

# Une introduction à la droite de Berkovich sur $\mathbf{Z}$

Jérôme Poineau

IRMAR

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu

35042 Rennes Cedex, France

*courriel* : jerome.poineau@univ-rennes1.fr

Ce texte vise à présenter en quelques lignes la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$  au sens de V. G. Berkovich. Les définitions de l'espace lui-même et du faisceau structural se trouvent dans [1], §1.5., mais, à notre connaissance, son étude systématique n'a pas été entreprise auparavant. Dans la dernière partie de ce texte, nous donnons deux exemples d'applications aux séries arithmétiques convergentes au sens de D. Harbater (*cf.* [3]).

Signalons que, dans un souci de clarté, nous avons choisi de restreindre notre exposé au cas de la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$ , mais que les constructions et résultats restent valables pour tout anneau d'entiers de corps de nombres.

## 1 L'espace affine analytique sur $\mathbf{Z}$

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Le schéma  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^n$  est défini, ensemblistement, comme l'ensemble des idéaux premiers de  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ .

Rappelons que l'ensemble  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^n$  est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes

$$\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k,$$

où  $k$  est un corps. Deux morphismes vers des corps  $k_1$  et  $k_2$  sont dits équivalents s'ils s'inscrivent dans un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} & & k_1 \\ & \nearrow & \nearrow \\ \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] & \longrightarrow & k_0 \\ & \searrow & \searrow \\ & & k_2 \end{array}$$

En outre, si  $x$  désigne un point de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^n$ , il existe un corps  $k(x)$ , appelé corps résiduel, et un morphisme  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k(x)$  par lequel tous les morphismes représentant  $x$

se factorisent.

Si nous désirons faire de la géométrie analytique, nous aurons besoin de disposer de notions de normes et de convergence. Pour définir l'espace analytique  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$ , nous allons donc modifier la définition précédente en imposant aux corps  $k$  d'être munis de valeurs absolues pour lesquelles ils sont complets. En ce qui concerne la relation d'équivalence, nous imposons de plus aux morphismes  $k_0 \rightarrow k_1$  et  $k_0 \rightarrow k_2$  d'être des isométries. Cette définition correspond à la définition 1.5.1 de [1].

Comme précédemment, si  $x$  désigne un point de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$ , il existe un corps valué complet  $\mathcal{H}(x)$ , que nous appellerons corps résiduel complété, et un morphisme

$$\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$$

par lequel tous les morphismes représentant  $x$  se factorisent.

Cette fois-ci, l'ensemble des classes d'équivalence que l'on obtient est en bijection avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications  $|\cdot| : \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{R}_+$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $|0| = 0$  et  $|1| = 1$  ;
- ii)  $\forall f, g \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n], |f + g| \leq |f| + |g|$  ;
- iii)  $\forall f, g \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n], |fg| = |f||g|$ .

Décrivons explicitement cette bijection. À un morphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  vers un corps valué complet  $(k, |\cdot|)$ , on associe la semi-norme multiplicative

$$\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\varphi} k \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{R}_+.$$

Réciproquement, soit  $|\cdot|_x$  une semi-norme multiplicative sur  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ . L'ensemble  $\mathfrak{p}_x$  des éléments sur lesquels elle s'annule est un idéal premier de  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ . Le quotient est un anneau intègre sur lequel la semi-norme  $|\cdot|_x$  induit une valeur absolue. Le corps  $\mathcal{H}(x)$  est le complété du corps des fractions de cet anneau pour cette valeur absolue. La construction nous fournit un morphisme

$$\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x).$$

Nous munissons, en outre, l'espace analytique  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$  de la topologie la plus grossière qui rende continues les applications d'évaluation, c'est-à-dire les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}} & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ |\cdot|_x & \mapsto & |P|_x \end{array},$$

avec  $P \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ .

Nous pouvons également munir l'espace analytique  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$  d'un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}$  (cf. [1], définition 1.5.3). Une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$  est une application

$$U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x)$$

qui est localement limite uniforme de fractions rationnelles sans pôles.

## 2 La droite analytique sur $\mathbf{Z}$

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$ . Avant cela, il est utile de comprendre l'espace  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{0,\text{an}}$ , que nous noterons  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ . Le théorème d'Ostrowski nous permet d'en obtenir une description explicite : ses points sont

- i)* la valeur absolue triviale  $|\cdot|_0$  ;
- ii)* les valeurs absolues archimédiennes  $|\cdot|_{\infty,\varepsilon} = |\cdot|_{\infty}^{\varepsilon}$ , avec  $\varepsilon \in ]0, 1]$  ;
- iii)* pour tout nombre premier  $p$ , les valeurs absolues  $p$ -adiques  $|\cdot|_{p,\varepsilon} = p^{-\varepsilon v_p(\cdot)}$ , avec  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  ;
- iv)* pour tout nombre premier  $p$ , la semi-norme  $|\cdot|_{p,\infty} = |\cdot|_p^{+\infty}$  induite par la valeur absolue triviale sur  $\mathbf{F}_p$ .

Topologiquement, nous disposons également d'une description explicite. Chacune des branches  $p$ -adiques est homéomorphe à  $[0, +\infty[$  et la branche archimédienne est homéomorphe à  $[0, 1]$ . Il nous reste à décrire les voisinages du point  $|\cdot|_0$  : ce sont les parties de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  qui contiennent entièrement toutes les branches, à l'exception d'un nombre fini, et qui contiennent un voisinage de  $|\cdot|_0$  dans chacune des branches restantes. On en déduit, en particulier, que l'espace  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  est compact.

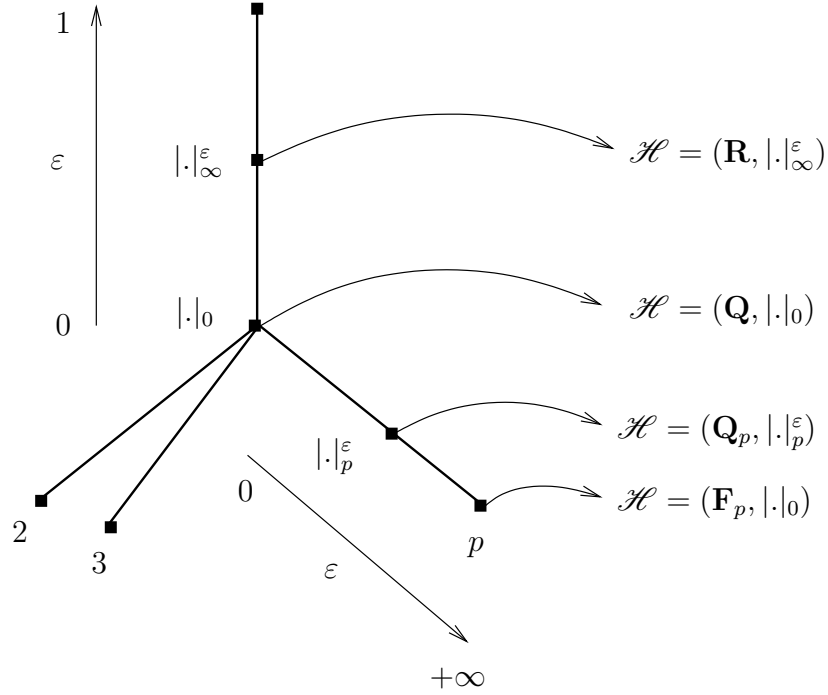
Nous pouvons également décrire explicitement les sections du faisceau structural sur les ouverts de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ . Nous renvoyons pour cela à la figure 2.

Maintenant que nous avons décrit l'espace topologique formant la base, nous pouvons nous intéresser à l'espace  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  lui-même. Remarquons que nous disposons d'un morphisme de projection

$$\pi : \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{Z}).$$

En effet, toute semi-norme multiplicative sur  $\mathbf{Z}[T]$  en induit une sur  $\mathbf{Z}$ .

Cela nous permet d'obtenir une première description topologique de la droite analytique sur  $\mathbf{Z}$  : la fibre de  $\pi$  au-dessus du point  $x \in \mathcal{M}(\mathbf{Z})$  est isomorphe à la droite de Berkovich sur le corps  $\mathcal{H}(x)$ . Si  $\mathcal{H}(x) = \mathbf{R}$ , cette droite est isomorphe au quotient de l'espace  $\mathbf{C}$  par la conjugaison complexe. Nous ne chercherons pas à obtenir de description topologique plus précise et en donnerons seulement quelques propriétés.

FIG. 1 – L'espace  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ .

**Théorème 2.1.** *La droite analytique  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  est un espace topologique séparé, localement compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs, de dimension topologique 3.*

*Le morphisme de projection  $\pi : \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{Z})$  est ouvert.*

Nous allons, à présent, décrire quelques anneaux de sections globales sur des ouverts de la droite analytique  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ . Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  et  $r \in \mathbf{R}_+^*$ . Nous noterons  $\|\cdot\|_{\Omega}$  la norme uniforme sur  $\Omega$ . Définissons un ouvert  $\Omega(r)$  de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  par

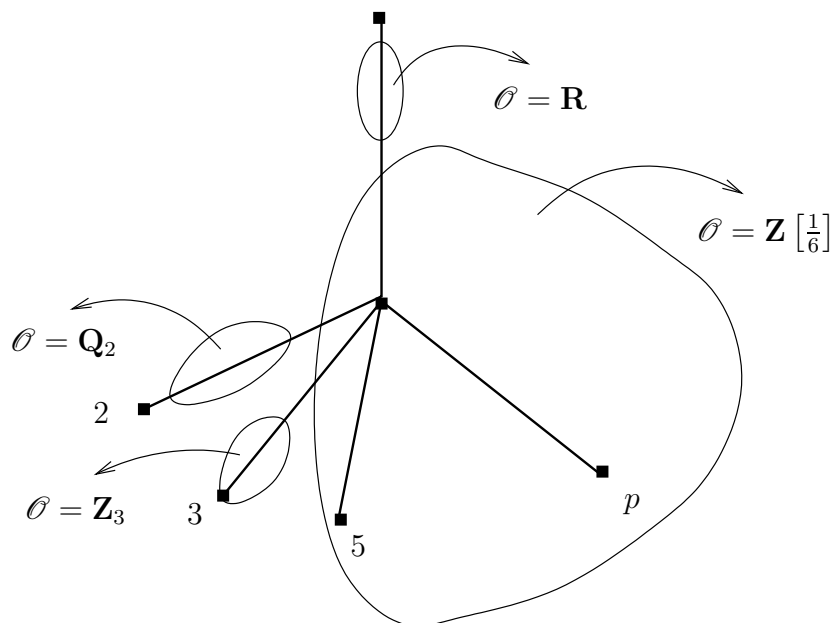
$$\Omega(r) = \pi^{-1}(\Omega) \cap \{x \in \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}} \mid |T(x)| < r\}.$$

Les sections du faisceau structural sur l'ouvert  $\Omega(r)$  s'expriment simplement en fonction de celles sur  $\Omega$  : ce sont les séries

$$\sum_{i \geq 0} a_i T^i \in \mathcal{O}(\Omega)[[T]]$$

telles que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{i \geq 0} \|a_i\|_{\Omega} T^i$$

FIG. 2 – Le faisceau structural sur  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ .

soit supérieur ou égal à  $r$ .

Introduisons des notations. Soit  $f \in \mathbf{Q}[[T]]$ . Nous noterons  $R_\infty(f)$  le rayon de convergence de la série  $f$  vue comme série de  $\mathbf{C}[[T]]$ , où  $\mathbf{C}$  est muni de la valeur absolue usuelle  $|\cdot|_\infty$ . Pour tout nombre premier  $p$ , nous noterons  $R_p(f)$  le rayon de convergence de la série  $f$  vue comme série de  $\mathbf{C}_p[[T]]$ , où  $\mathbf{C}_p$  est muni de la valeur absolue  $p$ -adique normalisée  $|\cdot|_p$ .

Soient  $t \in \mathbf{N}$ ,  $p_1, \dots, p_t$  des nombres premiers et  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t > 0$ . Supposons que  $\Omega$  soit l'ouvert de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  qui contienne le segment  $[|\cdot|_0, |\cdot|_{p_1, \varepsilon_1}[$  de la branche  $p_1$ -adique,  $\dots$ , le segment  $[|\cdot|_0, |\cdot|_{p_t, \varepsilon_t}[$  de la branche  $p_t$ -adique et l'intégralité de toutes les autres branches. Alors les éléments de  $\mathcal{O}(\Omega(r))$  sont exactement les séries

$$f \in \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{p_1 \cdots p_t} \right] [[T]]$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$R_\infty(f) \geq r \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, t \rrbracket, R_{p_i}(f) \geq r^{1/\varepsilon_i}.$$

Ces séries doivent donc vérifier à la fois des conditions de convergence archimédienne et  $p$ -adiques.

### 3 Applications

L'espace  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  vérifie de nombreuses propriétés analogues à celles des espaces analytiques complexes et qui nous permettront d'appliquer des méthodes géométriques.

**Théorème 3.1.** *En tout point  $x$  de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}},x}$  est hensélien, noethérien et régulier.*

*Le faisceau structural  $\mathcal{O}$  est cohérent.*

Décrivons l'anneau local  $A$  au point 0 de la fibre au-dessus de la valeur absolue triviale  $|\cdot|_0$ . C'est l'ensemble des éléments  $f$  de  $\mathbf{Q}[[T]]$  qui vérifient les propriétés suivantes :

- i) il existe  $N \in \mathbf{N}^*$  tel que  $f \in \mathbf{Z}[1/N][[T]]$  ;
- ii) nous avons  $R_\infty(f) > 0$  ;
- iii) pour tout nombre premier  $p$ , nous avons  $R_p(f) > 0$ .

Un bref raisonnement montre que le caractère hensélien de cet anneau local entraîne le théorème classique d'Eisenstein : tout élément de  $\mathbf{Q}[[T]]$  entier sur  $\mathbf{Q}[T]$  appartient à  $A$ .

Nous pouvons également définir une notion d'espace de Stein pour les parties de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ . Soit  $P$  une partie de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ . Notons  $j : P \hookrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  le morphisme d'inclusion. Nous faisons de  $P$  un espace localement annelé en le munissant du faisceau  $j^{-1}\mathcal{O}$ . Si  $P$  est une partie ouverte de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ , nous considérons simplement la restriction du faisceau structural. Si  $P$  est une partie fermée de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ , nous considérons le faisceau des fonctions surconvergentes.

**Définition 3.2.** Nous dirons qu'une partie  $P$  de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  est **de Stein** si elle vérifie le théorème A (*pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $P$  et tout point  $x$  de  $P$ , la fibre  $\mathcal{F}_x$  est engendrée, en tant que  $\mathcal{O}_x$ -module, par l'image de l'ensemble des sections globales  $\mathcal{F}(P)$ ) et le théorème B (*pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $P$  et tout entier  $q \geq 1$ , on a  $H^q(P, \mathcal{F}) = 0$ ).**

**Définition 3.3.** Nous dirons qu'une partie de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  est **semi-analytique** si elle est localement définie par une combinaison booléenne d'inégalités entre normes de fonctions.

**Théorème 3.4.** *Les disques ou couronnes, ouverts ou fermés, au-dessus des parties semi-analytiques de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$  sont des espaces de Stein.*

Comme en géométrie analytique complexe, nous en déduisons quelques applications. Nous noterons  $D$  le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ .

**Théorème 3.5.** *Soient  $E$  et  $F$  deux parties disjointes, fermées et discrètes de  $D$  ne contenant pas le point 0. Soient  $(n_a)_{a \in E}$  une famille d'entiers positifs et  $(P_b)_{b \in F}$  une famille de polynômes sans terme constant. Nous supposons que*

i) quel que soit  $a \in E$ ,  $\bar{a} \in E$  et  $n_{\bar{a}} = n_a$  ;

ii) quel que soit  $b \in F$ ,  $\bar{b} \in F$  et  $P_{\bar{b}} = \overline{P_b}$ .

Alors il existe  $g, h \in \mathbf{Z}[[T]] \cap \mathcal{O}(D)$  vérifiant les propriétés suivantes :

a) la fonction  $f = g/h$  est méromorphe sur  $D$  et holomorphe sur  $D \setminus F$  ;

b) quel que soit  $a \in E$ , la fonction  $f$  s'annule en  $a$  à un ordre supérieur à  $n_a$  ;

c) quel que soit  $b \in E$ , on a  $f(z) - P_b\left(\frac{1}{z-b}\right) \in \mathcal{O}_b$  ;

d) on a  $f \in \mathbf{Z}[[T]] \cap \mathcal{O}_0$ .

Ce résultat se démontre par des méthodes cohomologiques. Lorsque la partie  $E$  est vide, nous utilisons la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \rightarrow 0$  et le fait que le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  est une partie de Stein. Lorsqu'elle ne l'est pas, nous utilisons le même argument en remplaçant le faisceau  $\mathcal{O}$  par un diviseur de Cartier adéquat.

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de nombres premiers. Notons  $N \in \mathbf{N}^*$  leur produit. Il est possible d'imposer également, pour tout nombre premier  $p \in \mathcal{P}$ , les parties principales de la série  $f$  comme fonction méromorphe sur le disque de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbf{C}_p$ . Il nous faudra alors autoriser les coefficients de  $g$ , de  $h$  et du développement en 0 de  $f$  à appartenir à  $\mathbf{Z}[1/N]$ .

Nous pouvons également adapter à notre cadre le théorème de J. Frisch (cf. [2]) concernant la noéthérianité de fonctions surconvergentes. Ce théorème a été démontré à l'origine pour des parties semi-analytiques d'un espace analytique réel ou complexe. Nous remplaçons cette notion par celle, assez proche, de partie morcelable.

**Théorème 3.6.** *Soit  $L$  une partie de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$  compacte, morcelable et de Stein. Alors l'anneau  $\mathcal{O}(L)$  des fonctions analytiques au voisinage de  $L$  est noéthérien.*

En appliquant ce théorème pour des disques compacts au-dessus de voisinages compacts et connexes du point central de  $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ , nous montrons que, quels que soient  $t \in \mathbf{N}$ ,  $p_1, \dots, p_t$  des nombres premiers,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t > 0$  et  $r > 0$ , l'anneau formé des séries

$$f \in \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{p_1 \cdots p_t} \right] [[T]]$$

vérifiant les conditions

$$R_{\infty}(f) > r \text{ et } \forall i \in [1, t], R_{p_i}(f) > r^{1/\varepsilon_i}$$

est un anneau noéthérien.

Lorsque  $t = 0$ , on retrouve un résultat de D. Harbater (cf. [3], théorème 1.8).

## Références

- [1] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [2] Jacques Frisch. Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. *Invent. Math.*, 4 :118–138, 1967.
- [3] David Harbater. Convergent arithmetic power series. *Amer. J. Math.*, 106(4) :801–846, 1984.