longmapsto |\cdot|_z \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n, \text{an}}$$

ainsi définie est une bijection. C'est même un isomorphisme d'espaces localement annelés, lorsqu'on munit \mathbf{C}^n de la topologie transcendante et du faisceau des fonctions analytiques.

Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Notons \mathbf{C}_ε le corps \mathbf{C} muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^\varepsilon$. C'est encore un anneau de Banach et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les espaces localement annelés $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{n, \text{an}}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n, \text{an}}$ sont isomorphes (cf. lemme 2.9).

Considérons maintenant le corps \mathbf{R} muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$. C'est un anneau de Banach et la construction précédente induit un homéomorphisme

$$\mathbf{C}^n / \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n, \text{an}},$$

où \mathbf{C}^n est muni de la topologie transcendante et $\mathbf{C}^n / \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ de la topologie quotient.

Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Notons \mathbf{R}_ε le corps \mathbf{R} muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^\varepsilon$. C'est encore un anneau de Banach et, comme dans le cas complexe, les espaces localement annelés $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{n, \text{an}}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n, \text{an}}$ sont isomorphes (cf. lemme 2.9).

Remarquons que l'injection isométrique $\mathbf{R}_\varepsilon \hookrightarrow \mathbf{C}_\varepsilon$ induit un morphisme $\text{pr}_{\mathbf{C}, \mathbf{R}}: \mathbf{A}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{n, \text{an}}$.

Remarque 2.2. — Tout corps valué archimédien complet $(k, |\cdot|)$ est isométriquement isomorphe à \mathbf{C}_ε ou \mathbf{R}_ε pour un certain $\varepsilon \in]0, 1]$. Le nombre réel ε peut être obtenu par la formule

$$\varepsilon = \frac{\log(|2|)}{\log(2)}.$$

2.2.2. Corps ultramétriques. — Tout corps valué ultramétrique complet fournit un exemple d'anneau de Banach.

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soit $n \in \mathbf{N}$. À tout $z \in k^n$, on associe la semi-norme multiplicative

$$\begin{aligned} |\cdot|_z: \quad k[T_1, \dots, T_n] &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ P &\longmapsto |P(z)| \end{aligned} .$$

L'application

$$z \in k^n \longmapsto |\cdot|_z \in \mathbf{A}_k^{n, \text{an}}$$

ainsi définie est injective, mais elle est loin d'être surjective, dès que $n \geq 1$.

Donnons un exemple. Pour $z \in k$ et $s \in \mathbf{R}_{>0}$, l'application

$$\begin{aligned} |\cdot|_{z,s}: \quad k[T] &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ \sum_{i \geq 0} a_i (T - z)^i &\longmapsto \max_{i \geq 0} (|a_i| s^i) \end{aligned}$$

définit une valeur absolue sur $k[T]$. Le point de $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ correspondant, que nous noterons $\eta_{z,s}$, n'appartient pas à l'image de k dans $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$.

2.2.3. Autres anneaux de Banach. — Nous présentons ici trois classes d'anneaux de Banach pour lesquels les résultats du texte s'appliquent.

- Corps hybrides

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps muni d'une valeur absolue non triviale, archimédienne ou non. Notons \hat{k} le complété de k . Considérons la norme sur k définie par

$$\|\cdot\|_{\text{hyb}} := \max(|\cdot|, |\cdot|_0),$$

où $|\cdot|_0$ désigne la valeur absolue triviale (définie par $|0|_0 = 0$ et $|\alpha|_0 = 1$ pour $\alpha \in k^*$). Notons k_{hyb} le corps k muni de la norme $\|\cdot\|_{\text{hyb}}$. C'est un anneau de Banach dont on peut décrire explicitement le spectre :

$$\mathcal{M}(k_{\text{hyb}}) = \{|\cdot|_0\} \cup \{|\cdot|^\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq 1\}.$$

Il est homéomorphe au segment $[0, 1]$.

Soit X un espace analytique sur k_{hyb} et considérons le morphisme structural $\text{pr}: X \rightarrow \mathcal{M}(k_{\text{hyb}})$. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, $\text{pr}^{-1}(|\cdot|^\varepsilon)$ est un espace analytique sur $(\hat{k}, |\cdot|^\varepsilon)$, donc, à peu de choses près, un espace analytique sur $(\hat{k}, |\cdot|)$, et $\text{pr}^{-1}(|\cdot|_0)$ est un espace analytique sur $(k, |\cdot|_0)$, de nature fondamentalement différente, auquel on peut penser comme à la limite des précédents. Lorsque $(k, |\cdot|)$ est le corps \mathbf{C} muni de la valeur absolue usuelle, on obtient ainsi une famille d'espaces analytiques complexes dégénérant vers un espace ultramétrique. C'est l'exemple considéré dans [Fav20].

- Anneaux de valuation discrète

Soit R un anneau de valuation discrète complet et v la valuation associée. Notons \mathfrak{m} l'idéal maximal de R . Soit $r \in]0, 1[$ et posons $|\cdot| := r^{v(\cdot)}$. Alors $(R, |\cdot|)$ est un anneau de Banach.

Notons $|\cdot|^{+\infty}$ la semi-norme sur R définie comme la composition de l'application quotient $R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ et de la valeur absolue triviale sur R/\mathfrak{m} . On peut alors décrire explicitement le spectre de $(R, |\cdot|)$:

$$\mathcal{M}(R) = \{|\cdot|^\varepsilon : \varepsilon \geq 1\} \cup \{|\cdot|^{+\infty}\}.$$

Il est homéomorphe au segment $[1, +\infty]$.

Cette situation est assez semblable à celle des corps hybrides. Soit X un espace analytique sur R et considérons le morphisme structural $\text{pr}: X \rightarrow \mathcal{M}(R)$. Alors, pour tout $\varepsilon \in [1, +\infty[$, $\text{pr}^{-1}(|\cdot|^\varepsilon)$ est, à normalisation près, un espace analytique sur $(K, |\cdot|)$, où K est le corps des fractions de R , et $\text{pr}^{-1}(|\cdot|^{+\infty})$ est un espace analytique sur $(R/\mathfrak{m}, |\cdot|_0)$, sorte de version dégénérée des précédents.

- Anneaux d'entiers de corps de nombres

L'anneau des entiers relatifs \mathbf{Z} muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$ est un anneau de Banach. La description de son spectre analytique découle du théorème d'Ostrowski. Il contient :

- la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$ sur \mathbf{Z} ;
- les valeurs absolues archimédiennes $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, 1]$;

- pour tout nombre premier p , les valeurs absolues p -adiques $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, +\infty[$;
- pour tout nombre premier p , la semi-norme $|\cdot|_p^{+\infty}$ définie comme la composition de l’application quotient $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et de la valeur absolue triviale sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Cette théorie se généralise aux anneaux d’entiers de corps de nombres. Nous renvoyons à [Poi10, section 3.1] pour plus de détails.

2.2.4. Bons anneaux de Banach. — Nous introduisons ici une notion de bon anneau de Banach, pour lesquels les résultats de ce texte sont valables. Elle est abstraite, utilise de façon essentielle la terminologie de [LP20], et probablement spécifique à ce papier. Nous suggérons au lecteur de ne pas trop y accorder trop d’attention, mais plutôt de garder en tête les exemples de la section précédente.

Définition 2.3. — Un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est dit *bon* si

- i) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un anneau de base géométrique (cf. [LP20, définition 3.3.8]) ;
- ii) $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est peu mixte (cf. [LP20, définition 7.2.5]) ;
- iii) $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ et sa partie ultramétrique sont localement connexes par arcs.

Les exemples précédents (corps valués, corps hybrides, anneaux de valuation discrète, anneaux d’entiers de corps de nombres) sont tous de bons anneaux de Banach (cf. [LP20, exemples 3.3.9 et 7.2.7]).

Les espaces analytiques sur de tels anneaux de Banach ont reçu un traitement détaillé dans la littérature, cf. [Poi10, Poi13, LP20]. On sait qu’ils jouissent de bonnes propriétés, dans la même veine que les espaces analytiques classiques : hensélianité, noethérianité et excellence des anneaux locaux (cf. [Poi10, corollaire 2.2.7] et [Poi13, corollaire 9.19 et 10.3]), cohérence du faisceau structural (cf. [Poi13, corollaire 11.10]), connexité par arcs locale (cf. [LP20, théorème 7.2.17]), etc. On peut également définir la catégorie des espaces analytiques sur un tel anneau (cf. [LP20, section 2.1]) et l’on dispose d’un foncteur d’analytification depuis la catégorie des schémas localement de présentation finie, d’un foncteur de changement de base et de produits fibrés (cf. [LP20, chapitre 4]). Nous utiliserons librement ces propriétés dans la suite du texte.

2.3. Flot. — Nous nous intéressons ici à la façon dont sont modifiés les espaces de Berkovich lorsqu’on remplace les semi-normes multiplicatives qui le constituent par des puissances.

2.3.1. Cas d’un corps valué. — Soient A un anneau et $|\cdot|$ une valeur absolue sur A .

Rappelons que le fait que $|\cdot|$ soit archimédienne ou ultramétrique ne dépend que de sa restriction à l’image de \mathbf{Z} dans A . Plus précisément, $|\cdot|$ est ultramétrique si, et seulement si, on a $|2| \leq 1$.

Notation 2.4. — Si $|\cdot|$ est ultramétrique, on pose $I(|\cdot|) := \mathbf{R}_{>0}$.

Si $|\cdot|$ est archimédienne, on pose $I(|\cdot|) :=]0, \frac{\log(2)}{\log(|2|}]$ (cf. remarque 2.2).

L’intérêt de la notation apparaît dans le résultat classique suivant.

Lemme 2.5. — Pour tout $\varepsilon \in I(|\cdot|)$, $|\cdot|^\varepsilon$ définit une valeur absolue sur A . \square

Le résultat vaut encore pour les semi-normes multiplicatives. (On se ramène au cas d’une valeur absolue en quotientant par le noyau de la semi-norme.)

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet.

Notation 2.6. — Pour tout $\varepsilon \in I(|\cdot|)$, on note k_ε le corps k muni de la valeur absolue $|\cdot|^\varepsilon$. C'est encore un corps valué complet.

Soit $x \in \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$. Par définition, il est associé à une semi-norme multiplicative $|\cdot|_x: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ qui induit $|\cdot|$ sur k . Pour tout $\varepsilon \in I(|\cdot|)$, il découle du lemme 2.5 que l'application $|\cdot|_x^\varepsilon: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ définit une semi-norme multiplicative qui induit $|\cdot|^\varepsilon$ sur k .

Notation 2.7. — Pour tout $x \in \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ et tout $\varepsilon \in I(k)$, on note x^ε le point de $\mathbf{A}_{k_\varepsilon}^{n,\text{an}}$ associé à $|\cdot|_x^\varepsilon$.

Remarquons que les corps abstraits $\mathcal{H}(x)$ et $\mathcal{H}(x^\varepsilon)$ sont isomorphes, puisqu'ils sont obtenus en complétant le même corps pour deux valeurs absolues équivalentes.

Remarque 2.8. — L'application $x \mapsto x^\varepsilon$ agit trivialement sur les points k -rationnels : pour tout $a \in k^n$, le point de $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ associé à a est envoyé sur le point de $\mathbf{A}_{k_\varepsilon}^{n,\text{an}}$ associé à a . On le vérifie immédiatement sur les définitions.

Lemme 2.9. — L'application

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon: \mathbf{A}_k^{n,\text{an}} &\longrightarrow \mathbf{A}_{k_\varepsilon}^{n,\text{an}} \\ x &\longmapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

réalise un isomorphisme d'espaces localement annelés.

Pour tout ouvert U de $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$, toute $f \in \mathcal{O}(U)$ et tout $x \in U$, on a

$$|(\Phi_\varepsilon)_* f(x^\varepsilon)| = |f(x)|^\varepsilon.$$

Démonstration. — L'application $\Phi_{\varepsilon^{-1}}: \mathbf{A}_{k_\varepsilon}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ satisfait $\Phi_{\varepsilon^{-1}} \circ \Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon \circ \Phi_{\varepsilon^{-1}} = \text{id}$, donc Φ_ε est une bijection.

Il découle directement de la définition de la topologie que les applications Φ_ε et $\Phi_{\varepsilon^{-1}}$ sont continues, donc Φ_ε est un homéomorphisme.

Rappelons que le faisceau structural est construit à partir des corps $\mathcal{H}(x)$. L'isomorphisme d'espaces localement annelés suit donc des identifications $\mathcal{H}(x^\varepsilon) = \mathcal{H}(x)$.

La propriété finale découle des définitions. \square

Rappelons que les espaces k -analytiques que nous considérons ici sont construits en recollant des modèles locaux, qui sont des fermés analytiques d'ouverts d'espaces affines. Il découle du lemme 2.9 que la restriction de Φ_ε à un tel espace ne dépend pas de sa présentation comme modèle local. Par conséquent, on peut recoller les images des modèles locaux et les applications Φ_ε .

Notation 2.10. — Soit X un espace k -analytique. On note X_ε l'espace k_ε -analytique et

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon: X &\longrightarrow X_\varepsilon \\ x &\longmapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

l'isomorphisme d'espaces localement annelés obtenus par la construction ci-dessus.

2.3.2. Cas d'un anneau de Banach. — Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Sous certaines conditions, l'application $x \mapsto x^\varepsilon$ peut être définie comme application d'un espace \mathcal{A} -analytique dans lui-même.

Définition 2.11. — On dit que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est *flottant* si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $\|a\| \geq 1$.

Pour toute semi-norme multiplicative $|\cdot|$ sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$, $|\cdot|^\varepsilon$ est encore une semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$. Lorsque $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est flottant, le caractère borné par rapport à $\|\cdot\|$ est préservé.

Notation 2.12. — Supposons que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est flottant. Pour tout $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on note x^ε le point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ associé à la semi-norme multiplicative $|\cdot|_x^\varepsilon$.

On pose

$$\Phi_\varepsilon: \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} & \longrightarrow & \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \\ x & \longmapsto & x^\varepsilon \end{array} .$$

On étend les définitions de x^ε et Φ_ε à $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ en utilisant des cartes.

Remarque 2.13. — Supposons que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est flottant. Notons $\text{pr}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ la projection. Soit $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors, l'application $\Phi_\varepsilon: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ de la notation 2.12 induit une application

$$\text{pr}^{-1}(b) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n, \text{an}} \longrightarrow \text{pr}^{-1}(b^\varepsilon) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b^\varepsilon)}^{n, \text{an}} \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)^\varepsilon}^{n, \text{an}}$$

qui n'est autre que celle de la section 2.3.1.

Lemme 2.14. — Supposons que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est flottant. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, l'application $\Phi_\varepsilon: \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ réalise un homéomorphisme sur son image.

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. On se ramène immédiatement au cas de $\Phi_\varepsilon: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Il découle des définitions que cette application est continue (cf. [Poi10, proposition 1.3.4]).

Notons \mathcal{A}_ε l'anneau \mathcal{A} muni de la norme $\|\cdot\|^\varepsilon$. C'est encore un anneau de Banach. On a une inclusion naturelle $\mathbf{A}_{\mathcal{A}_\varepsilon}^{n, \text{an}} \subset \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ par laquelle $\mathbf{A}_{\mathcal{A}_\varepsilon}^{n, \text{an}}$ s'identifie à l'image de Φ_ε .

Sur l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}_\varepsilon}^{n, \text{an}}$, on peut définir une application $\Phi_{\varepsilon^{-1}}$, qui est continue comme précédemment. Ceci conclut la preuve. \square

Définition 2.15. — Supposons que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est flottant. Un espace \mathcal{A} -analytique X est dit *flottant* s'il existe une immersion de X dans $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on ait $\Phi_\varepsilon(X) \subset X$.

Si X est flottant, pour tout ouvert U de X , toute $f \in \mathcal{O}(U)$, tout $x \in U$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $|f(x^\varepsilon)| = |f(x)|^\varepsilon$. On en déduit que la propriété d'être flottant et l'application $\Phi_\varepsilon: x \in X \mapsto x^\varepsilon \in X$ ne dépendent pas du choix de l'immersion.

Définition 2.16. — Supposons que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est flottant. Soit X un espace \mathcal{A} -analytique flottant.

Une fonction $f: X \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ (resp. $f: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$) est dite *flottante* (resp. *log-flottante*) si, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $f(x^\varepsilon) = f(x)^\varepsilon$ (resp. $f(x^\varepsilon) = \varepsilon f(x)$).⁽¹⁾

Soit Y un espace \mathcal{A} -analytique flottant. Un morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ est dit *flottant* si, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $\Phi_\varepsilon \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_\varepsilon$.

⁽¹⁾On utilise ici les conventions $(+\infty)^\varepsilon = \varepsilon(+\infty) = +\infty$ et $\varepsilon(-\infty) = -\infty$, pour $\varepsilon > 0$.

3. Mesures de Radon

Cette section est consacrée aux mesures de Radon. Nous y considérons les opérations d'image directe (section 3.1) et image réciproque (section 3.2). Dans la section 3.3, nous introduisons la notion de famille continue de mesures, objet d'étude de ce texte.

3.1. Images de mesures de Radon. — Commençons par rappeler quelques notions topologiques.

Définition 3.1. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ une application continue entre espaces topologiques.

On dit que φ est *propre* si, pour tout espace topologique X'' , l'application $\varphi \times \text{id}_{X''}: X \times X'' \rightarrow X' \times X''$ est fermée.

On dit que φ est *finie* si elle est séparée, fermée et à fibres finies.

Le résultat suivant est une conséquence directe des définitions.

Lemme 3.2. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ une application finie entre espaces topologiques. Soit $x' \in X'$. Pour tout voisinage U de $\varphi^{-1}(x')$ dans X , il existe un voisinage U' de x' dans X' tel que $\varphi^{-1}(U') \subset U$. \square

Ajoutons d'autres résultats classiques.

Proposition 3.3 ([Bou71, I, §10, n° 2, prop. 6]). — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ une application propre entre espaces topologiques. Alors, pour toute partie quasi-compacte K' de X' , $\varphi^{-1}(K')$ est quasi-compacte. \square

Théorème 3.4 ([Bou71, I, §10, n° 2, th. 1]). — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ une application finie entre espaces topologiques. Alors φ est propre. \square

Nous pouvons maintenant décrire la procédure pour pousser en avant des mesures de Radon.

Définition 3.5. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ une application propre entre espaces topologiques localement compacts. Supposons que X est topologiquement séparé. Soit μ une mesure de Radon sur X . L'application

$$\begin{aligned} \varphi_*\mu: \mathcal{C}(X', \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \mu(f \circ \varphi) \end{aligned}$$

est une mesure de Radon sur X' appelée *image* de μ par φ .

Définition 3.6. — Soit \mathcal{A} un anneau de Banach flottant. Soit X un espace \mathcal{A} -analytique flottant et topologiquement séparé. Une mesure de Radon μ sur X est dite *flottante* si, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $(\Phi_\varepsilon)_*\mu = \mu$.

3.2. Images réciproques de mesures de Radon. — Pour tirer en arrière des mesures, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur l'application. Pour les énoncer, nous nous placerons dans le cadre des espaces analytiques. Soit \mathcal{A} un bon anneau de Banach.

Définition 3.7. — Un morphisme entre espaces \mathcal{A} -analytiques est dit *propre* (resp. *fini*) si l'application induite entre les espaces topologiques sous-jacents est propre (resp. finie) au sens de la définition 3.1.

Rappelons tout d'abord le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.8 ([LP20, théorème 5.2.1]). — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme fini d'espaces \mathcal{A} -analytiques. Alors, pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , $\varphi_*\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X' .

En particulier, pour tout $x \in X$, \mathcal{O}_x est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{\varphi(x)}$. \square

Sous une hypothèse supplémentaire de platitude, nous pouvons maintenant définir des degrés locaux, en utilisant le fait qu'un module plat et de type fini sur un anneau local est libre.

Définition 3.9. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme fini et plat d'espaces \mathcal{A} -analytiques. Alors, pour tout $x \in X'$, \mathcal{O}_x est un module libre de type fini sur $\mathcal{O}_{\varphi(x)}$. Son rang est appelé *degré* de φ en x et noté $\deg_x(\varphi)$.

Plaçons-nous dans le cadre de la définition 3.9. Pour tout $x' \in X'$, on a

$$\sum_{x \in \varphi^{-1}(x')} \deg_x(\varphi) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(x')} \text{rang}_{\mathcal{O}_{x'}}(\mathcal{O}_x) = \text{rang}_{\mathcal{O}_{x'}}((\varphi_*\mathcal{O})_{x'}).$$

Les hypothèses assurent que $\varphi_*\mathcal{O}$ est un \mathcal{O} -module localement libre. En particulier, si X' est connexe, il est de rang constant, et la quantité précédente ne dépend pas de x' .

Définition 3.10. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme fini et plat d'espaces \mathcal{A} -analytiques. Supposons que X' est connexe. On appelle *degré* de φ la quantité

$$\deg(\varphi) := \sum_{x \in \varphi^{-1}(x')} \deg_x(\varphi),$$

pour $x' \in X'$.

Afin de tirer en arrière les mesures, nous aurons besoin de pousser en avant les fonctions.

Définition 3.11. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme fini et plat d'espaces \mathcal{A} -analytiques. Pour toute $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ et tout $x' \in X'$, on pose

$$(\varphi_*f)(x') := \sum_{x \in \varphi^{-1}(x')} \deg_x(\varphi) f(x).$$

Proposition 3.12. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme fini et plat d'espaces \mathcal{A} -analytiques. Alors, pour toute $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ (resp. $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$), on a $\varphi_*f \in \mathcal{C}(X', \mathbf{R})$ (resp. $\varphi_*f \in \mathcal{C}_c(X', \mathbf{R})$).

En outre, si X' est connexe, pour toute partie E' de X' , on a

$$\|\varphi_*f\|_{E'} \leq \deg(\varphi) \|f\|_{\varphi^{-1}(E')}.$$

Démonstration. — Nous suivons fidèlement la preuve de [FR10, proposition 2.4]. Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Soient $x' \in X'$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Pour tout $x \in \varphi^{-1}(x')$, il existe un voisinage U_x de x dans X tel que, pour tout $y \in U_x$, on ait $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. On peut supposer que les U_x , pour $x \in \varphi^{-1}(x')$, sont disjoints.

D'après le lemme 3.2, il existe un voisinage U' de x' dans X' tel que $\varphi^{-1}(U') \subset \bigcup_{x \in \varphi^{-1}(x')} U_x$. Quitte à restreindre U' , on peut supposer qu'il est connexe. Pour $x \in \varphi^{-1}(x')$, posons $V_x := U'_x \cap \varphi^{-1}(U')$. Le morphisme $\psi_x: V_x \rightarrow U'$ induit par φ

est fini et de degré $\deg_x(\varphi)$. Pour tout $y' \in U'$, on a donc

$$\left| \left(\sum_{y \in V_x \cap \varphi^{-1}(y')} \deg_y(\varphi) f(y) \right) - \deg_x(\varphi) f(x) \right| = \left| \sum_{y \in V_x \cap \varphi^{-1}(y')} \deg_y(\varphi) (f(y) - f(x)) \right| \leq \deg_x(\varphi) \varepsilon.$$

On en déduit que, pour tout $y' \in U'$, on a $|(\varphi_* f)(y') - (\varphi_* f)(x')| \leq \deg(\varphi) \varepsilon$. Par conséquent, la fonction $\varphi_* f$ est continue. Les autres résultats découlent directement des définitions. \square

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients permettant de tirer en arrière les mesures.

Définition 3.13. — Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme fini et plat d'espaces \mathcal{A} -analytiques. Soit μ' une mesure de Radon sur X' . L'application

$$\begin{aligned} \varphi^* \mu' : \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \mu'(\varphi_* f) \end{aligned}$$

est une mesure de Radon sur X appelée *image réciproque* de μ' par φ .

Remarque 3.14. — Plaçons-nous dans le cadre de la définition 3.13 et supposons, en outre, que X' est compact et connexe. On vérifie alors que, si μ' est une mesure de probabilité sur X' , alors $\frac{1}{\deg(\varphi)} \varphi^* \mu'$ est une mesure de probabilité sur X .

Remarque 3.15. — Nous avons choisi de travailler au-dessus d'un bon anneau de Banach. Cette hypothèse utilisée à deux endroits : pour disposer d'une part du théorème 3.8, qui permet de définir le degré local d'un morphisme fini (*cf.* définition 3.9), et d'autre part de la connexité locale, qui est utilisée dans la preuve de la proposition 3.12.

3.3. Familles continues de mesures. — Soit \mathcal{A} un bon anneau de Banach. Soient X et Y des espaces \mathcal{A} -analytiques et $\pi: X \rightarrow Y$ un morphisme.

Définition 3.16. — Une π -famille de mesures est une famille $\mu = (\mu_y)_{y \in Y}$ où, pour tout $y \in Y$, μ_y est une mesure de Radon sur $\pi^{-1}(y)$. On identifiera μ_y à sa mesure image sur X .

La famille de mesures μ est dite *continue* si, pour toute $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$, l'application

$$y \in Y \longmapsto \mu_y(f) = \int f \, d\mu_y \in \mathbf{R}$$

est continue.

Définition 3.17. — Supposons que \mathcal{A} est flottant et que X , Y et π sont flottants. Une π -famille de mesures $\mu = (\mu_y)_{y \in Y}$ est dite *flottante* si, pour tout $y \in Y$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $(\Phi_\varepsilon)_* \mu_y = \mu_{y^\varepsilon}$.

Soient X' un espace \mathcal{A} -analytique et $\pi': X' \rightarrow Y$ un morphisme. Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme au-dessus de Y . Nous expliquons maintenant comment tirer et pousser des familles de mesures par φ .

Définition 3.18. — Supposons que φ est propre et que X est topologiquement séparé. Pour toute π -famille de mesures μ , on définit une π' -famille de mesures $\varphi_* \mu$ en posant, pour tout $y \in Y$,

$$(\varphi_* \mu)_y := \varphi_* \mu_y.$$

Supposons que φ est fini et plat. Alors, pour toute π' -famille de mesures μ' , on définit une π -famille de mesures $\varphi^*\mu'$ en posant, pour tout $y \in Y$,

$$(\varphi^*\mu')_y := \varphi^*\mu'_y.$$

Lemme 3.19. — *Supposons que φ est propre et que X est topologiquement séparé. Alors, pour toute π -famille de mesures continue μ , la famille $\varphi_*\mu$ est continue.*

Supposons que φ est fini et plat. Alors, pour toute π' -famille de mesures continue μ' , la famille φ^μ' est continue.*

Démonstration. — Supposons que φ est propre. Soit μ une π -famille de mesures continue. Soit $f \in \mathcal{C}_c(X', \mathbf{R})$. La fonction $f \circ \varphi$ est alors continue sur X , car φ est continue, et à support compact, car φ est propre. Puisque la famille μ est continue, la fonction

$$y \in Y \mapsto \int f d(\varphi_*\mu_y) = \int (f \circ \varphi) d\mu_y$$

est continue. Le résultat s'ensuit.

Supposons que φ est fini et plat. Le résultat se démontre de la même manière, en faisant appel à la proposition 3.12. \square

4. Métriques sur les fibrés en droites

Dans cette section, nous étudions les fibrés métrisés sur un espace de Berkovich au-dessus d'un anneau de Banach. La notion de fibré métrisé, qui apparaît de façon essentielle en théorie d'Arakelov, cf. [Ara74] pour la version complexe ou [Zha95] pour une version sur tout corps, s'adapte sans difficultés à notre cadre.

Dans la section 4.1, nous énonçons la définition, ainsi que quelques propriétés simples. Dans la section 4.2, nous munissons l'ensemble des métriques sur un fibré donné d'une topologie. Dans la section 4.3 nous montrons l'existence d'une métrique naturelle associée à un système dynamique polarisé.

Soit \mathcal{A} un anneau de Banach et soit X un espace \mathcal{A} -analytique.

4.1. Généralités. —

Définition 4.1. — Soit L un fibré en droites sur X . Une *métrique* $\|\cdot\|$ sur L est une famille $(\|\cdot\|_x)_{x \in X}$ où, pour tout $x \in X$,

$$\|\cdot\|_x : L(x) \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est une norme sur $L(x)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathcal{H}(x), \forall s \in L(x), \|\lambda s\|_x = |\lambda| \|s\|_x.$$

La métrique $\|\cdot\|$ est dite *continue* si, pour tout ouvert U de X et toute section globale $s \in L(U)$, la fonction

$$x \in U \mapsto \|s(x)\|_x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est continue.

On note $\text{Mét}(L)$ l'ensemble des métriques continues sur L .

Remarque 4.2. — Soit $x \in X$. La condition d'homogénéité entraîne que la connaissance de $\|s\|_x$ pour un seul $s \in L(x) \setminus \{0\}$ suffit à déterminer la norme $\|\cdot\|_x$.

Dans le cas du fibré trivial $L = \mathcal{O}_X$, on peut choisir la section $s = 1$. On obtient ainsi une bijection entre $\text{Mét}(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{C}(X, \mathbf{R}_{>0})$. Nous identifierons désormais ces deux ensembles.

Exemple 4.3. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Plaçons-nous sur la droite projective $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ munie des coordonnées homogènes T_0, T_1 . Le fibré $\mathcal{O}(1)$ peut être muni de la *métrique standard* $\|\cdot\|_{\text{st}}$ caractérisée par la propriété suivante : pour toute $s \in \Gamma(\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}, \mathcal{O}(1))$, représentée par $P_s(T_0, T_1) \in k[T_0, T_1]$ homogène de degré 1, on a

$$\forall x \in \mathbf{P}_k^{1,\text{an}}, \quad \|s\|_{\text{st},x} := \frac{|P_s(T_0, T_1)(x)|}{\max(|T_0(x)|, |T_1(x)|)}.$$

On dispose d'opérations classiques sur les fibrés métrisés, que nous rappelons ici. Soit L un fibré en droites sur X muni d'une métrique $\|\cdot\|$.

Pour tout $d \in \mathbf{Z}$, il existe une unique métrique $\|\cdot\|^{\otimes d}$ sur $L^{\otimes d}$ telle que

$$\forall x \in X, \forall s \in L(x), \quad \|s^{\otimes d}\|_x^{\otimes d} = \|s\|_x^d.$$

Supposons qu'il existe $e \in \mathbf{Z}^*$ et un fibré en droites M sur X tel que $L \simeq M^{\otimes e}$. Il existe alors une unique métrique $\|\cdot\|^{\otimes 1/e}$ sur M telle que

$$\forall x \in X, \forall t \in M(x), \quad \|t\|_x^{\otimes 1/e} = \|t^{\otimes e}\|_x^{1/e}.$$

Soit $\varphi: X \rightarrow X$ un endomorphisme de X . Il existe alors une unique métrique $\varphi^* \|\cdot\|$ sur $\varphi^* L$ telle que

$$\forall x \in X, \forall s \in L(x), \quad (\varphi^* \|\cdot\|)_x(\varphi^*(s)) = \|s\|_{\varphi(x)}.$$

Soit L' un fibré en droites sur X muni d'une métrique $\|\cdot\|'$. Il existe alors une unique métrique $\|\cdot\| \otimes \|\cdot\|'$ sur $L \otimes L'$ telle que

$$\forall x \in X, \forall s \in L(x), \forall s' \in L'(x), \quad (\|\cdot\| \otimes \|\cdot\|')_x(s \otimes s') = \|s\|_x \|s'\|_x.$$

Toutes ces opérations préservent la continuité des métriques.

4.2. Topologie. — L'objet de cette section est de munir l'ensemble des métriques sur un fibré en droites d'une structure topologique. Nous y parvenons en construisant une famille d'écart⁽²⁾.

Notation 4.4. — Soient L un fibré en droites sur X et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ des métriques continues sur L . Alors $\|\cdot\|_1 \otimes \|\cdot\|_2^{\otimes -1}$ est une métrique continue sur \mathcal{O}_X et, pour toute partie compacte K de X , on pose

$$d_K(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) := \max_{x \in K} (|\log((\|\cdot\|_1 \otimes \|\cdot\|_2^{\otimes -1})_x(1))|) \in \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Lemme 4.5. — Soient L un fibré en droites sur X . Pour toute partie compacte K de X , d_K est un écart sur $\text{Mét}(L)$. \square

⁽²⁾Un écart est une distance généralisée, à valeurs dans $[0, +\infty]$, où la condition de positivité stricte sur des couples de points distincts est relâchée, cf. [Bou74, IX, §1, n° 1, Définition 1].

Lemme 4.6. — Soient L un fibré en droites sur X et $\|\cdot\|_0 \in \text{Mét}(L)$. L'application

$$\|\cdot\| \mapsto \log(\|\cdot\| \otimes \|\cdot\|_0^{\otimes -1})$$

induit une bijection entre $\text{Mét}(L)$ et $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Pour tout partie compacte K de X , elle envoie l'écart d_K sur l'écart induit par la semi-norme uniforme sur K . \square

Nous munirons désormais $\text{Mét}(L)$ de la famille d'écart $(d_K)_K$, où K décrit l'ensemble des parties compactes de X , et de la structure uniforme correspondante (cf. [Bou74, IX, §1, n° 2, Définition 2]).

Proposition 4.7. — L'espace uniforme $\text{Mét}(L)$ est complet.

Démonstration. — Si $\text{Mét}(L)$ est vide, l'énoncé est satisfait. Sinon, d'après le lemme 4.6, il suffit de démontrer que l'espace $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, muni de la structure uniforme de la convergence compacte est complet. Puisque X est localement compact, le résultat découle de [Bou74, IX, §1, n° 6, cor. 3 du th. 2]. \square

On peut décrire simplement la façon dont les écarts sont modifiés par certaines opérations usuelles sur les métriques.

Lemme 4.8. — Soient L un fibré en droites sur X et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ des métriques continues sur L . Soit K une partie compacte de X .

Pour tout $d \in \mathbf{Z}^*$, on a

$$d_K(\|\cdot\|_1^{\otimes d}, \|\cdot\|_2^{\otimes d}) = |d| \cdot d_K(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2).$$

Pour tout endomorphisme surjectif φ de X , on a

$$d_K(\varphi^* \|\cdot\|_1, \varphi^* \|\cdot\|_2) = d_K(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2).$$

\square

4.3. Cas d'un système dynamique polarisé. — Nous nous placerons désormais dans la situation où nous disposons

- d'un fibré en droites L sur X ;
- d'un endomorphisme surjectif φ de X

soumis à la condition suivante : il existe $d, e \in \mathbf{Z}^*$ avec $|e| < |d|$ et un isomorphisme

$$\theta: (\varphi^* L)^{\otimes e} \xrightarrow{\sim} L^{\otimes d}.$$

L'objet de cette section est de montrer qu'il existe une métrique continue sur L naturellement associée à ces données. Dans le cadre des schémas sur un corps valués, ce résultat est dû à S.-W. Zhang (cf. [Zha95, theorem 2.2]). Nous suivons ici la preuve de [BG06, theorem 9.5.4].

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Mét}(L) &\longrightarrow \text{Mét}(L) \\ \|\cdot\| &\longmapsto ((\varphi^* \|\cdot\|)^{\otimes e} \circ \theta^{-1})^{\otimes 1/d}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.8, pour toutes métriques continues $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur L et toute partie compacte K de X , on a

$$d_K(\Phi(\|\cdot\|_1), \Phi(\|\cdot\|_2)) = \frac{|e|}{|d|} d_K(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2).$$

Remarque 4.9. — Soit $s_1 \in L(\varphi(x))$. Alors, $(\varphi^*s_1)^{\otimes e}$ induit un élément de $(\varphi^*L)^{\otimes e}(x)$, que nous noterons identiquement. En outre, si $s_1 \neq 0$, alors $(\varphi^*s_1)^{\otimes e} \neq 0$ et, pour tout $s \in (\varphi^*L)^{\otimes e}(x)$, $s/(\varphi^*s_1)^{\otimes e}$ fait sens et s'identifie à un élément de $\mathcal{H}(x)$. On peut donc écrire $|s/(\varphi^*s_1)^{\otimes e}|$ sans ambiguïté.

Soit $\|\cdot\| \in \text{Mét}(L)$ et posons ${}^\Phi\|\cdot\| := \Phi(\|\cdot\|)$. Avec les notations précédentes, pour tout $s_2 \in L(x)$, on a

$${}^\Phi\|s_2\|_x^d = \left| \frac{\theta^{-1}(s_2^{\otimes d})}{(\varphi^*s_1)^{\otimes e}} \right| \|s_1\|_{\varphi(x)}^e.$$

Théorème 4.10. — *Supposons que $\text{Mét}(L)$ ne soit pas vide. Alors, il existe une unique métrique continue $\|\cdot\|$ sur L telle que*

$$(\varphi^*\|\cdot\|)^{\otimes e} = \|\cdot\|^{\otimes d} \circ \theta \text{ dans } \text{Mét}(\varphi^*L).$$

Nous la noterons $\|\cdot\|_\varphi$.

En outre, pour tout $\|\cdot\|_0 \in \text{Mét}(L)$, la suite $(\Phi^n(\|\cdot\|_0))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\|\cdot\|_\varphi$.

Démonstration. — Posons $c := |e|/|d| \in]0, 1[$. Soit $\|\cdot\|_0 \in \text{Mét}(L)$. D'après le lemme 4.8, pour tout compact K de X et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$d_K(\Phi^{n+1}(\|\cdot\|_0), \Phi^n(\|\cdot\|_0)) = c^n d_K(\Phi(\|\cdot\|_0), \|\cdot\|_0).$$

On en déduit que la suite $(\Phi^n(\|\cdot\|_0))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, et donc convergente, d'après la proposition 4.7. Notons $\|\cdot\|_\varphi$ sa limite.

Par construction, on a $\Phi(\|\cdot\|_\varphi) = \|\cdot\|_\varphi$, et $\|\cdot\|_\varphi$ satisfait donc l'égalité de l'énoncé. Nous avons déjà démontré la seconde partie. La propriété d'unicité de la mesure en découle. \square

5. Laplacien sur la droite projective sur un corps valué complet

Cette section est consacrée à l'opérateur laplacien sur la droite projective sur un corps valué complet. Elle est essentiellement constituée de rappels. Nous traitons d'abord le cas complexe classique, celui de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (section 5.1), puis d'un corps archimédien quelconque (section 5.2), et enfin le cas ultramétrique (section 5.3).

Notation 5.1. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Pour $c \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on note $D_k(c, r)$ (resp. $\bar{D}_k(c, r)$) le disque ouvert (resp. fermé) de centre c et de rayon r dans $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$.

On s'autorise à supprimer le corps k de la notation lorsque le contexte permet de l'identifier sans ambiguïté.

5.1. Le cas complexe usuel. — Considérons le corps \mathbf{C} muni de sa valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$. Fixons une coordonnée z sur \mathbf{C} .

Soit U un ouvert de \mathbf{C} . Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$, on définit classiquement son laplacien par

$$\Delta f := \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \in \mathcal{C}^0(U, \mathbf{R}).$$

Dans la suite, nous l'identifierons à la mesure associée $\Delta f \, dz \, d\bar{z}$. Considérant désormais le laplacien comme un opérateur à valeurs dans l'ensemble des mesures de

Radon sur U , on peut à l'ensemble des fonctions sous-harmoniques, noté $\text{SH}(U)$, puis à celui des fonctions qui sont localement différences de fonctions sous-harmoniques, noté $\text{DSH}(U)$. Le laplacien, dans sa version mesure, étant indépendant de la coordonnée choisie, on peut étendre sa définition aux fonctions sur les ouverts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (ou toute surface de Riemann).

Les propriétés suivantes sont classiques et nous les utiliserons sans plus de précautions dans le reste du texte :

- Pour tout U ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et toutes $u, v \in \mathcal{C}_c(U, \mathbf{R}) \cap \text{DSH}(U)$, on a

$$\int u \, d\Delta v = \int v \, d\Delta u.$$

- Pour tout morphisme analytique fini $\varphi: U' \rightarrow U$ entre ouverts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et toute $u \in \text{DSH}(U)$, on a $u \circ \varphi \in \text{DSH}(U')$ et

$$\Delta(u \circ \varphi) = \varphi^* \Delta u.$$

Rappelons également la formule de Poincaré-Lelong.

Théorème 5.2. — Soient U un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et f une fonction analytique sur U , identiquement nulle sur aucune composante connexe. Alors, la fonction $\log(|f|)$ est sous-harmonique sur U et on a

$$\Delta \log(|f|) = \delta_{\text{div}(f)}.$$

□

Nous concluons cette section en énonçant un résultat permettant de majorer l'intégrale de Δu sur un disque en termes de la norme uniforme de u sur un disque plus grand. Ce résultat (et une généralisation en dimension supérieure) se trouve dans [BT76, proposition 2.6]. Nous reproduisons ici la preuve à la fois pour la commodité du lecteur et pour rendre explicite la constante apparaissant au membre de droite.

Proposition 5.3. — Soient U un ouvert de \mathbf{C} et $u \in \mathcal{C}(U, \mathbf{R}) \cap \text{SH}(U)$. Soient $t \in U$ et $r, R \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r < R$ tels que $\overline{D}(t, R) \subset U$. Alors, pour toute $f \in \mathcal{C}_c(D(t, r), \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int f \, d\Delta u &\leq \frac{1}{\log(R/r)} \|f\|_{\overline{D}(t,r)} (\|u\|_{\overline{D}(t,R)} - u(t)) \\ &\leq \frac{2}{\log(R/r)} \|f\|_{\overline{D}(t,r)} \|u\|_{\overline{D}(t,R)}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Par un argument classique d'approximation, il suffit de prouver le résultat lorsque $u \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$. Dans ce cas, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{D(t,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \, d\lambda \leq \frac{1}{\log(R/r)} (\|u\|_{\overline{D}(t,R)} - u(t)).$$

Pour $s \in]0, R[$, posons

$$n(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{D(t,s)} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \, d\lambda.$$

D'après la formule de Jensen, on a

$$\int_0^R \frac{n(s)}{s} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t + Re^{i\theta}) d\theta - u(t) \leq \|u\|_{\overline{D}(t,R)} - u(t).$$

Pour $s \in]0, R[$, on a

$$\int_0^R \frac{n(s)}{s} ds \geq \int_r^R \frac{n(s)}{s} ds \geq n(r) \int_r^R \frac{1}{s} ds \geq n(r) \log\left(\frac{R}{r}\right).$$

Le résultat s'ensuit. \square

5.2. Le cas d'un corps archimédien quelconque. — Dans cette section, nous montrons que les résultats de la section 5.1 restent valables pour tout corps valué complet archimédien, c'est-à-dire pour les corps \mathbf{C}_ε et \mathbf{R}_ε , avec $\varepsilon \in]0, 1]$.

La tâche principale consiste à définir le laplacien dans ce nouveau contexte, ce dont nous nous acquittons en nous ramenant au cas de \mathbf{C} . L'adaptation des résultats se résume alors à un jeu de définitions.

5.2.1. Le cas de \mathbf{C}_ε . — Soit $\varepsilon \in]0, 1]$ et considérons le corps \mathbf{C}_ε , c'est-à-dire le corps \mathbf{C} muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^\varepsilon$. Nous utiliserons les notations et résultats de la section 2.3.1. Rappelons que l'on dispose d'un isomorphisme d'espaces localement annelés

$$\Phi_\varepsilon: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{1,\text{an}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}.$$

Notation 5.4. — Soit U un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}$. Pour toute fonction $u: U \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, on définit une fonction $u_{\varepsilon^{-1}}$ sur $\Phi_\varepsilon^{-1}(U)$ par

$$u_{\varepsilon^{-1}} := u \circ \Phi_\varepsilon: \Phi_\varepsilon^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

On étend les définitions des propriétés des fonctions de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}$ en disant qu'une fonction u sur un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}$ est continue, sous-harmonique, etc. lorsque la fonction $u_{\varepsilon^{-1}}$ l'est.

Définition 5.5. — Soit U un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}$ et soit $u \in \text{DSH}(U)$. On définit le laplacien de u comme la mesure de Radon

$$\begin{aligned} \Delta u: \mathcal{C}_c(U, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \frac{1}{\varepsilon} \int f_{\varepsilon^{-1}} d\Delta u_{\varepsilon^{-1}}. \end{aligned}$$

Les résultats de la section 5.1 (symétrie, comportement par rétrotirette, formule de Poincaré-Lelong) s'adaptent immédiatement sur les ouverts $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}$.

Détaillons le résultat final de majoration (cf. proposition 5.3).

Proposition 5.6. — Soient U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1,\text{an}}$ et $u \in \mathcal{C}(U, \mathbf{R}) \cap \text{SH}(U)$. Soient $t \in U$ et $r, R \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r < R$ tels que $\overline{D}_{\mathbf{C}_\varepsilon}(t, R) \subset U$. Alors, pour toute $f \in \mathcal{C}_c(D(t, r), \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int f d\Delta u &\leq \frac{1}{\log(R/r)} \|f\|_{\overline{D}(t,r)} (\|u\|_{\overline{D}(t,R)} - u(t)) \\ &\leq \frac{2}{\log(R/r)} \|f\|_{\overline{D}(t,r)} \|u\|_{\overline{D}(t,R)}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Par définition, pour tout $s \in \mathbf{R}_{>0}$, on a

$$\Phi_\varepsilon^{-1}(D_{\mathbf{C}_\varepsilon}(t, s)) = D_{\mathbf{C}}(t, s^{1/\varepsilon})$$

et, pour toute fonction g définie au voisinage de $\overline{D}_{\mathbf{C}_\varepsilon}(t, s)$, on a

$$\|g\|_{\overline{D}_{\mathbf{C}_\varepsilon}(t, s)} = \|g_{\varepsilon^{-1}}\|_{\Phi_\varepsilon^{-1}(\overline{D}_{\mathbf{C}_\varepsilon}(t, s))} = \|g_{\varepsilon^{-1}}\|_{\overline{D}_{\mathbf{C}}(t, s^{1/\varepsilon})}.$$

D'après la définition 5.5 et la proposition 5.3, on a

$$\begin{aligned} \int f \, d\Delta u &= \frac{1}{\varepsilon} \int f_{\varepsilon^{-1}} \, d\Delta u_{\varepsilon^{-1}} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\log(R^{1/\varepsilon}/r^{1/\varepsilon})} \|f_{\varepsilon^{-1}}\|_{\overline{D}_{\mathbf{C}}(t, r^{1/\varepsilon})} (\|u_{\varepsilon^{-1}}\|_{\overline{D}_{\mathbf{C}}(t, R^{1/\varepsilon})} - u_{\varepsilon^{-1}}(t)) \\ &\leq \frac{1}{\log(R/r)} \|f\|_{\overline{D}(t, r)} (\|u\|_{\overline{D}(t, R)} - u(t)). \end{aligned}$$

□

5.2.2. Le cas de \mathbf{R}_ε . — Soit $\varepsilon \in]0, 1]$ et considérons le corps \mathbf{R}_ε , c'est-à-dire le corps \mathbf{R} muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^\varepsilon$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$. En effectuant le changement de base par le morphisme borné $\mathbf{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C}_\varepsilon$, on obtient un ouvert $U \hat{\otimes}_{\mathbf{R}_\varepsilon} \mathbf{C}_\varepsilon$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$, auquel on peut appliquer les résultats de la section 5.2.1. Notons $\text{pr}_{\mathbf{C}_\varepsilon, \mathbf{R}_\varepsilon} : U \hat{\otimes}_{\mathbf{R}_\varepsilon} \mathbf{C}_\varepsilon \rightarrow U$ le morphisme de changement de base.

Notation 5.7. — Soit U un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$. Pour toute fonction $u : U \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, on définit une fonction $u_{\mathbf{C}_\varepsilon}$ sur $U \hat{\otimes}_{\mathbf{R}_\varepsilon} \mathbf{C}_\varepsilon$ par

$$u_{\mathbf{C}_\varepsilon} := u \circ \text{pr}_{\mathbf{C}_\varepsilon, \mathbf{R}_\varepsilon} : U \hat{\otimes}_{\mathbf{R}_\varepsilon} \mathbf{C}_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

On étend les définitions des propriétés des fonctions de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$ à $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$ en disant qu'une fonction u sur un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$ est continue, sous-harmonique, etc. lorsque la fonction $u_{\mathbf{C}_\varepsilon}$ l'est.

Définition 5.8. — Soit U un ouvert de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$ et soit $u \in \text{DSH}(U)$. On définit le laplacien de u comme la mesure de Radon

$$\Delta u := (\text{pr}_{\mathbf{C}_\varepsilon, \mathbf{R}_\varepsilon})_* \Delta u_{\mathbf{C}_\varepsilon}.$$

Tous les résultats de la section 5.1 (symétrie, comportement par rétrotirette, formule de Poincaré-Lelong, majoration sur les disques) se transfèrent aisément sur les ouverts $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$.

5.3. Le cas d'un corps ultramétrique. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Il existe, dans le cadre de la droite projective de Berkovich $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$, une théorie du potentiel analogue à la théorie complexe. Dans ce texte, nous n'aurons pas besoin d'en connaître les détails, mais seulement de pouvoir utiliser quelques propriétés formelles, énoncées ci-dessous. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux références classiques [FJ04, BR10, Thu05], cette dernière référence traitant également le cas des courbes.

Étant donné un ouvert U de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$, on peut définir l'ensemble $\text{SH}(U)$ des fonctions sous-harmoniques sur U , puis l'ensemble $\text{DSH}(U)$ des fonctions localement différences de fonctions sous-harmoniques. Pour toute telle fonction u , on peut définir un laplacien Δu qui est une mesure de Radon. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Pour tout U ouvert de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ et toutes $u, v \in \mathcal{C}_c(U, \mathbf{R}) \cap \text{DSH}(U)$, on a

$$\int u \, d\Delta v = \int v \, d\Delta u.$$

- Pour tout morphisme analytique fini $\varphi: U' \rightarrow U$ entre ouverts de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ et toute $u \in \text{DSH}(U)$, on a $u \circ \varphi \in \text{DSH}(U')$ et

$$\Delta(u \circ \varphi) = \varphi^* \Delta u.$$

La formule de Poincaré-Lelong reste également valable.

Théorème 5.9. — Soient U un ouvert de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ et f une fonction analytique sur U , identiquement nulle sur aucune composante connexe. Alors, la fonction $\log(|f|)$ est sous-harmonique sur U et on a

$$\Delta \log(|f|) = \delta_{\text{div}(f)}.$$

□

Ajoutons un résultat de majoration analogue à celui de la proposition 5.3. Nous renvoyons à la section 2.2.2 pour la définition des points $\eta_{z,s}$.

Proposition 5.10. — Soient U un ouvert de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ et $u \in \mathcal{C}(U, \mathbf{R}) \cap \text{SH}(U)$. Soient $t \in U(k)$ et $r, R \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r < R$ tels que $\overline{D}(t, R) \subset U$. Alors, pour toute $f \in \mathcal{C}_c(D(t, r), \mathbf{R})$ on a

$$\begin{aligned} \int f \, d\Delta u &\leq \frac{1}{\log(R/r)} \|f\|_{D(t,r)} (u(\eta_{t,R}) - u(\eta_{t,r})) \\ &\leq \frac{2}{\log(R/r)} \|f\|_{D(t,r)} \|u\|_{D(t,R)}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Par un argument d'approximation, il suffit de prouver le résultat pour une fonction u lisse sur U . Dans ce cas, il suffit de montrer que

$$\int d\Delta u|_{D(t,r)} \leq \frac{1}{\log(R/r)} (u(\eta_{t,R}) - u(\eta_{t,r})).$$

La fonction u étant lisse, il existe un sous-arbre fini non vide Γ de $\overline{D}(t, R)$ et une fonction continue linéaire par morceaux $u_\Gamma: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $u|_{\overline{D}(t,R)} = u_\Gamma \circ r_\Gamma$, où $r_\Gamma: \overline{D}(t, R) \rightarrow \Gamma$ désigne la rétraction sur Γ . Quitte à agrandir Γ , on peut supposer qu'il contient le segment $[\eta_{t,r}, \eta_{t,R}]$ reliant le bord de $\overline{D}(t, r)$ à celui de $\overline{D}(t, R)$.

Pour tout point x de Γ , notons Γ_x l'ensemble des germes d'arêtes de Γ d'origine x (autrement dit, l'ensemble des directions sortantes en x). Pour tout $a \in \Gamma_x$, la pente de u le long de a en x est bien définie. Notons-la $\partial_a u$. Par définition, pour tout ouvert V de U contenu dans $\overline{D}(t, R)$, on a

$$\Delta u|_V = \sum_{x \in \Gamma \cap V} \left(\sum_{a \in \Gamma_x} \partial_a u \right) \delta_x,$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x . La fonction u étant linéaire par morceaux, la quantité $\sum_{a \in A_x} \partial_a u$ est nulle pour presque tout x , et $\Delta u|_V$ est bien définie.

Puisque u est sous-harmonique, Δu est une mesure positive et on a

$$\int \Delta u|_{D(t,r)} \leq \int \Delta u|_{\overline{D}(t,r) \setminus \{\eta_{t,r}\}}.$$

Puisque $\overline{D}(t,r)$ est compact, $\Gamma \cap \overline{D}(t,r)$ est un arbre fini et on a

$$\sum_{x \in \Gamma \cap \overline{D}(t,r)} \left(\sum_{a \in \Gamma_x \cap \overline{D}(t,r)} \partial_a u \right) = 0,$$

d'où

$$\int \Delta u|_{\overline{D}(t,r) \setminus \{\eta_{t,r}\}} = - \sum_{a \in \Gamma_{\beta_r} \cap \overline{D}(t,r)} \partial_a u.$$

Parmi les germes d'arêtes d'origine $\eta_{t,r}$, un seul n'est pas contenu dans $\overline{D}(t,r)$, celui représenté par $[\eta_{t,r}, \eta_{t,R}]$. Notons-le $a_{r,R}$. Puisque u est sous-harmonique, on a

$$\sum_{a \in \Gamma_{\eta_{t,r}} \cap \overline{D}(t,r)} \partial_a u + \partial_{a_{r,R}} u \geq 0.$$

La sous-harmonicité de u entraîne également que la restriction de u à $[\eta_{t,r}, \eta_{t,R}]$ est convexe, donc sa pente au point $\eta_{t,r}$ est inférieure à la pente totale :

$$\partial_{a_{r,R}} u \leq \frac{u(\eta_{t,R}) - u(\eta_{t,r})}{\log(R/r)}.$$

En combinant les différentes inégalités, on obtient le résultat voulu. \square

Examinons maintenant l'effet d'un changement de la valeur absolue sur les notions introduites.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Nous reprenons les notations de la section 2.3.1. Soit U un ouvert de $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$. On dispose d'un ouvert U_ε de $\mathbf{P}_{k_\varepsilon}^{1,\text{an}}$ et d'un isomorphisme

$$\Phi_\varepsilon: U \xrightarrow{\sim} U_\varepsilon.$$

On vérifie que l'application Φ_ε divise les distances par ε , ce qui est la clef pour comparer les notions de laplacien sur U et U_ε .

Notation 5.11. — Pour toute fonction $u: U \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, on définit une fonction u_ε sur U_ε par

$$u_\varepsilon := u \circ \Phi_\varepsilon^{-1}: U_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Proposition 5.12. — Soit $u: U \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors u est lisse, sous-harmonique, etc. si, et seulement si, u_ε l'est.

En outre, pour tout $u \in \text{DSH}(U)$, on a $u_\varepsilon \in \text{DSH}(U_\varepsilon)$ et, pour tout $f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbf{R})$,

$$\Delta u(f) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon(f_\varepsilon).$$

\square

6. Systèmes dynamiques sur une droite projective relative

Dans cette section, nous démontrons les théorèmes A et B de l'introduction. La section 6.1 contient la preuve du théorème B : continuité de familles de mesures constituées de mesures de Haar sur le cercle unité (dans le cadre archimédien) et de mesures de Dirac au point de Gauß (dans le cadre ultramétrique). Dans la section 6.2, nous introduisons les fonctions *affables*, des fonctions continues de nature assez simple, mais denses dans l'ensemble des fonctions continues. Nous les utilisons de façon essentielle dans la section finale 6.3 pour démontrer le théorème A sur la continuité de familles de mesures d'équilibre associées à une famille de systèmes dynamiques.

Fixons le cadre. Soit \mathcal{A} un bon anneau de Banach. Nous fixons des coordonnées homogènes T_0, T_1 sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ et posons $T := T_0/T_1$. Posons $\infty := [1 : 0]$ et identifions $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \setminus \{\infty\}$ à la droite affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ (munie de la coordonnée T).

Soit Y un espace \mathcal{A} -analytique. Soit $X := \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} Y$ et notons $\pi : X \rightarrow Y$ la seconde projection. Pour toute partie V de Y , posons $X_V := \pi^{-1}(V)$. Pour tout point y de Y , posons $X_y := \pi^{-1}(y)$.

Soit $X' := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} Y \subset X$. Pour toute partie V de Y , posons $X'_V := X_V \cap X'$. Pour tout point y de Y , posons $X'_y := X_y \cap X'$.

Soit $X'' := (\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \setminus \{0\}) \times_{\mathcal{A}} Y \subset X$. Pour toute partie V de Y , posons $X''_V := X_V \cap X''$. Pour tout point y de Y , posons $X''_y := X_y \cap X''$.

Introduisons finalement des notations pour les disques relatifs. Pour toute partie V de Y et tout $r \in \mathbf{R}_{>0}$, posons

$$\begin{aligned} D_V(r) &:= \{x \in X'_V : |T(x)| < r\}, \\ \overline{D}_V(r) &:= \{x \in X'_V : |T(x)| \leq r\}, \\ D_V^\infty(r) &:= \{x \in X''_V : |T(x)| > r^{-1}\}, \\ \overline{D}_V^\infty(r) &:= \{x \in X''_V : |T(x)| \geq r^{-1}\}. \end{aligned}$$

Pour tout $y \in Y$ et tout $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on définit de même $D_y(r)$, $\overline{D}_y(r)$, $D_y^\infty(r)$ et $\overline{D}_y^\infty(r)$.

6.1. Gauß, Haar, Chambert–Loir. — Dans [CL06], Antoine Chambert–Loir esquisse une analogie entre la mesure de Haar sur un cercle du plan complexe et la mesure de Dirac en un point de Gauss d'une droite de Berkovich, et en tire profit pour démontrer des résultats d'équidistribution. Nous proposons ici une incarnation de cette idée sous la forme d'un résultat de continuité pour des familles mêlant mesures de Gauß et mesures de Haar.

Notation 6.1. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Pour $z \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on pose

$$C_k(z, r) := \{x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} : |(T - z)(x)| = r\}.$$

Pour $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on pose

$$C_k(\infty, r) := C_k(0, r^{-1}).$$

Notation 6.2. — • Soit $\varepsilon \in]0, 1]$ et considérons le corps valué $\mathbf{C}_\varepsilon := (\mathbf{C}, |\cdot|_\infty^\varepsilon)$. Pour $z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on note $\chi_{\mathbf{C}_\varepsilon, z, r}$ la mesure de Haar de masse totale 1 sur le cercle $C_{\mathbf{C}_\varepsilon}(z, r)$.

On note $\chi_{\mathbf{C}_\varepsilon, z, 0}$ la mesure de Dirac δ_z sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$.

• Soit $\varepsilon \in]0, 1]$ et considérons le corps valué $\mathbf{R}_\varepsilon := (\mathbf{R}, |\cdot|_\infty^\varepsilon)$. Soient $z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$. Soit z' l'unique antécédent de z par le morphisme canonique $\text{pr}_{\mathbf{C}, \mathbf{R}}: \mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$. On pose $\mu_{\mathbf{R}_\varepsilon, z, r} := (\text{pr}_{\mathbf{C}, \mathbf{R}})_* \mu_{\mathbf{C}_\varepsilon, z', r}$. C'est une mesure positive de masse totale 1 sur $C_{\mathbf{R}_\varepsilon}(z, r)$.

On note $\chi_{\mathbf{R}_\varepsilon, z, 0}$ la mesure de Dirac δ_z sur $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\varepsilon}^{1, \text{an}}$.

• Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soient $z \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$. Rappelons que nous avons défini à la section 2.2.2 un point $\eta_{z, r}$ de $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ (qui n'est autre que l'unique point du bord de Shilov de la couronne $C_k(z, r)$).

On pose $\chi_{k, z, r} := \delta_{k, \eta_{z, r}}$.

On pose également $\chi_{k, \infty, r} := \chi_{k, 0, r^{-1}}$.

On note $\chi_{k, z, 0}$ (resp. $\chi_{k, \infty, 0}$) la mesure de Dirac δ_z (resp. δ_∞) sur $\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$.

On sous-entendra parfois le corps k si cela ne peut prêter à confusion.

Les deux résultats suivants découlent directement des définitions.

Lemme 6.3. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soit $(K, |\cdot|)$ une extension valuée complète de $(k, |\cdot|)$ et notons $\text{pr}_{K, k}: \mathbf{P}_K^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_k^{1, \text{an}}$ le morphisme canonique. Pour tout $z \in \mathbf{A}_K^{1, \text{an}}$ et tout $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on a

$$(\text{pr}_{K, k})_* \chi_{K, z, r} = \chi_{k, \text{pr}_{K, k}(z), r}.$$

□

Lemme 6.4. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Notons k_ε le corps k muni de la valeur absolue $|\cdot|^\varepsilon$. Pour tous $z \in \mathbf{P}^1(k)$ et $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on a

$$(\Phi_\varepsilon)_* \chi_{k, z, r} = \chi_{k_\varepsilon, z, r^\varepsilon},$$

avec les notations de la section 2.3.1.

□

Remarquons qu'à l'aide du laplacien, on peut définir les mesures $\chi_{k, z, r}$ de façon uniforme.

Lemme 6.5. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Pour tout $z \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$, on a

$$\Delta \max(-\log(|T - z|), \log(r)) = \chi_{k, z, r} - \delta_{k, z} \text{ dans } \text{Mes}(\mathbf{P}_k^{1, \text{an}}).$$

□

Nous allons démontrer la continuité de familles de mesures de la forme $\chi_{k, z, r}$.

Notation 6.6. — Soient $c \in \mathcal{O}(Y)$ et $\varrho: Y \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ une fonction continue. On note $\chi_{c, \varrho}$ la π -famille de mesures définie par

$$\forall y \in Y, \chi_{c, \varrho, y} := \chi_{\mathcal{H}(y), c(y), \varrho(y)} \text{ dans } \text{Mes}^1(X_y).$$

Lemme 6.7. — Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $r_1, r_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Alors, pour toute $f \in C_c(\mathbf{P}_{\mathbf{C}_\varepsilon}^{1, \text{an}}, \mathbf{R})$ à support contenu dans $\overline{D}(z_1, r_1)$, on a

$$\int f d\chi_{\mathbf{C}_\varepsilon, z_2, r_2} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{1/\varepsilon} \|f\|_\infty.$$

Démonstration. — Le lemme 6.4 permet de se ramener au cas où $\varepsilon = 1$. L'intersection du disque $\overline{D}(z_1, r_1)$ et du cercle $C(z_2, r_2)$ est un arc de longueur inférieure à $2\pi r_1$. On en déduit que

$$\int f \, d\chi_{z_2, r_2} \leq \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} \|f\|_\infty = \frac{r_1}{r_2} \|f\|_\infty.$$

□

Théorème 6.8. — Soient $c \in \mathcal{O}(Y)$ et $\varrho: Y \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ une fonction continue. Alors la famille de mesures $\chi_{c, \varrho}$ est continue.

Démonstration. — Il suffit de montrer que la famille est continue au voisinage de tout point de Y . Soit $y \in Y$. D'après le lemme 2.1, on peut supposer que $Y = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et que $c \in \mathcal{A}$. Quitte à effectuer le changement de variable $T \mapsto T - c$, on peut supposer que, pour tout $y \in Y$, on a $c(y) = 0$.

• Supposons que y est ultramétrique.

Soit \mathfrak{F} un filtre sur Y convergeant vers y . Il suffit de montrer que son image \mathfrak{F}_χ par $z \mapsto \chi_{0, \varrho(z)}$ converge vers $\chi_{0, \varrho(y)}$. Par compacité de l'espace des mesures de probabilité, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de \mathfrak{F}_χ coïncide avec $\chi_{0, \varrho(y)}$. Soit μ une telle valeur d'adhérence.

Pour montrer que $\mu = \chi_{0, \varrho(y)}$, il suffit de montrer que son support est réduit à $\{\eta_{0, \varrho(y)}\}$. Puisque, pour tout $z \in Y$, le support de $\chi_{0, \varrho(z)}$ est contenu dans X_z , on a $\text{Supp}(\mu) \subset X_y$. Soit $x \in X_y \setminus \{\eta_{0, \varrho(y)}\}$. Nous allons distinguer deux cas.

•• Supposons que $|T(x)| > \varrho(y)$.

Soit $s \in]\varrho(y), |T(x)|[$. Par continuité de ϱ , quitte à remplacer Y par un voisinage de y , on peut supposer que, pour tout $z \in Y$, on a $\varrho(z) < s$. Dans ce cas, $D_Y^\infty(s^{-1})$ est un voisinage de x et, pour tout $z \in Y$, on a

$$\text{Supp}(\chi_{0, \varrho(z), z}) \cap D_Y^\infty(s^{-1}) = \emptyset.$$

On en déduit que, pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ à support dans $D_Y^\infty(s^{-1})$, on a

$$\int f \, d\mu = 0,$$

et donc que $x \notin \text{Supp}(\mu)$.

•• Supposons que $|T(x)| \leq \varrho(y)$.

Soit α un point rigide de $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1, \text{an}}$ appartenant à la composante connexe de $X_y \setminus \{\eta_{0, \varrho(y)}\}$ contenant x .⁽³⁾ Remarquons que $\alpha \in \overline{D}_y(0, \varrho(y))$. Notons $P \in \mathcal{H}(y)[T]$ le polynôme minimal de α et $d \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ son degré. On a alors

$$|P(x)| < |P(\eta_{0, \varrho(y)})| = \varrho(y)^d.$$

Grâce aux propriétés ultramétriques du corps $\mathcal{H}(y)$, la relation précédente reste satisfaite après une petite perturbation des coefficients de P . On peut donc supposer que P appartient à $\kappa(y)[T]$, et même à $\mathcal{O}(Y)[T]$, quitte à remplacer Y par un voisinage de y .

⁽³⁾ Si le point α peut être choisi de façon à appartenir à l'image de $\mathcal{O}(Y)$ dans $\mathcal{H}(y)$, alors on peut se ramener au cas précédent par un changement de variables. En général, cependant, un tel choix n'est pas possible.

Soient $s, t \in]|P(x)|, \varrho(y)^d[$ avec $s < t$. Quitte à restreindre Y , on peut supposer que, pour tout $z \in Y$, on a $t \leq \varrho(z)^d$. Posons

$$U := \{u \in X : |P(u)| < s\}.$$

C'est un voisinage ouvert de x . Soit $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$ à support dans U . Soit $z \in Y$.

Supposons que z est ultramétrique. Puisque P est unitaire de degré d , on a

$$|P(\eta_{0, \varrho(z)})| \geq \varrho(z)^d \geq t > s,$$

donc $\eta_{0, \varrho(z)} \notin U$ et

$$\int f \, d\chi_{0, \varrho(z), z} = 0.$$

Supposons que z est archimédien. Il existe $\varepsilon(z) \in]0, 1[$ tel que le corps résiduel $\mathcal{H}(z)$ soit isomorphe à \mathbf{R} ou \mathbf{C} muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^{\varepsilon(z)}$. Notons K_z le corps valué \mathbf{C} muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^{\varepsilon(z)}$. C'est une extension de $\mathcal{H}(z)$. Notons $\text{pr}_z: \mathbf{P}_{K_z}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{H}(z)}^{1, \text{an}}$ le morphisme naturel. Notons $P_z(T)$ l'image de $P(T)$ dans $K_z[T]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in K_z$ ses racines.

Soit $u \in \text{pr}_z^{-1}(U \cap X_z)$. Soit $j_u \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $|u - \alpha_{j_u}| = \min_{1 \leq i \leq d} (|u - \alpha_i|)$. On a alors $|u - \alpha_{j_u}|^d \leq |P(u)| < s$. On en déduit que

$$\text{pr}_z^{-1}(U \cap X_z) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq d} D_{K_z}(\alpha_i, s^{1/d}).$$

D'après les lemmes 6.3 et 6.7, on a donc

$$\int f \, d\chi_{0, \varrho(z), z} \leq d \left(\frac{s^{1/d}}{\varrho(z)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon(z)}} \|f\|_\infty \leq d \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{d\varepsilon(z)}} \|f\|_\infty.$$

D'après la remarque 2.2, on a $\varepsilon(z) = \frac{\log(\lfloor 2(z) \rfloor)}{\log(2)} \in]0, 1[$. Puisque y est ultramétrique, cette quantité tend vers 0 lorsque z tend vers y selon \mathfrak{F} . On en déduit que

$$\int f \, d\mu = 0,$$

et donc que $x \notin \text{Supp}(\mu)$.

- Supposons que y est archimédien.

Quitte à remplacer Y par un voisinage de y , on peut supposer que tout point de Y est archimédien. L'injection canonique $j_{\mathbf{Z}}: \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)$ s'étend alors en une injection $j_{\mathbf{Q}}: \mathbf{Q} \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)$ puis $j_{\mathbf{R}}: \mathbf{R} \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)$.

D'après [Poi10, lemme 5.2.2], on peut munir l'anneau $\mathcal{A}' := \mathcal{A}[t]/(t^2 + 1)$ d'une norme de \mathcal{A} -algèbre de Banach. Considérons le morphisme canonique $\text{pr}_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}: \mathcal{M}(\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et posons $\varrho' := \varrho \circ \text{pr}_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}$. D'après le lemme 6.3, il suffit de montrer que la famille de mesures $\chi_{0, \varrho'}$ sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}'}^{1, \text{an}}$ est continue en un point de $\text{pr}_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}^{-1}(y)$. On peut donc remplacer \mathcal{A} par \mathcal{A}' . Désormais, pour $y \in Y$, on a $\mathcal{H}(y) \simeq \mathbf{C}$ et l'injection $j_{\mathbf{R}}$ se prolonge donc en une injection $j_{\mathbf{C}}: \mathbf{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)$ envoyant i sur t .

Soit \mathfrak{F} un filtre sur Y convergeant vers y . Par le même argument que dans le cas ultramétrique, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de l'image \mathfrak{F} par $z \mapsto \chi_{0, \varrho(z)}$ coïncide avec $\chi_{0, \varrho(y)}$. Soit μ une telle valeur d'adhérence.

Pour tout $z \in Y$, le support de $\chi_{0,\varrho(z)}$ est contenu dans $C_{\mathcal{H}(z)}(0, \varrho(z)) \subset X_z$. On en déduit que $\text{Supp}(\mu) \subset C_{\mathcal{H}(y)}(0, \varrho(y)) \subset X_y$. En outre, μ est positive et de masse totale 1.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, on note $m_{Y,\alpha}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$ l'application induite par la multiplication par α via $j_{\mathbf{C}}$ et $m_{X,\alpha}: \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ l'application induite par $m_{X,\alpha}$ en tirant en arrière par π .

Pour tout $z \in Y$, la mesure $\chi_{0,\varrho(z)}$ est invariante par rotation, au sens où, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$ avec $|\alpha| = 1$ et tout $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$, on a

$$\int f \circ m_{X,\alpha} d\chi_{0,\varrho(z)} = \int f d\chi_{0,\varrho(z)}.$$

On en déduit que μ est également invariante par rotation. On conclut que $\mu = \chi_{0,\varrho(y)}$ en utilisant la caractérisation de la mesure de Haar sur le cercle $C_{\mathcal{H}(y)}(0, \varrho(y))$. \square

6.2. Fonctions affables. — Afin de démontrer la continuité de famille de mesures, il est commode de disposer de familles de fonctions continues maniabiles qui soient denses dans l'ensemble des fonctions continues. Dans ce but, nous définissons ici les fonction affables, inspirées des fonctions modèles introduites par Charles Favre (cf. [Fav20, section 2]).

Définition 6.9. — Soit U un ouvert de X . Une fonction $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *positivement affable basique* s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, un élément $q_0 \in \mathbf{Q} \cup \{-\infty\}$, des nombres rationnels $q_1, \dots, q_n \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ et des fonctions $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}(U)$ tels que

$$f = \max(q_0, q_1 \log(|g_1|), \dots, q_n \log(|g_n|)).$$

Une fonction $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *affable basique* si elle est différence de deux fonctions positivement affables basiques.

On note $\mathcal{A}_{pb}(U, \mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{A}_b(U, \mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions positivement affables basiques (resp. affables basiques) sur U .

Lemme 6.10. — Soient U un ouvert de X .

- i) Pour tout $f \in \mathcal{A}_{pb}(U, \mathbf{R})$ et tout $y \in Y$, $f|_{U \cap X_y}$ est sous-harmonique.
- ii) Pour tout $f \in \mathcal{A}_b(U, \mathbf{R})$ et tout $y \in Y$, $f|_{U \cap X_y}$ est différence locale de fonctions sous-harmoniques continues.
- iii) L'ensemble $\mathcal{A}_{pb}(U, \mathbf{R})$ est stable par les opérations binaires $+$ et \max .
- iv) L'ensemble $\mathcal{A}_b(U, \mathbf{R})$ est un sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, \mathbf{R})$ stable par les opérations binaires \min et \max .

Démonstration. — Les points i) et ii) découlent directement des définitions.

iii) Pour $n, n' \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, $q_0, q'_0 \in \mathbf{Q} \cup \{-\infty\}$, $q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_{n'} \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ et $g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_{n'} \in \mathcal{O}(U)$, on a

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq u \leq n} (q_0, q_u \log(|g_u|)) + \max_{1 \leq v \leq n'} (q'_0, q'_v \log(|g'_v|)) \\ &= \max_{\substack{1 \leq u \leq n \\ 1 \leq v \leq n'}} (q_0 q'_0, q_0 q'_v \log(|g'_v|), q'_0 q_u \log(|g_u|), q_u q'_v \log(|g_u g'_v|)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{A}_{pb}(U, \mathbf{R})$ est stable par $+$. La stabilité par \max est évidente.

iv) L'ensemble $\mathcal{A}_b(U, \mathbf{R})$ est stable par multiplication par un élément de \mathbf{Q} . D'après ii), il est stable par somme et on en déduit qu'il forme un sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, \mathbf{R})$.

Montrons la stabilité par max. Soient $u, v \in \mathcal{A}_b(U, \mathbf{R})$. Il existe $u^+, u^-, v^+, v^- \in \mathcal{A}_{pb}(U, \mathbf{R})$ telles que $u = u^+ - u^-$ et $v = v^+ - v^-$. On a

$$\begin{aligned} \max(u, v) &= \max(u^+ - u^-, v^+ - v^-) \\ &= \max(u^+ + v^-, v^+ + u^-) - (u^- + v^-), \end{aligned}$$

et le résultat découle maintenant de iii).

La stabilité par min se déduit de la stabilité par max en passant à l'opposé. \square

Définition 6.11. — Soit V un ouvert de Y . Une fonction $f: X_V \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *affable* si ses restrictions à X'_V et X''_V sont affables basiques. On note $\mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions affables sur X_V .

Lemme 6.12. — Soit V un ouvert de Y . L'ensemble $\mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ est un sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel de $\mathcal{C}(X_V, \mathbf{R})$ stable par les opérations binaires min et max.

Démonstration. — Cela découle directement du point iv) du lemme 6.10. \square

Proposition 6.13. — Soient V un ouvert de Y et $f: X_V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction affable. Alors, la fonction

$$y \in V \mapsto \int d|\Delta f|_y \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est bornée sur tout compact.

Démonstration. — Par définition, il existe $f_0^+, f_0^- \in \mathcal{A}_b(X'_V, \mathbf{R})$ et $f_\infty^+, f_\infty^- \in \mathcal{A}_b(X''_V, \mathbf{R})$ tels que $f|_{X'_V} = f_0^+ - f_0^-$ et $f|_{X''_V} = f_\infty^+ - f_\infty^-$.

Soit K une partie compacte de V et soit $y \in K$. Soient $h_0, h_\infty \in \mathcal{C}(X_y, [0, 1])$ telles que $\text{Supp}(h_0) \subset D_y(2)$, $\text{Supp}(h_\infty) \subset D_y^\infty(2)$ et

$$\forall x \in X_y, h_0(x) + h_\infty(x) = 1.$$

D'après la proposition 5.3, avec les adaptations des sections 5.2.1 et 5.2.2, si y est archimédien, ou la proposition 5.10, si y est ultramétrique, on a

$$\begin{aligned} \int h_0 d|\Delta f|_y &= \int h_0 d|\Delta(f_{0,y}^+ - f_{0,y}^-)| \\ &\leq \int h_0 d\Delta f_{0,y}^+ + \int h_0 d\Delta f_{0,y}^- \\ &\leq \frac{2}{\log(2)} (\|f_0^+\|_{\overline{D}_y(4)} + \|f_0^-\|_{\overline{D}_y(4)}) \\ &\leq \frac{2}{\log(2)} (\|f_0^+\|_{\overline{D}_K(4)} + \|f_0^-\|_{\overline{D}_K(4)}). \end{aligned}$$

et, par un raisonnement similaire,

$$\int h_\infty d|\Delta f|_y \leq \frac{2}{\log(2)} (\|f_\infty^+\|_{\overline{D}_K^\infty(4)} + \|f_\infty^-\|_{\overline{D}_K^\infty(4)}).$$

Le résultat s'ensuit. \square

Démontrons maintenant un résultat de densité, en suivant la stratégie de la preuve de [Fav20, theorem 2.12].

Théorème 6.14. — Soit V un ouvert de Y et supposons que

- i) il existe une immersion de V dans un espace affine analytique sur \mathcal{A} ;
- ii) pour tout $y \in Y$, il existe $\alpha_y \in \mathcal{O}(V)$ tel que $|\alpha_y(y)| > 1$.

Alors, $\mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(X_V, \mathbf{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, pour toute partie compacte K de X_V , $\mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$. Si $\mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ sépare les points de X_V , alors le lemme 6.12 permet d'appliquer le théorème de Stone-Weierstraß, et le résultat s'en suit.

Il suffit donc de démontrer que $\mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ sépare les points de X_V . Soient $x_1 \neq x_2 \in X_V$. Distinguons deux cas.

- Supposons que $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$.

Puisque V peut se plonger dans un espace affine analytique sur \mathcal{A} , il existe $g \in \mathcal{O}(V)$ tel que $|g(\pi(x_1))| \neq |g(\pi(x_2))|$. On peut supposer que $|g(\pi(x_1))| < |g(\pi(x_2))|$. Soit $q \in \mathbf{Q} \cap]\log(|g(\pi(x_1))|), \log(|g(\pi(x_2))|)[$. Alors la fonction

$$f := \max(q, \log(|\pi^*g|))$$

est une fonction affable sur X_V qui sépare x_1 et x_2 .

- Supposons que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Notons y ce point.
- Supposons que x_1 et x_2 appartiennent à $\overline{D}_V(1)$.

Puisque V peut se plonger dans un espace affine analytique sur \mathcal{A} , il existe $g \in \mathcal{O}(V)[T]$ tel que $|g(x_1)| \neq |g(x_2)|$. Notons d le degré de g . Quitte à échanger x_1 et x_2 , on peut supposer que $|g(x_1)| > |g(x_2)|$ et, quitte à multiplier g par une puissance suffisamment grande de α_y , on peut supposer que $|g(x_1)| > 1$.

Posons $G := T_1^d g(T_0/T_1) \in \mathcal{O}(V)[T_1, T_2]$. C'est un polynôme homogène de degré d . Posons

$$F := \max(d \log(|T_0|), d \log(|T_1|), \log(|G|)) - \max(d \log(|T_0|), d \log(|T_1|)).$$

C'est une fonction bien définie sur X_V , affable par construction, et qui coïncide avec $\max(0, \log(|g|))$ sur $\overline{D}_V(1)$. Elle sépare donc les points x_1 et x_2 .

- Supposons que x_1 et x_2 appartiennent à $\overline{D}_V^\infty(1)$.

On se ramène au cas précédent en échangeant les coordonnées projectives T_0 et T_1 .

- Supposons que les points x_1 et x_2 appartiennent l'un à $D_V(1)$ et l'autre à $D_V^\infty(1)$.

La fonction

$$F := \max(\log(|T_0|), \log(|T_1|), \log(|T_0 + \alpha_y T_1|)) - \max(\log(|T_0|), \log(|T_1|))$$

est alors une fonction affable sur X_V qui sépare x_1 et x_2 . □

6.3. Mesures d'équilibre. — L'objet de cette section est d'étudier un système dynamique polarisé (*cf.* section 4.3) dans le cadre de la droite projective relative que nous utilisons désormais, et de démontrer la continuité de la famille de mesures d'équilibre associées.

Notation 6.15. — Soit $d \in \mathbf{Z}$. Le fibré en droites $\mathcal{O}(d)$ sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^1$ induit un fibré en droite sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ par analytification, puis un fibré en droites sur X en tirant en arrière par la projection $X \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$. Notons $\mathcal{O}_X(d)$ ce fibré.

Introduisons maintenant un système dynamique polarisé que nous utiliserons dans toute cette section. Nous supposons que nous disposons d'un morphisme d'espaces analytiques surjectif, fini et plat $\varphi: X \rightarrow X$ au-dessus de Y , de degré $d \geq 2$, et d'un isomorphisme

$$\theta: \varphi^* \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(d).$$

En plus des hypothèses formulées au début de la section 6, nous supposons que l'espace Y est séparé (ce qui entraîne que l'espace X l'est également).

Définition 6.16. — On appelle *métrique standard* sur le fibré $\mathcal{O}_X(1)$ la métrique dont la restriction à toute fibre $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$, pour $y \in Y$, est la métrique standard sur $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$, comme définie dans l'exemple 4.3. On la note encore $\|\cdot\|_{\text{st}}$. C'est une métrique continue.

Remarquons que, pour tout $x \in X$, on a

$$-\log(\|T_0\|_{\text{st},x}) = \max(-\log(|T(x)|), 0).$$

Par conséquent, pour tout $y \in Y$, la fonction $x \mapsto -\log(\|T_0\|_{\text{st},x})$ est sous-harmonique continue sur $X_y \setminus \{0\}$ et on a

$$\Delta(-\log(\|T_0\|_{\text{st},|X_y})) = \chi_{0,1} - \delta_0 \text{ dans } \text{Mes}(X_y).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Lemme 6.17. — Soient $y \in Y$ et $s \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$. La fonction $x \mapsto -\log(\|s\|_{\text{st},x})$ est sous-harmonique continue sur $X_y \setminus \text{div}(s)$ et on a

$$\Delta(-\log(\|s\|_{\text{st},|X_y})) = \chi_{0,1} - \delta_{\text{div}(s)} \text{ dans } \text{Mes}(X_y).$$

□

Étudions maintenant le comportement de la norme standard vis-à-vis du flot. Nous utilisons ici la terminologie et les notations de la section 2.3.2. Notons que, si V est un ouvert flottant de Y , alors X_V est un ouvert flottant de X .

Lemme 6.18. — Supposons que \mathcal{A} est flottant. Soit V un ouvert flottant de Y . Alors X_V est un ouvert flottant de X et, pour toute $s \in \Gamma(X_V, \mathcal{O}_X(1))$, la fonction

$$x \in X_V \mapsto \|s\|_{\text{st},x} \in \mathbf{R}$$

est flottante.

Démonstration. — Le résultat découle directement de l'expression explicite de la métrique standard présentée dans l'exemple 4.3. □

Par les arguments de la section 4.3, on peut définir une application

$$\Phi: \text{Mét}(\mathcal{O}_X(1)) \longrightarrow \text{Mét}(\mathcal{O}_X(1))$$

et une métrique $\|\cdot\|_{\varphi}$ sur $\mathcal{O}_X(1)$ telle que

$$\varphi^* \|\cdot\|_{\varphi} = \|\cdot\|_{\varphi}^{\otimes d} \circ \theta \text{ dans } \text{Mét}(\varphi^* \mathcal{O}_X(1)).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $\|\cdot\|_n := \Phi^n(\|\cdot\|_{\text{st}})$.

Lemme 6.19. — *Supposons que \mathcal{A} est flottant. Soit V un ouvert flottant de Y et supposons que l'endomorphisme $\varphi|_{X_V}$ de X_V est flottant. Alors, pour toute $s \in \Gamma(X_V, \mathcal{O}_X(1))$, les fonctions*

$$x \in X_V \mapsto \|s\|_{n,x} \in \mathbf{R}, \text{ pour } n \in \mathbf{N},$$

et la fonction

$$x \in X_V \mapsto \|s\|_{\varphi,x} \in \mathbf{R}$$

sont flottantes.

Démonstration. — Le résultat pour $\|\cdot\|_n$ découle du lemme 6.18 et des définitions. Le résultat pour $\|\cdot\|_{\varphi}$ s'en déduit par passage à la limite. \square

Notons μ_0 la π -famille de mesures définie comme suit : pour tout $y \in Y$,

$$\mu_{0,y} := \chi_{0,1} \text{ dans } \text{Mes}(X_y).$$

Elle est continue, d'après le théorème 6.8.

Pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, posons $\mu_n := \frac{1}{d^n} (\varphi^n)^* \mu_0$. D'après la remarque 3.14, pour tout $y \in Y$, $\mu_{n,y}$ est une mesure de probabilité sur X_y . D'après le lemme 3.19, μ_n est encore une π -famille de mesures continue.

Lemme 6.20. — *Supposons que \mathcal{A} est flottant. Soit V un ouvert flottant de Y et supposons que l'endomorphisme $\varphi|_{X_V}$ de X_V est flottant. Alors la famille de mesures μ_n est flottante.*

Démonstration. — Le résultat découle du lemme 6.4 et des définitions. \square

La relation entre $\|\cdot\|_{\text{st}}$ et $\chi_{0,1}$ énoncée au lemme 6.17 se transfère à $\|\cdot\|_n$ et μ_n .

Proposition 6.21. — *Soient $y \in Y$ et $n \in \mathbf{N}$. Pour toute $s \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$, la fonction $x \mapsto -\log(\|s\|_{n,x})$ est sous-harmonique continue sur $X_y \setminus \text{div}(s)$ et on a*

$$\Delta(-\log(\|s\|_{n,|X_y})) = \mu_n - \delta_{\text{div}(s)} \text{ dans } \text{Mes}(X_y).$$

Démonstration. — Démontrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. Le cas $n = 0$ n'est autre que le résultat du lemme 6.17.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons que le résultat est vérifié pour $\|\cdot\|_n$. Soit $s \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$. D'après la remarque 4.9, pour toute $s' \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$ et tout $x \in X_y \setminus \varphi^{-1}(\text{div}(s'))$, on a

$$\|s\|_{n+1,x}^d = \left| \frac{\theta^{-1}(s^{\otimes d})(x)}{(\varphi^* s')(x)} \right| \|s'\|_{n,\varphi(x)}.$$

Soit $x \in X_y$. Soit $s' \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$ telle que $s'(\varphi(x)) \neq 0$. Soit U un voisinage ouvert de $\varphi(x)$ dans X_y sur lequel s' ne s'annule pas et $\mathcal{O}_{X_y}(1)$ est trivial. Soit V un voisinage ouvert de x dans $\varphi^{-1}(U)$ sur lequel $\mathcal{O}_{X_y}(1)$ est trivial. Dans ces conditions, on peut identifier $\theta^{-1}(s^{\otimes d})$ et $\varphi^* s'$ à des fonctions analytiques sur V , $\varphi^* s'$ étant inversible. On déduit alors de l'hypothèse de récurrence que la fonction $z \mapsto -\log(\|s\|_{n+1,z})$ est sous-harmonique continue sur $V \setminus \text{div}(s)$ et, en utilisant la

formule de Poincaré-Lelong et la propriété de rétrotirette, que

$$\begin{aligned} \Delta(-\log(\|s\|_{n+1,|V}^d)) &= \Delta(-\log(|\theta^{-1}(s^{\otimes d})|)|_V) + \Delta(-\log(\|s'\|_n \circ \varphi)|_V) \\ &= -d \delta_{\operatorname{div}(s) \cap V} + \varphi^* \mu_{n,|V} \\ &= d(\mu_{n+1,|V} - \delta_{\operatorname{div}(s) \cap V}). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit. \square

Corollaire 6.22. — Soit $y \in Y$. Pour toute $s \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$, la fonction $x \mapsto -\log(\|s\|_{\varphi,x})$ est sous-harmonique continue sur $X_y \setminus \operatorname{div}(s)$.

Démonstration. — D'après le théorème 4.10, pour toute $s \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$, la suite de fonctions $(x \mapsto -\log(\|s\|_{n,x}))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers la fonction $x \mapsto -\log(\|s\|_{\varphi,x})$ uniformément sur tout compact de $X_y \setminus \operatorname{div}(s)$. Le résultat découle alors de la proposition 6.21. \square

Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in X$, la quantité $\log(\|s\|_{n,x}) - \log(\|s\|_{\operatorname{st},x})$ est indépendante du choix de $s \in \mathcal{O}_Y(1)(x) \setminus \{0\}$. On peut donc définir une fonction $\lambda_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ en posant, pour tout $x \in X$,

$$\lambda_n(x) := \log(\|s\|_{n,x}) - \log(\|s\|_{\operatorname{st},x}),$$

pour $s \in \mathcal{O}_Y(1)(x) \setminus \{0\}$.

De même, on peut définir une fonction $\lambda_\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ en posant, pour tout $x \in X$,

$$\lambda_\varphi(x) := \log(\|s\|_{\varphi,x}) - \log(\|s\|_{\operatorname{st},x}),$$

pour $s \in \mathcal{O}_Y(1)(x) \setminus \{0\}$.

On déduit du théorème 4.10 que la suite de fonctions $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers λ_φ uniformément sur tout compact de X .

Lemme 6.23. —

- i) Les fonctions λ_n , pour $n \in \mathbf{N}$, et λ_φ sont continues sur X .
- ii) Pour tout $y \in Y$, les fonctions $\lambda_{n,|X_y}$, pour $n \in \mathbf{N}$, et $\lambda_{\varphi,|X_y}$ sont différences locales de fonctions sous-harmoniques continues.
- iii) Supposons que \mathcal{A} est flottant. Soit V un ouvert flottant de Y et supposons que l'endomorphisme $\varphi|_{X_V}$ de X_V est flottant. Alors, les fonctions λ_n , pour $n \in \mathbf{N}$, et λ_φ sont log-flottantes.

Démonstration. — i) Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in X$. Il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une section $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(1))$ ne s'annulant pas sur U . On a alors,

$$\forall z \in U, \lambda_n(z) := \log(\|s\|_{n,z}) - \log(\|s\|_{\operatorname{st},z}).$$

La continuité de λ_n en x se déduit alors de celles de $z \mapsto \|s\|_{n,z}$ et $z \mapsto \|s\|_{\operatorname{st},z}$.

Le résultat pour λ_φ se démontre de même.

ii) Soit $y \in Y$. On peut recouvrir X_y par des ouverts de la forme $X_y \setminus \operatorname{div}(s)$, avec $s \in \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(1))$. Le résultat découle alors du lemme 6.17, de la proposition 6.21 et du corollaire 6.22.

iii) C'est une conséquence directe du lemme 6.19. \square

Pour tout $y \in Y$, posons

$$\mu_{\varphi,y} := \chi_{0,1} - \Delta(\lambda_{\varphi,|X_y}) \text{ dans } \operatorname{Mes}(X_y).$$

Considérons la famille de mesures $\mu_\varphi := (\mu_{\varphi,y})_{y \in Y}$.

Lemme 6.24. — *Supposons que \mathcal{A} est flottant. Soit V un ouvert flottant de Y et supposons que l'endomorphisme $\varphi|_{X_V}$ de X_V est flottant. Alors la famille de mesures μ_φ est flottante.*

Démonstration. — La propriété est vérifiée pour $\chi_{0,1}$ d'après le lemme 6.4. Le fait qu'elle soit vérifiée pour $\Delta(\lambda_{\varphi,|X_y})$ découle du fait que λ_φ est log-flottante (cf. lemme 6.23) et des propriétés du laplacien. \square

Proposition 6.25. — *Pour tout $y \in Y$, la suite $(\mu_{n,y})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vaguement vers $\mu_{\varphi,y}$.*

En particulier, pour tout $y \in Y$, la mesure $\mu_{\varphi,y}$ est positive et de masse totale 1 et on a

$$\varphi^* \mu_{\varphi,y} = d \mu_{\varphi,y}.$$

Démonstration. — Soit $y \in Y$. Soit L une extension valuée complète de $\mathcal{H}(y)$. L'endomorphisme φ de $X_y \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$ induit, par extension des scalaires, un endomorphisme φ_L de $\mathbf{A}_L^{1,\text{an}}$. En outre, le résultat sur $\mathbf{A}_L^{1,\text{an}}$ implique celui sur X_y . Quitte à remplacer $\mathcal{H}(y)$ par une extension L convenable, on peut donc supposer que $\mathcal{H}(y)$ n'est pas trivialement valué.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $\rho_n := \lambda_{\varphi,|X_y} - \lambda_{n,|X_y} \in \mathcal{C}(X_y, \mathbf{R})$. La fonction ρ_n est localement différence de fonctions sous-harmoniques continues et on a

$$\Delta \rho_n = \mu_n - \mu_\varphi.$$

En outre, la suite de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0 sur X_y .

Soit $f \in \mathbf{C}(X_y, \mathbf{R})$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. D'après le théorème 6.14, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{A}(X_y, \mathbf{R})$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{X_y} \leq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Par symétrie du laplacien, on a

$$\left| \int f_\varepsilon d\mu_{\varphi,y} - \int f_\varepsilon d\mu_{n,y} \right| = \left| \int \rho_n d\Delta f_\varepsilon \right| \leq \|\rho_n\|_{X_y} \int d|\Delta f_\varepsilon|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu_{\varphi,y} - \int f d\mu_{n,y} \right| &\leq \left| \int (f - f_\varepsilon) d\mu_{\varphi,y} \right| + \left| \int f_\varepsilon d\mu_{\varphi,y} - \int f_\varepsilon d\mu_{n,y} \right| \\ &\quad + \left| \int (f_\varepsilon - f) d\mu_{n,y} \right| \\ &\leq \varepsilon \int d|\mu_{\varphi,y}| + \|\rho_n\|_{X_y} \int d|\Delta f_\varepsilon| + \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(\mu_{n,y})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vaguement vers $\mu_{\varphi,y}$. Le reste de l'énoncé s'en déduit en passant à la limite. \square

Théorème 6.26. — *La famille de mesures μ_φ est continue.*

Démonstration. — Soient $r, s \in]1, +\infty[$ avec $r < s$. Considérons la droite analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ munie de la coordonnée T_0 , posons

$$C_{\mathcal{A}}(r, s) := \{z \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} : r < |T_0(z)| < s\}$$

et $Y' := Y \times_{\mathcal{A}} C_{\mathcal{A}}(r, s)$. Pour tout $y' \in Y'$, on a $|T_0(y')| > 1$.

La première projection fournit un morphisme $\text{pr}_1: Y' \rightarrow Y$ et toutes les données de la section : X, φ , etc. s'étendent par changement de base à Y' . En outre, puisque pr_1 est continue et surjective, il suffit de démontrer le résultat après changement de base à Y' . Quitte à remplacer Y par Y' , on peut donc supposer que, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert V de y et $\alpha \in \mathcal{O}(V)$ tel que $|\alpha(y)| > 1$.

Soit $y \in Y$. Démontrons que la famille μ_φ est continue en y . Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V de y et $\alpha \in \mathcal{O}(V)$ tel que $|\alpha(y)| > 1$. Quitte à restreindre V , on peut supposer qu'il se plonge dans un espace affine analytique sur \mathcal{A} et que, pour tout $z \in V$, on a $|\alpha(z)| > 1$.

Soit $f \in \mathcal{C}_c(X_V, \mathbf{R})$. Nous souhaitons montrer que la fonction

$$\begin{aligned} I_{f,\varphi}: V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y &\longmapsto \int f \, d\mu_{\varphi,y} \end{aligned}$$

est continue en y . Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} I_{f,n}: V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y &\longmapsto \int f \, d\mu_{n,y} \end{aligned} \text{ ,}$$

est continue et, d'après la proposition 6.25, la suite de fonctions $(I_{f,n})_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers $I_{f,\varphi}$. Pour conclure, il suffit de montrer que la convergence est uniforme sur un voisinage de y .

Soit K un voisinage compact de y dans V . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $\rho_n := \lambda_{\varphi,|X_V} - \lambda_{n,|X_V} \in \mathcal{C}(X_V, \mathbf{R})$. La suite de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0 sur X_K .

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. D'après le théorème 6.14, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{A}(X_V, \mathbf{R})$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{X_K} \leq \varepsilon$. D'après la proposition 6.13, il existe $M_\varepsilon \in \mathbf{R}$ tel que,

$$\forall z \in K, \int d|\Delta f_{\varepsilon,|z}| \leq M_\varepsilon.$$

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $z \in K$. En utilisant le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 6.25 ainsi que la positivité de $\mu_{\varphi,z}$, on montre que

$$|I_{f,\varphi}(z) - I_{f,n}(z)| \leq 2\varepsilon + \|\rho_n\|_{X_K} M_\varepsilon.$$

Le résultat s'ensuit. □

Remarque 6.27. — On peut également proposer une preuve plus directe du théorème 6.26, suivant celle de R. Mañé dans le cas complexe (cf. [Mañ88, theorem B]). Elle est basée sur la caractérisation des mesures d'équilibre rappelée au début du texte, comme mesures invariantes ne chargeant pas l'ensemble exceptionnel. Considérons une suite (ou une suite généralisée) $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de Y convergeant vers un point y . Comme dans la preuve du théorème 6.8, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de $\mu_{\varphi_{y_n}}$ coïncide avec μ_{φ_y} . Soit μ une telle valeur d'adhérence. Chaque $\mu_{\varphi_{y_n}}$ étant invariante par φ_{y_n} , μ est invariante par φ_y . Supposons, par l'absurde, que μ charge l'ensemble exceptionnel de φ_y , et donc un point fixe super-attractif x . Il existe alors un voisinage U de x dans X tel que tout point z

de U appartienne à l'ensemble de Fatou de $\varphi_{\pi(z)}$. Par conséquent, x n'appartient pas à l'adhérence du support des $\mu_{\varphi_{y_n}}$, d'où la contradiction désirée.

Cet argument ne permet pas en revanche de démontrer la continuité des potentiels (*cf.* proposition C), ni celle des énergies mutuelles (*cf.* corollaire D).

Références

- [Ara74] S. Ju. Arakelov. An intersection theory for divisors on an arithmetic surface. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38 :1179–1192, 1974.
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161 (1994), 1993.
- [Ber09] Vladimir G. Berkovich. A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 49–67. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
- [BFT18] Fedor Bogomolov, Hang Fu, and Yuri Tschinkel. Torsion of elliptic curves and unlikely intersections. In *Geometry and physics. Vol. I*, pages 19–37. Oxford Univ. Press, Oxford, 2018.
- [BG06] Enrico Bombieri and Walter Gubler. *Heights in Diophantine geometry*, volume 4 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [BJ17] Sébastien Boucksom and Mattias Jonsson. Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms. *J. Éc. polytech. Math.*, 4 :87–139, 2017.
- [Bou65] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Intégration. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1965.
- [Bou71] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [Bou74] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 5 à 10*. Hermann, Paris, 1974.
- [BR10] Matthew Baker and Robert Rumely. *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, volume 159 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Bro65] H. Brolin. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6 :103–144, 1965.
- [BT76] Eric Bedford and B. A. Taylor. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation. *Invent. Math.*, 37 :1–44, 1976.
- [CL06] Antoine Chambert-Loir. Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich. *J. Reine Angew. Math.*, 595 :215–235, 2006.
- [CLD11] Antoine Chambert-Loir and Antoine Ducros. Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich. arXiv, 2011. <https://arxiv.org/abs/1204.6277>.
- [DF19] Romain Dujardin and Charles Favre. Dégénérescences de représentations dans $SL(2, \mathbb{C})$ et Exposants de Lyapunov. *Ann. Henri Lebesgue*, 2 :515–565, 2019.
- [DHL22] Antoine Ducros, Ehud Hrushovski, and François Loeser. Non-archimedean integrals as limits of complex integrals. *Duke Math. J.*, 2022. À paraître.
- [DKY20] Laura DeMarco, Holly Krieger, and Hexi Ye. Uniform Manin-Mumford for a family of genus 2 curves. *Ann. Math. (2)*, 191(3) :949–1001, 2020.

- [Duc14] Antoine Ducros. La structure des courbes analytiques, 2014. <https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html>.
- [Fan18] Lorenzo Fantini. Normalized Berkovich spaces and surface singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(11) :7815–7859, 2018.
- [Fav20] Charles Favre. Degeneration of endomorphisms of the complex projective space in the hybrid space. *J. Inst. Math. Jussieu*, 19(4) :1141–1183, 2020.
- [FJ04] Charles Favre and Mattias Jonsson. *The valuative tree*, volume 1853 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [FLM83] Alexandre Freire, Artur Lopes, and Ricardo Mañé. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 14(1) :45–62, 1983.
- [FR06] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective. *Math. Ann.*, 335(2) :311–361, 2006.
- [FR10] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Théorie ergodique des fractions rationnelles sur un corps ultramétrique. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(1) :116–154, 2010.
- [FRL04] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Brolin’s equidistribution theorem in p -adic dynamics. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 339(4) :271–276, 2004.
- [Jon16] Mattias Jonsson. Degenerations of amoebae and Berkovich spaces. *Math. Ann.*, 364(1-2) :293–311, 2016.
- [Lan93] Serge Lang. *Real and functional analysis.*, volume 142 of *Grad. Texts Math.* New York : Springer-Verlag, 3. ed. edition, 1993.
- [LP20] Thibaud Lemanisser and Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} : catégorie, topologie, cohomologie. arXiv, 2020. <https://arxiv.org/abs/2010.08858>.
- [Lyu83] M. Yu. Lyubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 3 :351–385, 1983.
- [Mañ88] Ricardo Mañé. The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps. Dynamical systems, Proc. Symp., Valparaiso/Chile 1986, Lect. Notes Math. 1331, 86-117 (1988)., 1988.
- [Poi10] Jérôme Poineau. La droite de Berkovich sur \mathbf{Z} . *Astérisque*, 334 :xii+284, 2010.
- [Poi13] Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur \mathbf{Z} : étude locale. *Invent. Math.*, 194(3) :535–590, 2013.
- [Poi22] Jérôme Poineau. Dynamique analytique sur \mathbf{Z} . II : Écart uniforme entre Lattès et conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel. arXiv, 2022. <https://arxiv.org/abs/2207.01574>.
- [Poi23] Jérôme Poineau. Non-archimedean compactifications of complex analytic varieties, 2023. En préparation.
- [PT21a] Jérôme Poineau and Daniele Turchetti. Berkovich curves and Schottky uniformization. I : The Berkovich affine line. In *Arithmetic and geometry over local fields. VIASM 2018. Based on lectures given during the program “Arithmetic and geometry of local and global fields”, summer 2018, Hanoi, Vietnam*, pages 179–223. Cham : Springer, 2021.
- [PT21b] Jérôme Poineau and Daniele Turchetti. Berkovich curves and Schottky uniformization. II : Analytic uniformization of Mumford curves. In *Arithmetic and geometry over local fields. VIASM 2018. Based on lectures given during the program “Arithmetic and geometry of local and global fields”, summer 2018, Hanoi, Vietnam*, pages 225–279. Cham : Springer, 2021.
- [Ran95] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Rey89] Eric Reyssat. *Quelques aspects des surfaces de Riemann.*, volume 77. Boston, MA etc. : Birkhäuser, 1989.

- [Thu05] Amaury Thuillier. *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2005. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010990/fr/>.
- [Thu07] Amaury Thuillier. Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels. *Manuscripta Math.*, 123(4) :381–451, 2007.
- [Zha95] Shouwu Zhang. Small points and adelic metrics. *J. Algebr. Geom.*, 4(2) :281–300, 1995.

20 février 2024

JÉRÔME POINEAU, Normandie Univ., UNICAEN, CNRS, Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, 14000 Caen, France • *E-mail* : jerome.poineau@unicaen.fr
Url : <https://poineau.users.lmno.cnrs.fr/>