Jérôme Poineau

LA DROITE DE BERKOVICH SUR Z

Jérôme Poineau
Institut de recherche mathématique avancée,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France.
E-mail : `jerome.poineau@math.unistra.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G22, 14G25, 30B10, 13E05, 12F12.

Mots clefs. — espaces de Berkovich, géométrie analytique globale, séries arithmétiques convergentes, noethérianité, problème inverse de Galois
Berkovich spaces, global analytic geometry, convergent arithmetic power series, Noetherianity, inverse Galois problem.

L'auteur est membre du projet jeunes chercheurs « Espaces de Berkovich » de l'agence nationale de la recherche.
25 mars 2010

LA DROITE DE BERKOVICH SUR Z

Jérôme Poineau

Résumé. — Ce texte est consacré à l'étude de la droite de Berkovich au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Cet objet géométrique contient naturellement des copies de la droite analytique complexe (ou de son quotient par la conjugaison), associées aux places infinies, et des droites de Berkovich classiques au-dessus de corps ultramétriques complets, associées au places finies. Nous montrons qu'il jouit de bonnes propriétés, topologiques aussi bien qu'algébriques. Nous exhibons également quelques espaces de Stein naturels contenus dans cette droite.

Nous proposons des applications de cette théorie à l'étude des séries arithmétiques convergentes : prescription de zéros et de pôles, noethérianité d'anneaux globaux et problème inverse de Galois. Des exemples typiques de telles séries sont fournis par les fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert complexe dont le développement en 0 est à coefficients entiers.

Abstract

The Berkovich Line over Z. This text is devoted to the study of the Berkovich line over the ring of integers of a number field. It is a geometric object which naturally contains complex analytic lines (or their quotient by conjugation), associated to the infinite places, and classical Berkovich lines over complete valued fields, associated to the finite places. We prove that it satisfies nice properties, both from the topological and algebraic points of view. We also provide a few examples of Stein spaces that are contained in this line.

We explain how this theory may applied to adress various questions about convergent arithmetic power series : prescribing zeroes and poles, proving that global rings are Noetherian or constructing Galois groups over them. Typical examples of such series are given by holomorphic functions on the complex open unit disc whose Taylor developments in 0 have integer coefficients.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction i

1. Espaces analytiques sur un anneau de Banach 1

1.1. Définitions 3
1.1.1. Spectre analytique d'un anneau de Banach 3
1.1.2. Espace affine analytique 7
1.1.2.1. Espace affine analytique sur un corps archimédien 11
1.1.2.2. Droite sur un corps trivialement valué 11
1.1.2.3. Droite sur un corps ultramétrique quelconque 15
1.1.3. Faisceau structural 19

1.2. Parties compactes spectralement convexes 25

1.3. Flot 35

2. Algèbres de séries convergentes 43

2.1. Algèbres globales de disques et de couronnes 45

2.2. Limites d'algèbres de disques 51
2.2.1. Théorèmes de Weierstraß 52
2.2.2. Propriétés 58

2.3. Limites d'algèbres de couronnes 65

2.4. Exemples d'anneaux locaux 71

2.5. Hensélianité 77
2.5.1. Démonstration 77
2.5.2. Isomorphismes locaux 79

3. Espace affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres 85

3.1. Spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres 87
3.1.1. Description ensembliste et topologique 87
3.1.2. Faisceau structural 96
3.1.2.1. Parties compactes 96
3.1.2.2. Parties ouvertes 98
3.1.2.3. Bord de Shilov 102

3.2. Faisceau structural sur l'espace affine 105
3.2.1. Anneaux locaux 105
3.2.2. Anneaux de sections globales 113

3.3. Points rigides des fibres 125
3.3.1. Isomorphismes locaux 125
3.3.2. Voisinages sur la droite 131
3.3.3. Étude topologique locale 137
3.3.4. Étude algébrique locale 140

3.4. Fibres internes 143

3.5. Dimension topologique 151

3.6. Prolongement analytique 153

4. Droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres 157

4.1. Récapitulatif 159

4.2. Points de type 3 167
4.2.1. Fibres extrêmes 167
4.2.2. Fibre centrale 170

4.3. Points de type 2 173
4.3.1. Fibres extrêmes 173
4.3.2. Fibre centrale 182

4.4. Résumé 191

4.5. Cohérence 195

5. Morphismes finis 199

5.1. Morphismes topologiques finis 201

5.2. Théorème de division de Weierstraß global 203

5.3. Un exemple 211

5.4. Théorème de division de Weierstraß en un point rigide 221

5.5. Endomorphismes de la droite 227

5.6. Au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres 233

6. Espaces de Stein 239

6.1. Définitions 241

6.2. Cadre général pour les compacts 247
6.2.1. Lemmes de Cousin et de Cartan 247
6.2.2. Prolongement de sections d'un faisceau 253

6.3. Parties compactes de la base 259

6.4. Parties compactes des fibres 267

6.5. Couronnes compactes de la droite 277

6.6. Lemniscates de la droite 283
6.6.1. Exhaustions de Stein 283
6.6.2. Fermeture des modules 284
6.6.3. Conclusion 296

7. Applications 305

7.1. Problèmes de Cousin arithmétiques 307
7.1.1. Problème de Cousin multiplicatif 307
7.1.2. Problème de Cousin additif 310
7.1.3. Théorème de Poincaré 314

7.2. Noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques 317
7.2.1. Sous-variétés analytiques 317
7.2.2. Théorème de Frisch 319
7.2.3. Séries arithmétiques 322

7.3. Problème de Galois inverse 327
7.3.1. Construction locale de revêtements cycliques 328
7.3.2. Recollement 332

Bibliographie 341

Glossaire des notations 345

Index 351

INTRODUCTION

À la fin des années quatre-vingt, Vladimir G. Berkovich a proposé une nouvelle approche de la géométrie analytique p-adique. Ses idées, développées dans l'ouvrage [**2**] et approfondies dans l'article [**3**] se sont révélées très fructueuses ; elles ont permis de démontrer plusieurs conjectures de géométrie arithmétique et trouvent maintenant des applications dans des domaines variés : systèmes dynamiques, théorie d'Arakelov, dessins d'enfants p-adiques, variation de structure de Hodge, *etc.* Pour une introduction au sujet et une présentation des différentes applications, nous renvoyons le lecteur intéressé aux textes de vulgarisation [**9**] et [**10**].

Bien que la théorie n'ait été véritablement développée que sur les corps ultramétriques complets, V. Berkovich propose, dans [**2**], une définition d'espace analytique au-dessus de n'importe quel anneau de Banach. Elle s'applique donc lorsque l'on considère comme anneau de base l'anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers, muni de la valeur absolue usuelle $|.|_\infty$. Nous nous proposons ici d'entreprendre l'étude des espaces analytiques dans ce cas particulier.

Différentes valeurs absolues joueront un rôle dans notre étude. Si p désigne un nombre premier, nous définissons la valeur absolue p-adique $|.|_p$ sur $\mathbf{Z}$ de la façon suivante : nous posons $|0|_p = 0$ et, pour tout nombre entier $n = p^r\, m \in \mathbf{Z}^*$, où m est premier à p,

$$|n|_p = |p^r\, m|_p = p^{-r}.$$

Elle se prolonge de façon unique à $\mathbf{Q}$. Notons $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour cette valeur absolue et choisissons-en une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$. La valeur absolue $|.|_p$ se prolonge encore de façon unique en une valeur absolue sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Nous noterons $\mathbf{C}_p$

son complété. Ce corps, qui est algébriquement clos et complet, est parfois appelé corps des nombres complexes p-adiques. Nous noterons $|.|_p$ l'unique valeur absolue sur $\mathbf{C}_p$ qui prolonge la valeur absolue p-adique sur $\mathbf{Q}$.

Pour $f \in \mathbf{Q}[\![T]\!]$, notons $R_\infty(f)$ le rayon de convergence de la série f vue comme série de $\mathbf{C}[\![T]\!]$ et, pour tout nombre premier p, notons $R_p(f)$ le rayon de convergence de la série f vue comme série de $\mathbf{C}_p[\![T]\!]$. Appelons série arithmétique toute série de la forme

$$f \in \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p_1 \cdots p_t}\right][\![T]\!]$$

vérifiant des conditions du type

$$R_\infty(f) > r_\infty \text{ et } \forall i \in [\![1,t]\!],\ R_{p_i}(f) > r_i,$$

où t est un nombre entier, $p_1, \ldots, p_t$ des nombres premiers et $r_1, \ldots, r_t, r_\infty$ des nombres réels positifs. De telles fonctions apparaissent naturellement lorsque l'on étudie les anneaux locaux de la droite analytique sur $\mathbf{Z}$ ou certains anneaux de sections globales. L'étude géométrique que nous allons mener nous permettra d'obtenir des informations sur certains anneaux de séries de ce type.

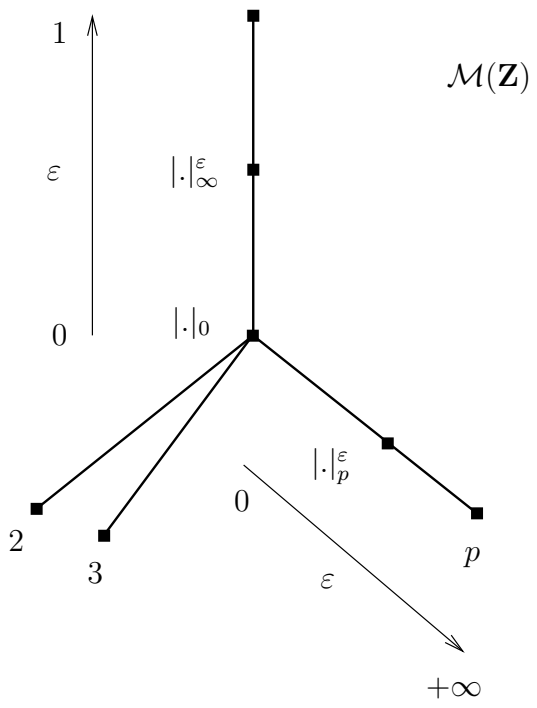

FIGURE 1. L'espace topologique $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Description des espaces en jeu

Par définition, l'espace $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire des applications de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}_+$ qui sont sous-additives, multiplicatives, envoient 0 sur 0 et 1 sur 1. Topologiquement, il est constitué d'une branche, homéomorphe à un segment, pour chaque nombre premier p et d'une branche supplémentaire, associée à la valeur absolue archimédienne usuelle. Ces branches se rejoignent en un point, que nous appellons central, associé à la valeur absolue triviale $|.|_0$ (*cf.* figure 1). Signalons que la topologie au voisinage du point central est strictement plus grossière que la topologie d'arbre.

Soit $n \in \mathbf{N}$. L'espace affine analytique de dimension n au-dessus de $\mathbf{Z}$, que nous noterons $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathbf{Z}}$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$. Il est muni d'une projection continue vers la base $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Au-dessus des points de la branche archimédienne, les fibres de cette projection sont isomorphes à l'espace $\mathbf{C}^n$ quotienté par l'action de la conjugaison complexe et, au-dessus des points de la branche p-adique, ce sont des espaces de Berkovich p-adiques de dimension n. Il apparaît donc clairement que, pour étudier cet espace, il nous faudra mettre en œuvre des techniques pouvant s'appliquer tant dans un cadre archimédien qu'ultramétrique.

Géométrie analytique complexe

Dans le cas archimédien, la géométrie analytique complexe met à notre disposition de nombreux outils. Les fondations de cette théorie reposent sur une étude locale des variétés et des fonctions. La compréhension des anneaux locaux des espaces affines y joue donc un rôle prépondérant. Fixons $n \in \mathbf{N}$. L'anneau local $\mathscr{O}_0$ de l'espace affine $\mathbf{C}^n$ en 0 est constitué des séries de la forme

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} a_{k_1,\ldots,k_n}\, T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n}$$

dont le rayon de convergence est strictement positif. Le théorème de division de Weierstraß nous permet, sous certaines conditions, de diviser une série de la forme précédente par une autre et d'obtenir un reste polynomial en la dernière variable. Une fois ce résultat connu, on démontre sans peine que l'anneau $\mathscr{O}_0$ est un anneau local noethérien, régulier et de dimension n. Signalons que la démonstration classique du théorème de division de Weierstraß repose sur le théorème de Rouché et la formule de Cauchy.

Géométrie analytique p-adique

Bien que le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbf{C}_p$ présente des analogies avec le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, il en diffère par la topologie. Indiquons, par exemple, que le corps $\mathbf{C}_p$ est totalement discontinu (*i.e.* ses composantes connexes sont réduites à des points) et n'est pas localement compact. Dans cette situation, il n'est guère aisé de mettre en place une géométrie analytique jouissant de propriétés raisonnables : il existe bien trop de fonctions localement analytiques. On vérifie, par exemple, que la fonction qui vaut 0 sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbf{C}_p$ et 1 sur son complémentaire est localement développable en série entière !

Au début des années soixante, John Tate a apporté une solution à ce problème (*cf.* [**31**]). Les espaces qu'il construit, appelés espaces analytiques rigides, ne sont pas des espaces topologiques, mais des sites : on distingue certains ouverts et on n'autorise que certains recouvrements. Par exemple, le recouvrement de $\mathbf{C}_p$ que nous avons décrit précédemment est interdit. Ce formalisme permet de mettre en place, dans le cas p-adique, une géométrie analytique fort semblable à celle que nous connaissons dans le cas complexe.

Entrons un peu dans les détails. Les objets de base à partir desquels est construite la géométrie analytique rigide sont les algèbres que l'on appelle, aujourd'hui, algèbres de Tate. Contrairement à ceux de la théorie complexe, ce ne sont pas des anneaux locaux, mais globaux. Soit $n \in \mathbf{N}$. L'algèbre de Tate $\mathbf{C}_p\{T_1, \ldots, T_n\}$ est constituée des éléments de la forme

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} a_{k_1,\ldots,k_n} T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n} \in \mathbf{C}_p[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$$

vérifiant la condition

$$\lim_{(k_1,\ldots,k_n)\to+\infty} |a_{k_1,\ldots,k_n}|_p = 0.$$

Cet anneau est précisément l'anneau des séries convergentes sur le disque fermé de centre 0 et de polyrayon $(1, \ldots, 1)$ de $\mathbf{C}_p^n$. C'est le caractère ultramétrique de la valeur absolue p-adique qui nous permet de donner un sens à cette notion de convergence sur un disque fermé.

Dans cette théorie, il existe également un théorème de division de Weierstraß qui rend les mêmes services que dans le cadre complexe. En l'utilisant, on démontre aisément que l'algèbre de Tate $\mathbf{C}_p\{T_1, \ldots, T_n\}$ est un anneau noethérien et régulier de dimension n. Signalons que, cette fois-ci, la démonstration du théorème de division de Weierstraß repose sur des arguments de réduction modulo p.

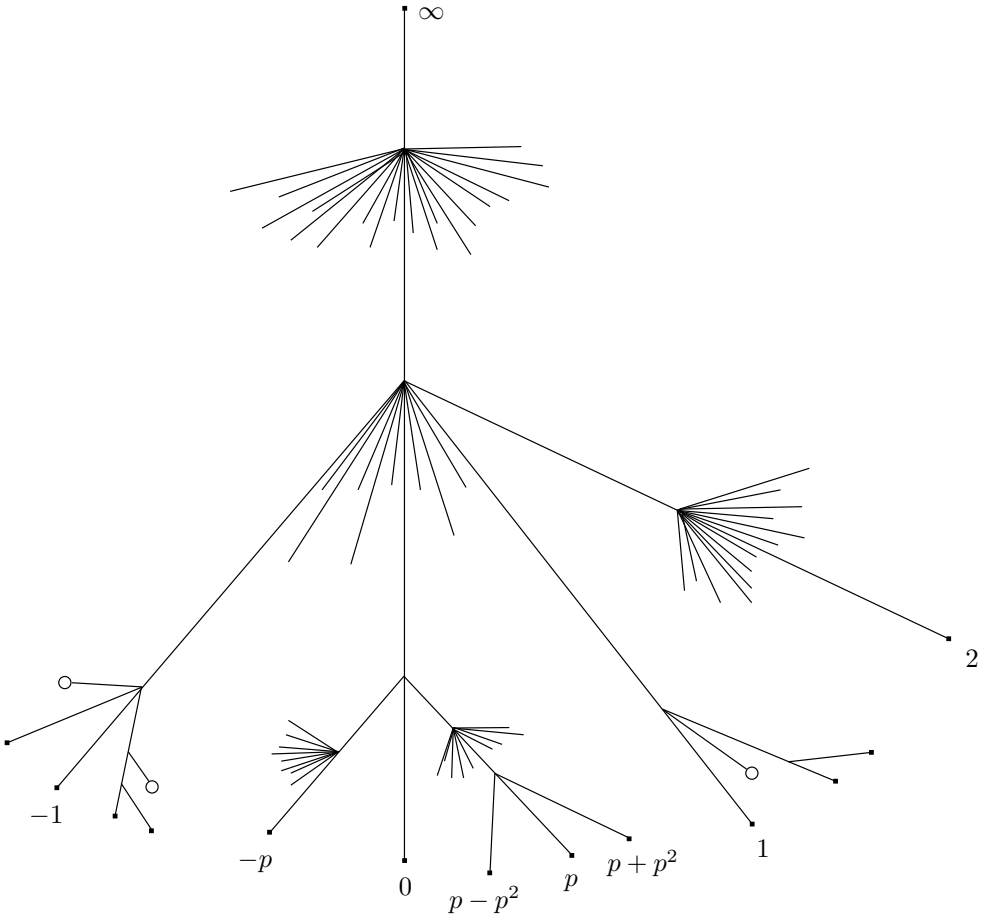

FIGURE 2. La droite projective $\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}$.

L'approche de Vladimir G. Berkovich

Les descriptions précédentes laissent entrevoir les difficultés qui se présentent lorsque l'on cherche à réunir les espaces analytiques archimédiens et ultramétriques dans un formalisme commun. L'approche des espaces analytiques p-adiques que propose V. Berkovich va permettre d'apporter une solution à ce problème.

Choisissant un point de vue différent de celui de J. Tate, V. Berkovich ajoute de très nombreux points aux espaces. À titre d'exemple, la droite affine analytique $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}$ sur $\mathbf{C}_p$ qu'il définit possède une structure d'arbre et les points de $\mathbf{C}_p$ sont confinés aux extrémités de certaines branches. Nous avons esquissé une représentation de la droite projective analytique $\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}$ à la figure 2. En lui enlevant le point noté ∞, on obtient la droite affine $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}_p}$.

Le procédé de construction qu'utilise V. Berkovich rend la description explicite de ses espaces délicate, mais ils présentent d'autres avantages. Ce sont de véritables espaces topologiques, localement compacts et localement connexes par arcs. Ces propriétés ouvrent la voie à une définition locale du faisceau structural. Dans le cas de l'espace affine, V. Berkovich propose de le définir comme le faisceau des fonctions qui sont localement limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles. Indiquons que l'on retrouve bien ainsi le faisceau construit à partir des algèbres de Tate. C'est d'ailleurs véritablement sur la théorie des espaces analytiques rigides que V. Berkovich bâtit la sienne et il n'utilise guère la définition locale du faisceau.

Les définitions proposées par V. Berkovich valent également dans le cas des corps archimédiens. Signalons que l'espace de Berkovich affine de dimension n sur $\mathbf{C}$ coïncide avec $\mathbf{C}^n$ et que le faisceau dont il est muni est bien celui des fonctions analytiques.

Nous venons d'expliquer que les espaces analytiques de Berkovich permettent d'envisager une étude locale des espaces analytiques sur $\mathbf{Z}$. Le présent travail constitue un premier pas dans cette direction. Soulignons que, bien que les idées et définitions introduites par V. Berkovich invitent à adopter ce point de vue, une telle étude n'a, à notre connaissance, jamais encore été entreprise. Indiquons, à présent, le plan que nous allons adopter.

Chapitre 1 : Espaces analytiques sur un anneau de Banach

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque. Nous y rappelons la définition d'espace analytique au sens de V. Berkovich ainsi que la construction du faisceau structural qu'il propose. Nous donnons quelques exemples et décrivons explicitement la droite analytique au-dessus de tout corps valué complet.

Chapitre 2 : Algèbres de séries convergentes

Nous consacrons le deuxième chapitre à l'étude d'anneaux de séries convergentes à coefficients dans un anneau de Banach. En prenant des limites inductives de tels anneaux, nous obtenons un anneau local sur lequel nous parvenons à démontrer un théorème de division de Weierstraß. Bien entendu, notre preuve ne peut faire appel ni à la formule de Cauchy, ni à la réduction modulo p, faute d'analogue de la première dans le cas ultramétrique et de la seconde dans le cas archimédien. Nous utilisons donc une méthode, inspirée des travaux de H. Grauert et R. Remmert, faisant simplement appel à des techniques d'algèbres de Banach. À l'aide de ce théorème, nous obtenons des résultats de noethérianité et de régularité pour les anneaux locaux considérés.

Afin de pouvoir utiliser ces résultats, nous entreprenons ensuite une étude topologique locale aboutissant à la démonstration du fait que les anneaux locaux en certains points des espaces de Berkovich sont isomorphes à de tels anneaux de séries convergentes.

Nous terminons ce chapitre par la démonstration que les anneaux locaux des espaces de Berkovich sont henséliens. Ce résultat généralise le résultat classique valable pour les espaces au-dessus d'un corps valué et complet, archimédien ou non.

Chapitre 3 : Espace affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Dans le troisième chapitre, nous considérons un anneau d'entiers de corps de nombres A et restreignons notre propos aux espaces analytiques dont la base

est le spectre analytique $\mathcal{M}(A)$ de cet anneau. Nous commençons par décrire cette base elle-même : l'espace topologique sous-jacent, à l'aide du théorème d'Ostrowski, puis les sections du faisceau structural.

Dans un second temps, nous nous intéressons aux espaces affines de dimension quelconque au-dessus de l'anneau A. Nous démontrons quelques résultats concernant la topologie de ces espaces et étudions les anneaux locaux en certains points. Nous faisons ici appel aux résultats sur les anneaux de séries convergentes démontrés au deuxième chapitre ainsi qu'à la propriété d'hensélianité, qui nous permet d'établir l'existence d'isomorphismes locaux. Malheureusement, nous ne sommes pas parvenu à étudier tous les points par cette méthode et il est vraisemblable qu'il faille introduire de nouvelles techniques pour traiter les cas restant.

Signalons que nous parvenons également à décrire explicitement certains anneaux locaux et les anneaux de sections globales sur les disques et les couronnes en termes de séries convergentes. En utilisant le fait que les anneaux locaux sont henséliens, nous obtenons une nouvelle démonstration du théorème classique d'Eisenstein.

Théorème (G. Eisenstein). — *Soit K un corps de nombres. Notons A l'anneau de ses entiers. Soit f un élément de $K[\![T]\!]$ qui est entier sur $K[T]$. Alors*

i) il existe un élément a de A^* tel que la série $f(aT)$ soit à coefficients dans A ;
ii) le rayon de convergence de la série f est strictement positif en toute place.

Chapitre 4 : Droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Le quatrième chapitre est consacré spécifiquement à la droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres A. Dans ce cadre, nous parvenons à compléter les résultats du chapitre précédent et à étudier tous les points. Nous obtenons les résultats suivants, conformes à l'intuition.

Théorème 1. — *i) La droite analytique $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ est un espace topologique métrisable, localement compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs, de dimension topologique 3.*
ii) Le morphisme de projection $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}} \to \mathcal{M}(A)$ est ouvert.
iii) En tout point x de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, l'anneau local $\mathscr{O}_x$ est hensélien, noethérien, régulier et excellent.
iv) Le principe du prolongement analytique vaut.
v) Le faisceau structural $\mathscr{O}$ sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ est cohérent.

Nous disposons, à présent, de résultats aboutis concernant les propriétés topologiques et algébriques de la droite analytique sur l'anneau A. Un peu de travail supplémentaire nous permettra d'en déduire des applications à l'étude des séries arithmétiques, ainsi que nous l'exposerons au chapitre 7.

Chapitre 5 : Morphismes finis

Le cinquième chapitre est consacré à quelques cas particuliers de morphismes finis entre espaces analytiques. Nous réalisons cette étude dans un cadre général, au-dessus d'un anneau de Banach quelconque. Le résultat principal du chapitre prend la forme suivante.

Théorème 2. — *Soient* $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *un anneau de Banach et* P *un polynôme unitaire à coefficients dans* $\mathscr{A}$*. Sous certaines conditions, l'on peut munir l'anneau quotient* $\mathscr{A}[T]/(P(T))$ *d'une norme* $\|.\|_P$ *telle que*

i) le couple $(\mathscr{A}[T]/(P(T)), \|.\|_P)$ *est un anneau de Banach ;*

ii) le morphisme naturel $\mathscr{A} \to \mathscr{A}[T]/(P(T))$ *est borné ;*

iii) le morphisme induit $\varphi : \mathcal{M}(\mathscr{A}[T]/(P(T))) \to \mathcal{M}(A)$ *est fermé et à fibres finies ;*

iv) le faisceau $\varphi_*\mathscr{O}$*, où* $\mathscr{O}$ *désigne le faisceau structural sur* $\mathcal{M}(\mathscr{A}[T]/(P(T)))$*, est cohérent.*

Nous démontrons, au passage, un théorème de division de Weierstraß pour les points rigides des fibres qui nous semble présenter un intérêt propre.

Nous appliquerons, par la suite, les résultats de ce chapitre à certains endomorphismes de la droite analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Indiquons que nous pensons que les techniques introduites ici permettent d'étudier les courbes analytiques au-dessus d'un tel anneau. Dans ce mémoire, nous n'en dirons pas plus à ce sujet, mais développerons ces idées dans un texte à venir.

Chapitre 6 : Espaces de Stein

Dans le sixième chapitre, nous reprenons le cadre de la droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres A. Nous cherchons à jeter les bases d'une théorie des espaces de Stein pour les parties de cet espace. Les définitions que nous prenons sont les définitions cohomologiques habituelles : une partie P de la droite $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ est dite de Stein si elle vérifie le théorème A :

> pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur P et tout point x de P, la fibre $\mathscr{F}_x$ est engendrée par les sections globales $\mathscr{F}(P)$

et le théorème B :

pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur P et tout entier $q \in \mathbf{N}^*$, nous avons $H^q(P, \mathscr{F}) = 0$.

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3. — *Soit V une partie connexe de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Soient s et t deux nombres réels tels que $0 \leq s \leq t$. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ dont le coefficient dominant est inversible. Les parties suivantes de la droite analytique $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ sont des espaces de Stein :*

i) $\big\{x \in \pi^{-1}(V) \,\big|\, s \leq |P(T)(x)| \leq t\big\}$;
ii) $\big\{x \in \pi^{-1}(V) \,\big|\, s \leq |P(T)(x)| < t\big\}$;
iii) $\big\{x \in \pi^{-1}(V) \,\big|\, s < |P(T)(x)| \leq t\big\}$;
iv) $\big\{x \in \pi^{-1}(V) \,\big|\, s < |P(T)(x)| < t\big\}$;
v) $\big\{x \in \pi^{-1}(V) \,\big|\, |P(T)(x)| \geq s\big\}$;
vi) $\big\{x \in \pi^{-1}(V) \,\big|\, |P(T)(x)| > s\big\}$.

Nous commençons par traiter le cas des couronnes fermées. La démonstration que nous proposons reprend la structure de la preuve classique, en géométrie analytique complexe, du fait que les blocs compacts, c'est-à-dire les produits de segments réels dans $\mathbf{C}^n$, sont des espaces de Stein. Les ingrédients essentiels en sont le lemme de Cousin, qui permet, sous certaines hypothèses, d'écrire une fonction analytique f définie sur une intersection de compacts $K^- \cap K^+$ comme différence d'une fonction analytique f^- sur K^- et f^+ sur K^+ et le lemme de Cartan, qui en est la version multiplicative.

La démonstration de ces lemmes met en jeu des outils à la fois analytiques et arithmétiques. Si les compacts K^- et K^+ sont définis, respectivement, par les inégalités $|T| \leq r$ et $r \leq |T| \leq s$, il s'agit essentiellement d'écrire une série de la forme

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \, T^k$$

comme différence $f^- - f^+$, avec

$$f^- = \sum_{k \geq 0} a_k \, T^k \text{ et } f^+ = \sum_{k < 0} a_k \, T^k.$$

Supposons, à présent, que $A = \mathbf{Z}$ et que K^- et K^+ sont les compacts de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ définis, respectivement, par les inégalités $|p| \leq \frac{1}{2}$ et $|p| \geq \frac{1}{2}$, où p est un nombre premier. Il s'agit alors d'écrire un élément de $\mathbf{Q}_p$ comme somme, ou produit, d'un élément de $\mathbf{Z}_p$ et d'un élément de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Bien entendu, dans un corps de nombres quelconque, ce problème peut se révéler plus délicat et nous le résolvons en utilisant le théorème d'approximation forte et la finitude du groupe des classes.

En ce qui concerne les couronnes ouvertes, le principe de la démonstration consiste à construire une exhaustion par des couronnes fermées. Le fait que les couronnes ouvertes soient de Stein ne découle cependant pas formellement de l'existence d'une telle exhaustion. Comme dans le cadre de la géométrie analytique complexe, des propriétés supplémentaires sont nécessaires et nous sommes amené à introduire une notion d'exhaustion de Stein. Signalons que la démonstration des propriétés requises passe, notamment, par un résultat de fermeture pour les sous-modules d'un module libre, d'intérêt indépendant.

Finalement, le passage du cas des couronnes au cas des parties plus générales qui figurent dans le théorème s'effectue à l'aide des résultats sur les morphismes finis démontrés au chapitre précédent.

Chapitre 7 : Applications

De même que la géométrie analytique complexe permet de démontrer des résultats sur les fonctions holomorphes, nous obtenons, à l'aide des théorèmes que nous avons établis concernant la droite affine analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres, des propriétés des séries arithmétiques convergentes (au sens du début de l'introduction). C'est l'objet de notre septième et dernier chapitre. Donnons un exemple de telle propriété. Notons D le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$.

Théorème 4. — *Soient E et F deux parties disjointes, fermées et discrètes de D ne contenant pas le point 0. Soient $(n_a)_{a\in E}$ une famille d'entiers positifs et $(P_b)_{b\in F}$ une famille de polynômes à coefficients complexes sans terme constant. Nous supposerons que*

1. *quel que soit $a \in E$, $\bar{a} \in E$ et $n_{\bar{a}} = n_a$;*
2. *quel que soit $b \in F$, $\bar{b} \in F$ et $P_{\bar{b}} = \overline{P_b}$.*

Alors il existe $g, h \in \mathbf{Z}[\![T]\!] \cap \mathscr{O}(D)$, avec $h \neq 0$, qui vérifient les propriétés suivantes :

i) la fonction $f = g/h$ est holomorphe sur $D \setminus F$;
ii) quel que soit $a \in E$, la fonction f s'annule en a à un ordre supérieur à n_a ;
iii) quel que soit $b \in F$, on a $f(z) - P_b\left(\frac{1}{z-b}\right) \in \mathscr{O}_b$;
iv) on a $f \in \mathbf{Z}[\![T]\!] \cap \mathscr{O}_0$.

Ce résultat se démontre par des méthodes cohomologiques. Lorsque la partie E est vide, nous utilisons la suite exacte courte $0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}/\mathscr{O} \to 0$ et le fait que le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{Z}}$ est une partie de

Stein. Lorsqu'elle ne l'est pas, nous utilisons le même argument en remplaçant le faisceau $\mathscr{O}$ par un diviseur de Cartier adéquat.

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de nombres premiers. Notons $N \in \mathbf{N}^*$ leur produit. Il est possible de contrôler également le comportement de f en tant que fonction méromorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbf{C}_p$, pour tout nombre premier $p \in \mathcal{P}$. Il nous faut alors autoriser les coefficients de g, de h et du développement de f en 0 à appartenir à $\mathbf{Z}[1/N]$. Bien entendu, nous disposons d'un résultat analogue pour tout corps de nombres.

Nous proposons, ensuite, une application de nos méthodes à la noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques convergentes. Pour l'obtenir, nous nous sommes inspiré du théorème suivant de J. Frisch (*cf.* [**12**]).

Théorème (J. Frisch). — *Soit X une variété analytique réelle ou complexe. Soit K une partie de X compacte, semi-analytique et de Stein. Alors l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de K est noethérien.*

Comme l'ont montré des résultats ultérieurs (*cf.* [**30**], théorème 1), l'hypothèse de semi-analyticité peut être affaiblie. C'est pourquoi nous introduisons ici une notion de partie morcelable. Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 5. — *Soit A un anneau d'entiers de corps de nombres. Soit L une partie de la droite analytique $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ compacte, morcelable et de Stein. Alors l'anneau $\mathscr{O}(L)$ des fonctions analytiques au voisinage de L est noethérien.*

En appliquant ce théorème aux disques fermés au-dessus des parties semi-analytiques de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 6. — *Soient t un entier, $p_1, \ldots, p_t$ des nombres premiers, $r_1, \ldots, r_t, r_\infty$ des éléments de l'intervalle $]0,1[$. Alors, l'anneau formé des séries*

$$f \in \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p_1 \cdots p_t}\right][\![T]\!]$$

vérifiant les conditions

$$R_\infty(f) > r_\infty \text{ et } \forall i \in [\![1,t]\!],\ R_{p_i}(f) > r_i$$

est un anneau noethérien.

Si l'on considère uniquement des séries à coefficients entiers et que l'on n'impose donc des conditions que sur le rayon de convergence complexe, nous retrouvons un résultat de D. Harbater (*cf.* [**18**], théorème 1.8). La preuve qu'il en propose est très algébrique : elle consiste à décrire tous les idéaux premiers de l'anneau à l'aide de manipulations astucieuses sur les séries. Insistons sur le fait que notre démonstration repose sur des arguments géométriques et suit

de près les méthodes de la géométrie analytique complexe. En ce sens, elle nous semble porter des promesses de généralisation. Signalons, enfin, que notre résultat s'étend à tout anneau d'entiers de corps de nombres.

Pour finir, nous proposons une application au problème de Galois inverse. Là encore, nous proposons une nouvelle démonstration d'un résultat de D. Harbater (*cf.* [**20**], corollaire 3.8).

Théorème 7. — *Notons* $\mathbf{Z}_{1^-}[\![T]\!]$ *le sous-anneau de* $\mathbf{Z}[\![T]\!]$ *formé des séries*

$$\sum_{k\geq 0} a_k\, T^k$$

qui vérifient la condition suivante :

$$\forall r < 1,\ \lim_{k\to+\infty} \|a_k\|\, r^k = 0.$$

Tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps Frac$(\mathbf{Z}_{1^-}[\![T]\!])$.

Les méthodes que nous mettons ici en œuvre nous semblent conceptuellement plus simples et plus géométriques que celles proposées par D. Harbater. La théorie des espaces de Berkovich nous permet, en effet, d'interpréter l'anneau $\mathbf{Z}_{1^-}[\![T]\!]$ comme un anneau de sections, à savoir l'anneau des sections du disque $\mathbf{D}$, le disque relatif ouvert de rayon 1 centré en la section nulle de la droite analytique $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{Z}}$.

Un groupe fini étant donné, nous pouvons alors construire un revêtement du disque $\mathbf{D}$ possédant le groupe de Galois voulu. Nous procédons de façon classique, en exhibant d'abord des revêtements cycliques définis localement, puis en les recollant. Il reste alors à vérifier que le revêtement obtenu est algébrique. Nous y parvenons en utilisant le caractère Stein du disque $\mathbf{D}$, démontré au chapitre précédent.

Signalons que, là encore, le résultat du théorème s'étend à tout anneau d'entiers de corps de nombres. Nous espérons que cette vision géométrique du problème permettra d'y effectuer quelques progrès.

Remerciements

Le présent mémoire précise et étend les résultats que j'ai obtenus lors de ma thèse, effectuée à l'institut de recherche mathématique de Rennes. Je souhaite remercier ici mes deux directeurs, Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros, pour m'avoir invité à me lancer dans ces recherches et m'avoir prodigué sans compter leurs conseils et leurs encouragements. J'ai beaucoup appris à leur contact : des mathématiques, bien sûr, mais également, je le crois, le métier de mathématicien.

J'ai fini de rédiger ce texte lors de mon séjour à l'université de Ratisbonne. Je tiens à remercier Klaus Künnemann, qui m'y a accueilli, pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié et les encouragements qu'il m'a prodigués.

CHAPITRE 1

ESPACES ANALYTIQUES SUR UN ANNEAU DE BANACH

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque, au sens de Vladimir G. Berkovich. Au numéro 1.1, nous rappelons les constructions qu'il propose dans l'ouvrage [**2**], à la fois pour l'espace topologique et le faisceau structural. Nous donnons, en particulier, une description explicite de la droite affine analytique au-dessus d'un corps valué complet quelconque.

Au numéro 1.2, nous nous intéressons à certaines parties compactes des espaces analytiques, que nous avons appelées spectralement convexes. Elles possèdent notamment la propriété d'être homéomorphes à des spectres analytiques d'anneaux de Banach que nous pouvons décrire explicitement. Nous en donnons des exemples et démontrons quelques résultats de permanence à leur sujet. Par la suite, les parties spectralement convexes nous seront fort utiles pour mener des raisonnements par récurrence, puisqu'elles permettent de ramener l'étude d'une partie d'un espace affine de dimension n à celle d'un espace de dimension relative 0.

Le numéro 1.3 est consacré à une application naturelle continue, que nous avons appelée flot, d'une partie de $\mathbf{R}_+$ dans un espace analytique donné. Nous l'étudions et comparons les propriétés des points situés sur une même trajectoire.

1.1. Définitions

1.1.1. Spectre analytique d'un anneau de Banach

Soit A un anneau commutatif unitaire. Par définition, l'ensemble sous-jacent au spectre $\mathrm{Spec}(A)$ de l'anneau A est l'ensemble des idéaux premiers de A. D'après [**16**], Introduction, **13**, il est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes unitaires

$$A \to k,$$

où k est un corps. Deux morphismes de A vers des corps k_1 et k_2 sont dits équivalents s'ils prennent place dans un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & & k_1 \\
A \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[drr] & k_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & k_2.
\end{tikzcd}$$

La bijection précédente peut être décrite explicitement. Tout d'abord, si $A \to k$ est un morphisme unitaire vers un corps, son noyau est un idéal premier de A et donc un élément de $\mathrm{Spec}(A)$. Réciproquement, si x est un point de $\mathrm{Spec}(A)$, il correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}_x$ de A. On construit alors un morphisme de A vers un corps de la façon suivante :

$$A \to A/\mathfrak{p}_x \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}_x).$$

Le corps $k(x) = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}_x)$ est appelé corps résiduel du point x. Par ailleurs, on vérifie que tous les morphismes représentant x se factorisent par le morphisme $A \to k(x)$.

Si nous désirons maintenant faire de la géométrie analytique, nous avons besoin de disposer de notions de normes et de convergence. Nous considérerons donc non plus un simple anneau, mais un anneau *de Banach*. De même, nous remplacerons les morphismes vers des corps par des morphismes *bornés*, et donc continus, vers des corps *valués*. Rappelons les définitions de ces notions.

Définition 1.1.1. — *Soient $\mathscr{A}$ un anneau commutatif unitaire et $\|.\|$ une application de $\mathscr{A}$ dans $\mathbf{R}_+$. On dit que l'application $\|.\|$ est une* **norme d'anneau sur l'anneau** $\mathscr{A}$ *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) $(\|f\| = 0) \Leftrightarrow (f = 0)$ *;*
ii) $\|1\| = 1$ *;*
iii) $\forall f, g \in \mathscr{A},\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *;*
iv) $\forall f, g \in \mathscr{A},\ \|fg\| \leq \|f\|\,\|g\|$.

On dit que le couple $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est un **anneau de Banach** *si l'application $\|.\|$ est une norme d'anneau sur l'anneau $\mathscr{A}$ et si l'espace topologique $\mathscr{A}$ est complet pour cette norme.*

Soient $(\mathscr{A}', \|.\|')$ un anneau de Banach et φ une application de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}'$. On dit que l'application φ est un **morphisme borné d'anneaux de Banach** *si l'application φ est un morphisme d'anneaux et s'il existe un nombre réel C tel que*

$$\forall f \in \mathscr{A},\ \|\varphi(f)\|' \leq C\,\|f\|.$$

Remarque 1.1.2. — Cette définition du caractère borné ne coïncide pas avec la définition habituelle, mais elle est naturelle dans le cadre des morphismes d'anneaux. Nous utiliserons uniquement celle-ci.

Définition 1.1.3. — *On appelle* **corps valué** *tout couple $(K, |.|)$, où K est un corps commutatif et $|.|$ une valeur absolue sur K, c'est-à-dire une application de K dans $\mathbf{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

i) $(|f| = 0) \Leftrightarrow (f = 0)$ *;*
ii) $|1| = 1$ *;*
iii) $\forall f, g \in K,\ |f + g| \leq |f| + |g|$ *;*
iv) $\forall f, g \in K,\ |fg| = |f|\,|g|$.

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach. On appelle **caractère de l'anneau de Banach** $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *tout morphisme borné de la forme*

$$\chi : (\mathscr{A}, \|.\|) \to (K, |.|),$$

où $(K, |.|)$ est un corps valué complet.

Remarque 1.1.4. — Dire que le morphisme $\chi : (\mathscr{A}, \|.\|) \to (K, |.|)$ est borné signifie, par définition, qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que, quel que soit $f \in \mathscr{A}$, nous ayons

$$|\chi(f)| \leq C\,\|f\|.$$

Soient $f \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Nous avons alors

$$|\chi(f)| = |\chi(f^n)|^{1/n} \leq C^{1/n}\,\|f^n\|^{1/n} \leq C^{1/n}\,\|f\|.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$|\chi(f)| \leq \|f\|.$$

Nous pourrons donc toujours supposer que $C = 1$.

Définition 1.1.5. — *Soit* $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *un anneau de Banach. On dit que deux* **caractères** *de* $(\mathscr{A}, \|.\|)$

$$\chi_1 : (\mathscr{A}, \|.\|) \to (K_1, |.|_1) \text{ et } \chi_2 : (\mathscr{A}, \|.\|) \to (K_2, |.|_2)$$

sont **équivalents** *s'il existe un troisième caractère de* $(\mathscr{A}, \|.\|)$

$$\chi_0 : (\mathscr{A}, \|.\|) \to (K_0, |.|_0)$$

et deux morphismes isométriques

$$j_1 : (K_0, |.|_0) \to (K_1, |.|_1) \text{ et } j_2 : (K_0, |.|_0) \to (K_2, |.|_2)$$

qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & (K_1, |.|_1) \\
(\mathscr{A}, \|.\|) \arrow[rr, "\chi_0"] \arrow[urr, bend left, "\chi_1"] \arrow[drr, bend right, "\chi_2"'] & & (K_0, |.|_0) \arrow[u, "j_1"'] \arrow[d, "j_2"] \\
 & & (K_2, |.|_2).
\end{tikzcd}$$

Comme dans le cas des schémas, nous pouvons décrire les classes d'équivalence de caractères d'une façon explicite. À cet effet, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1.1.6. — *Soit* $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *un anneau de Banach. Une* **semi-norme multiplicative bornée sur l'anneau de Banach** $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *est une application* $|.| : \mathscr{A} \to \mathbf{R}_+$ *qui vérife les propriétés suivantes :*

i) $|0| = 0$ *;*
ii) $|1| = 1$ *;*
iii) $\forall f, g \in \mathscr{A}$, $|f + g| \leq |f| + |g|$ *;*
iv) $\forall f, g \in \mathscr{A}$, $|fg| = |f||g|$ *;*
v) $\exists C > 0$, $\forall f \in \mathscr{A}$, $|f| \leq C\|f\|$.

Remarque 1.1.7. — Le même raisonnement que pour les caractères montre que l'on peut supposer que $C = 1$.

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach. L'ensemble des classes d'équivalence de caractères sur $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est en bijection avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur $(\mathscr{A}, \|.\|)$. Nous pouvons décrire cette bijection explicitement. À tout caractère

$$\chi : (\mathscr{A}, \|.\|) \to (K, |.|),$$

on associe la semi-norme multiplicative

$$\mathscr{A} \xrightarrow{\chi} K \xrightarrow{|.|} \mathbf{R}_+.$$

Elle est bornée car le morphisme χ est borné. On vérifie immédiatement que la semi-norme obtenue ne dépend que de la classe d'équivalence du caractère χ.

Réciproquement, soit $|.|_x$ une semi-norme multiplicative bornée sur $(\mathscr{A}, \|.\|)$. L'ensemble

$$\mathfrak{p}_{|.|_x} = \{f \in \mathscr{A},\ |f|_x = 0\}$$

est un idéal premier de $\mathscr{A}$. Le quotient $A/\mathfrak{p}_{|.|_x}$ est un anneau intègre sur lequel la semi-norme $|.|_x$ induit une valeur absolue. Nous noterons $\mathscr{H}(|.|_x)$ le complété du corps des fractions de cet anneau pour cette valeur absolue. La construction fournit un morphisme

$$\mathscr{A} \to \mathscr{H}(|.|_x).$$

On vérifie sans peine qu'il est borné et donc que c'est un caractère. Comme dans le cas des schémas, tout caractère représentant la semi-norme multiplicative $|.|_x$ se factorise par le caractère $\mathscr{A} \to \mathscr{H}(|.|_x)$.

Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition 1.1.8 (V. Berkovich). — *Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach. On appelle* **spectre analytique de l'anneau de Banach** $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *et l'on note $\mathcal{M}(\mathscr{A}, \|.\|)$, ou plus simplement $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ si aucune ambiguïté n'en résulte, l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur $(\mathscr{A}, \|.\|)$.*

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach. Soient f un élément de $\mathscr{A}$ et x un point de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$. Notons $|.|_x$ la semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}$ associée au point x et $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_{|.|_x}$ l'idéal premier défini précédemment. On appelle **corps résiduel complété** du point x, et on note $\mathscr{H}(x)$, le corps $\mathscr{H}(|.|_x)$ défini précédemment. Notons $f(x)$ l'image de l'élément f de $\mathscr{A}$ par le caractère $\mathscr{A} \to \mathscr{H}(x)$. Le corps $\mathscr{H}(x)$ est muni d'une valeur absolue, que nous noterons toujours $|.|$. Cela n'entraînera aucune confusion. Avec ces notations, nous avons donc

$$|f(x)| = |f|_x.$$

Comme les notations l'indiquent, nous considérerons désormais les éléments de $\mathscr{A}$ comme des fonctions sur l'espace $\mathcal{M}(\mathscr{A})$.

Munissons, à présent, le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ d'une topologie : la topologie la plus grossière rendant continues les applications d'évaluation, c'est-à-dire les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathscr{A}) & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array},$$

où f est un élément de $\mathscr{A}$. Cette topologie est également celle de la convergence faible, ou encore celle induite par la topologie produit sur $\mathbf{R}^{\mathscr{A}}$. Le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ vérifie alors des propriétés remarquables (*cf.* [**2**], théorème 1.2.1).

Théorème 1.1.9 (V. Berkovich). — *Le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ est un espace topologique compact. Si l'anneau $\mathscr{A}$ n'est pas nul, cet espace n'est pas vide.*

1.1.2. Espace affine analytique

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach. Maintenant que nous avons défini le spectre analytique de cet anneau, nous pouvons définir ce qu'est l'espace affine au-dessus de celui-ci. Soit $n \in \mathbf{N}$.

Définition 1.1.10 (V. Berkovich). — *On appelle* **espace affine analytique de dimension** n **sur** $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ dont la restriction à $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est bornée. Nous le noterons $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$.*

En reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, on montre que l'ensemble $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes

$$\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to K,$$

où K est un corps valué complet, dont la restriction à $\mathscr{A}$ est bornée. Comme précédemment, nous associons à chaque point x de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ un idéal premier $\mathfrak{p}_x$ et un corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$. Pour tout élément f de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$, nous désignons par $f(x)$ l'image de f par le morphisme $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{H}(x)$.

Nous munissons également l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ de la topologie la plus grossière pour laquelle les applications d'évaluation sont continues. Il vérifie alors encore certaines propriétés topologiques (*cf.* [**2**], remarque 1.5.2.(i)). Nous les redémontrons ici.

Proposition 1.1.11. — *Pour tout nombre réel positif r, la partie de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ définie par*

$$\left\{x \in \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ |T_i(x)| \leq r\right\}$$

est compacte.

Démonstration. — L'application $\|.\|_r : \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbf{R}_+$ définie par

$$\left\| \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} a_{k_1,\ldots,k_n} T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n} \right\|_r = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} \|a_{k_1,\ldots,k_n}\| \, r^{k_1+\cdots+k_n}$$

est une norme sur la $\mathscr{A}$-algèbre $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$. Notons $\mathscr{B}$ le complété de l'anneau $\mathscr{A}$ pour cette norme. L'application naturelle

$$\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{B}$$

est bornée sur $\mathscr{A}$. Elle induit donc un morphisme

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathscr{B}) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}.$$

Posons

$$K = \left\{ x \in \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ |T_i(x)| \leq r \right\}.$$

Montrons que l'image de φ contient la partie K. Soit x un point de K. Il est associé à un morphisme

$$\chi_x : \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{H}(x),$$

qui est borné sur $\mathscr{A}$. Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, nous avons

$$|T_i(x)| \leq r = \|T_i\|_r.$$

On en déduit que le morphisme χ_x est borné lorsque l'on munit l'algèbre $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ de la norme $\|.\|_r$. Par conséquent, le morphisme χ_x se factorise par un morphisme

$$\mathscr{B} \to \mathscr{H}(x).$$

On en déduit que le point x appartient à l'image du morphisme φ.

Puisque l'espace $\mathcal{M}(\mathscr{B})$ est compact, l'image du morphisme φ l'est également. Par définition de la topologie de l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$, la partie K est fermée. Puisqu'elle est contenue dans l'image du morphisme φ, elle est compacte. □

Notons $\pi : \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \to \mathcal{M}(\mathscr{A})$ l'application de projection induite par le morphisme $\mathscr{A} \to \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$.

Corollaire 1.1.12. — *Soit U une partie de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ et $P_1(T_1), \ldots, P_n(T_n)$ des polynômes à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$ dont le coefficient dominant est inversible. Pour toute partie compacte V de U et tout élément r de $\mathbf{R}_+$, la partie de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ définie par*

$$\left\{ x \in \pi^{-1}(V) \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ |P_i(T_i)(x)| \leq r \right\}$$

est compacte.

Démonstration. — Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Il existe un entier d_i, un élément a_{i,d_i} de $\mathscr{O}(U)$ inversible et des éléments $a_{i,d_i-1},\dots,a_{i,0}$ de $\mathscr{O}(U)$ tels que

$$P_i(T_i)=\sum_{k=0}^{d_i} a_{i,k}\,T_i^k \text{ dans } \mathscr{O}(U)[T_i].$$

Puisque la fonction a_{i,d_i} est inversible sur U, la quantité

$$m_i=\inf_{v\in V}(|a_{i,d_i}(v)|)$$

est strictement positive. Pour tout élément x de $\pi^{-1}(V)$, nous avons donc

$$\begin{aligned}|P_i(T_i)(x)| &\geq |a_{i,d_i}(x)|\,|T_i(x)|^{d_i}-\sum_{k=0}^{d_i-1}|a_{i,k}(x)|\,|T_i(x)|^k\\ &\geq m_i\,|T_i(x)|^{d_i}-\sum_{k=0}^{d_i-1}\|a_{i,k}\|_V\,|T_i(x)|^k.\end{aligned}$$

La fonction

$$\alpha_i : t\in\mathbf{R}\mapsto m_i\,t^{d_i}-\sum_{k=0}^{d_i-1}\|a_{i,k}\|_V\,t^k\in\mathbf{R}$$

tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Par conséquent, il existe un élément s_i de $\mathbf{R}_+$ tel que, quel que soit $t>s_i$, on ait $\alpha_i(t)>r$. Pour tout élément x de $\pi^{-1}(V)$ vérifiant $|P_i(T_i)(x)|\leq r$, nous avons donc $|T_i(x)|\leq s_i$.

Posons $s=\max_{1\leq i\leq n}(s_i)$. La partie

$$K=\left\{x\in\pi^{-1}(V)\,\middle|\,\forall i\in[\![1,n]\!],\ |P_i(T_i)(x)|\leq r\right\}$$

est fermée dans $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ puisque la partie V est fermée. En outre, elle est contenue dans la partie

$$\left\{x\in\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}\,\middle|\,\forall i\in[\![1,n]\!],\ |T_i(x)|\leq s\right\},$$

qui est compacte, en vertu du lemme précédent. On en déduit que la partie K est compacte. □

Théorème 1.1.13 (V. Berkovich). — *L'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est un espace topologique séparé, σ-compact et localement compact.*

Démonstration. — Soient x et y deux points distincts de l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. Il existe alors un élément f de $\mathscr{A}[T_1,\dots,T_n]$ tel que $|f(x)|\neq|f(y)|$. Quitte à échanger les points x et y, nous pouvons supposer que $|f(x)|<|f(y)|$. Soit r un élément de l'intervalle $]|f(x)|,|f(y)|[$. Les ouverts

$$\left\{z\in\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}\,\middle|\,|f(z)|<r\right\}\ \text{ et }\ \left\{z\in\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}\,\middle|\,|f(z)|>r\right\}$$

séparent les points x et y. Par conséquent, l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est séparé.

L'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est réunion des espaces

$$D_n = \left\{ x \in \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \,\middle|\, \forall i \in [\![1,n]\!],\ |T_i(x)| \leq n \right\},$$

pour n décrivant $\mathbf{N}$. D'après la proposition 1.1.11, ces espaces sont compacts. On en déduit que l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est σ-compact.

En outre, par définition de la topologie, tout point possède un système fondamental de voisinages fermés. Puisque tout point est contenu dans l'intérieur de l'espace D_n, pour un certain entier positif n, et que cet espace est compact, on en déduit tout point possède un système fondamental de voisinages compacts. □

Donnons, à présent, quelques exemples de points d'espaces analytiques. Nous nous restreindrons au cas où l'anneau de Banach $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est un corps valué complet $(k, |.|)$. Son spectre analytique $\mathcal{M}(k)$ est alors constitué d'un seul point. Remarquons que l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$ contient l'ensemble k^n. En effet, à tout élément $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de k^n, nous pouvons associer le point de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$ défini par

$$\begin{array}{ccc} k[T_1, \ldots, T_n] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P(T_1, \ldots, T_n) & \mapsto & |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \end{array}.$$

Nous noterons encore $\boldsymbol{\alpha}$ ce point. Un tel point sera appelé point rationnel de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$. En voici une définition équivalente.

Définition 1.1.14. — *Soient $(k, |.|)$ un corps valué complet. On dit qu'un point x de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$ est un* **point rationnel** *si le morphisme naturel $k \to \mathscr{H}(x)$ est un isomorphisme.*

En général, l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$ contient beaucoup plus de points que l'espace k^n. C'est en particulier le cas si le corps k n'est pas algébriquement clos et si $n \geq 1$. Considérons une clôture algébrique $\bar{k}$ du corps k. La valeur absolue $|.|$ sur k se prolonge de façon unique en une valeur absolue sur $\bar{k}$, que nous noterons encore $|.|$. À tout élément $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de $\bar{k}^n$, nous pouvons associer le point de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$ défini par

$$\begin{array}{ccc} k[T_1, \ldots, T_n] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P(T_1, \ldots, T_n) & \mapsto & |P(\beta_1, \ldots, \beta_n)| \end{array}.$$

Nous noterons encore $\boldsymbol{\beta}$ ce point. Attention, cependant : si σ désigne un élément de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, les points $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ et $(\sigma(\beta_1), \ldots, \sigma(\beta_n))$ coïncident ! Un tel point sera appelé point rigide de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_k$. En voici une définition équivalente.

Définition 1.1.15. — *Soient $(k, |.|)$ un corps valué complet et n un nombre entier positif. On dit qu'un point x de l'espace analytique $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ est un* **point rigide** *si le morphisme naturel $k \to \mathscr{H}(x)$ est une extension finie de corps.*

Dans les numéros qui suivent, nous décrivons explicitement l'espace et sa topologie dans quelques cas simples. Dans le cas archimédien, nous ferons le lien entre l'espace $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ et les espaces analytiques réels et complexes usuels. Dans le cas ultramétrique, nous nous contenterons de décrire la droite $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Nous observerons, en particulier, qu'elle contient beaucoup plus de points que $\bar{k}$.

1.1.2.1. Espace affine analytique sur un corps archimédien

Commençons par supposer que le corps $(k, |.|)$ est un corps muni d'une valeur absolue archimédienne pour laquelle il est complet. D'après [**6**], VI, §6, n° 4, théorème 2, il existe un élément s de l'intervalle $]0, 1]$ tel que le corps valué $(k, |.|)$ soit isométriquement isomorphe au corps $(\mathbf{R}, |.|_\infty^s)$ ou au corps $(\mathbf{C}, |.|_\infty^s)$, où $|.|_\infty$ désigne la valeur absolue usuelle.

Supposons que $(k, |.|) = (\mathbf{C}, |.|_\infty^s)$, avec $s \in]0, 1]$. Soit n un entier positif. Nous savons que les points de l'espace $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\mathrm{an}}$ sont en bijection avec les classes d'équivalences de caractères de $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$. Soit

$$\chi : \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n] \to L$$

un tel caractère. D'après le théorème de Gelfand-Mazur (*cf.* [**6**], VI, §6, n° 4, théorème 1), le corps L est isomorphe à $\mathbf{C}$. Posons

$$\boldsymbol{\alpha} = (\chi(T_1), \ldots, \chi(T_n)) \in \mathbf{C}^n.$$

Alors, le caractère χ n'est autre que le morphisme évaluation au point $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbf{C}^n$. On en déduit que les ensembles $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\mathrm{an}}$ et $\mathbf{C}^n$ sont en bijection, autrement dit, tous les points de l'espace analytique $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\mathrm{an}}$ sont rationnels. D'autre part, il est clair que les topologies coïncident. Les espaces $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\mathrm{an}}$ et $\mathbf{C}^n$ sont donc homéomorphes.

Supposons, à présent, que $(k, |.|) = (\mathbf{R}, |.|_\infty^s)$, avec $s \in]0, 1]$. Soit n un entier positif. Le même raisonnement que précédemment montre que l'espace $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\mathrm{an}}$ est homéomorphe au quotient de l'espace $\mathbf{C}^n$ par la conjugaison complexe. En particulier, tous les points de l'espace analytique $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\mathrm{an}}$ sont rigides.

1.1.2.2. Droite sur un corps trivialement valué

Dans cette partie, nous supposerons que le corps k est muni de la valeur absolue triviale $|.|_0$. Nous nous contenterons de décrire la droite affine analytique $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

Soit x un point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Il lui correspond une semi-norme multiplicative $|.|_x$ bornée sur k. Notons

$$\mathfrak{p}_x = \left\{ f \in k[T] \,\middle|\, |f|_x = 0 \right\}.$$

C'est un idéal premier de $k[T]$.

Supposons, tout d'abord, que l'idéal $\mathfrak{p}_x$ n'est pas l'idéal nul. Il existe alors un polynôme irréductible $P(T)$ de $k[T]$ qui engendre l'idéal $\mathfrak{p}_x$. La semi-norme multiplicative $|.|_x$ induit une valeur absolue sur le quotient

$$k[T]/\mathfrak{p}_x = k[T]/(P(T)),$$

qui est une extension finie du corps k. Cette valeur absolue ne peut être que la valeur absolue triviale. Par conséquent, nous avons

$$|.|_x : \begin{array}{ccc} k[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ Q(T) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } P \,|\, Q \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}.$$

Nous noterons $\eta_{P,0}$ le point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ correspondant. Nous avons

$$\mathscr{H}(\eta_{P,0}) = k[T]/(P(T)).$$

Supposons, à présent, que l'idéal $\mathfrak{p}_x$ est l'idéal nul. La semi-norme multiplicative $|.|_x$ est alors une valeur absolue sur $k[T]$. Par hypothèse, la restriction de cette valeur absolue à k est bornée par la valeur absolue triviale. En particulier, pour tout entier positif n, nous avons $|n.1|_x \leq 1$. On en déduit que la valeur absolue $|.|_x$ est ultramétrique en utilisant le lemme classique suivant.

Lemme 1.1.16. — *Soit $(k, |.|)$ un corps valué. La valeur absolue $|.|$ est ultramétrique si, et seulement si, il existe un nombre réel C tel que, pour tout entier positif n, nous ayons $|n.1| \leq C$.*

Démonstration. — Supposons que la valeur absolue $|.|$ est ultramétrique. En utilisant l'inégalité ultramétrique et le fait que $|1| = 1$, on montre par récurrence que, pour tout entier positif n, nous avons $|n.1| \leq 1$.

Supposons qu'il existe un nombre réel C tel que, pour tout entier positif n, nous ayons $|n.1| \leq C$. Soient $a, b \in k$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Nous avons

$$\begin{aligned} |a+b|^p &= |(a+b)^p| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{p} C_p^i \, a^i \, b^{p-i} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{p} \left| C_p^i \right| \, |a|^i \, |b|^{p-i} \\ &\leq p \, C \, \max(|a|, |b|)^p. \end{aligned}$$

En élevant l'inégalité obtenue à la puissance $1/p$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$|a+b| \leq \max(|a|, |b|).$$

□

Nous allons distinguer deux cas. Supposons, tout d'abord, que $|T|_x \leq 1$. On montre alors facilement que, quel que soit $f \in k[T]$, nous avons

$$|f|_x \leq 1.$$

L'inégalité ultramétrique assure alors que la partie

$$\mathfrak{p}'_x = \left\{ f \in k[T] \,\middle|\, |f|_x < 1 \right\}$$

est un idéal premier de $k[T]$. Si cet idéal est nul, alors nous avons $|.|_x = |.|_0$. Nous appellerons ce point **point de Gauß** et le noterons η_1.

Dans les autres cas, l'idéal $\mathfrak{p}'_x$ est engendré par un polynôme irréductible P de $k(T)$. Notons v_P la valuation P-adique sur $k[T]$. Il existe $r \in \,]0,1[$ tel que $|P|_x = r$. Pour tout élément $Q(T)$ de $k[T]$, nous avons alors

$$|Q|_x = r^{v_P(Q)}.$$

Nous noterons $\eta_{P,r}$ le point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ correspondant. Le corps résiduel complété $\mathscr{H}(\eta_{P,r})$ en ce point est le complété du corps $k(T)$ pour la topologie P-adique. Si $P(T) = T$, nous noterons η_r le point correspondant. Le morphisme naturel $k[T] \to \mathscr{H}(\eta_r)$ induit alors un isomorphisme entre le corps des séries de Laurent $k(\!(T)\!)$ et le corps résiduel complété $\mathscr{H}(\eta_r)$.

Supposons, à présent, que $|T|_x > 1$. Il existe $r > 1$ tel que $|T|_x = r$. L'inégalité ultramétrique montre alors que, quel que soit $Q(T) \in k[T]$, nous avons

$$|Q|_x = r^{\deg(Q)}.$$

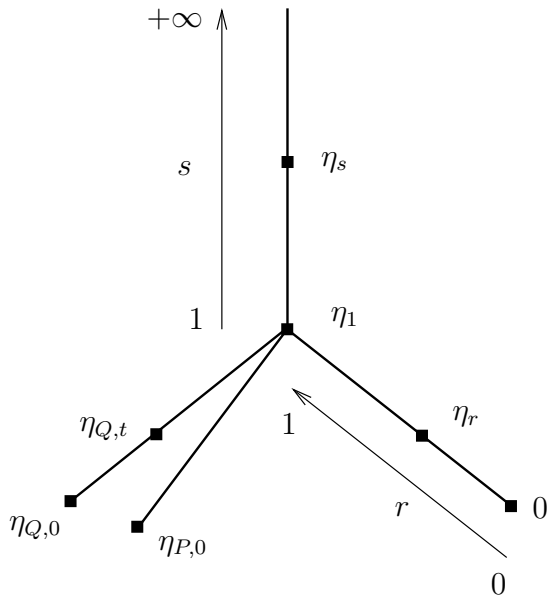

FIGURE 1. Droite analytique sur un corps trivialement valué.

Nous noterons η_r le point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ correspondant. Le morphisme naturel $k[T] \to \mathscr{H}(\eta_r)$ induit alors un isomorphisme entre le corps des séries de Laurent $k(\!(T^{-1})\!)$ et le corps résiduel complété $\mathscr{H}(\eta_r)$.

Introduisons encore quelques notations. Pour $\alpha \in k$ et $r \in [0,1]$, nous noterons

$$\eta_{\alpha,r} = \eta_{T-\alpha,r}.$$

Si $r = 0$, nous noterons parfois simplement α le point $\eta_{\alpha,0}$.

Pour finir, décrivons la topologie de la droite $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Nous ne démontrerons pas les résultats qui suivent. Pour se faire une idée des preuves, le lecteur intéressé peut se reporter au numéro 3.1.1, où nous décrivons la topologie du spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres. La topologie des branches est particulièrement simple. En effet, pour tout polynôme irréductible $P(T)$ de $k[T]$, l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \\ r & \mapsto & \eta_{P,r} \end{array}$$

réalise un homéomorphisme sur son image. De même, l'application

$$\begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \\ r & \mapsto & \eta_r \end{array}$$

réalise un homéomorphisme sur son image.

Afin d'être complets, il nous reste à décrire un système fondamental de voisinages du point de Gauß η_1 ; l'ensemble des parties de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ qui contiennent un voisinage du point η_1 dans un nombre fini de branches et la totalité des branches restantes en est un.

1.1.2.3. Droite sur un corps ultramétrique quelconque

Il est en fait possible de décrire la droite analytique au-dessus de tout corps ultramétrique complet. Nous allons nous limiter au cas des corps qui sont également algébriquement clos. Cette restriction ne nuit pas à la généralité de notre propos. En effet, d'après [**2**], corollaire 1.3.6, si k désigne un corps valué complet, $\bar{k}$ l'une de ses clôtures algébriques et $\hat{\bar{k}}$ le complété de cette dernière, alors le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit sur $\hat{\bar{k}}$ et le morphisme naturel

$$\mathbf{A}_{\hat{\bar{k}}}^{1,\mathrm{an}}/\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$$

est un isomorphisme.

Nous supposerons donc, désormais, que k est un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Nous reprenons la description donnée par V. Berkovich au numéro 1.4.4 de l'ouvrage [**2**]. Il y distingue quatre types de points. Soit $\alpha \in k$. L'application d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P(T) & \mapsto & |P(\alpha)| \end{array}$$

définit une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ bornée sur k et donc un point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Nous noterons α ce point. Un tel point est dit **de type 1**. En ce point le corps résiduel complété est simplement

$$\mathscr{H}(\alpha) = k.$$

Soient $\alpha \in k$ et $r > 0$. L'application

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n\,(T-\alpha)^n & \mapsto & \displaystyle\max_{n\in\mathbf{N}}(|c_n|\,r^n) \end{array}$$

définit encore une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ bornée sur k. Seul le caractère multiplicatif n'est pas immédiat. Il provient en fait de l'inégalité ultramétrique. Nous noterons $\eta_{\alpha,r}$ le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ correspondant. Il est

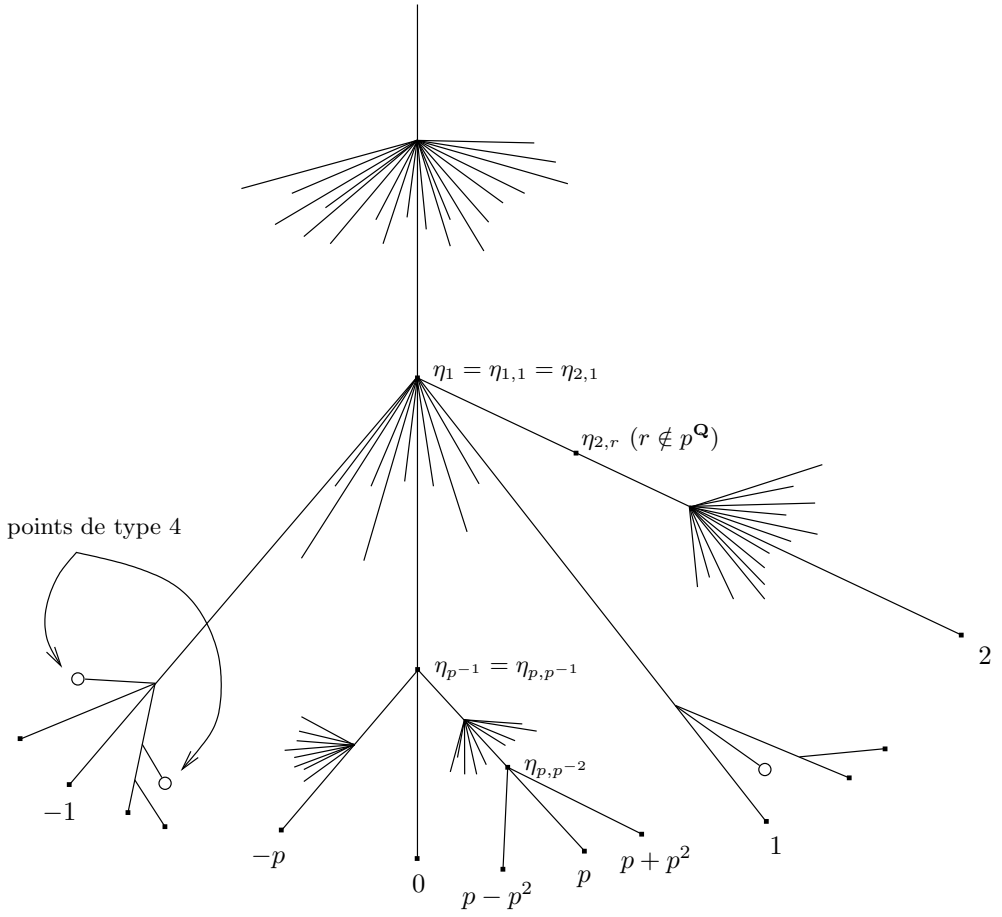

FIGURE 2. Droite analytique sur le corps $\mathbf{C}_p$ muni de la valeur absolue $|.|_p$.

remarquable que, contrairement à ce que notre notation peut laisser croire, le point $\eta_{\alpha,r}$ ne dépend que de

$$\overline{D}(\alpha, r)(k) = \left\{ x \in k \,\middle|\, |x - \alpha| \leq r \right\},$$

l'ensemble des k-points du disque fermé de centre α et de rayon r. En particulier, pour $\beta \in k$, nous avons

$$\eta_{\alpha,r} = \eta_{\beta,r} \text{ si } |\alpha - \beta| \leq r.$$

Les différents points $\eta_{\alpha,r}$ se comportent différemment selon que le nombre réel r appartient ou non au groupe $|k^*|$. Lorsque r appartient à $|k^*|$, le point $\eta_{\alpha,r}$ est dit **de type 2**. Nous avons alors

$$\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{\alpha,r})} \simeq \tilde{k}(T) \text{ et } |\mathscr{H}(\eta_{\alpha,r})^*| = |k^*|.$$

Lorsque r n'appartient pas à $|k^*|$, le point $\eta_{\alpha,r}$ est dit **de type 3**. Nous avons alors

$$\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{\alpha,r})} = \tilde{k} \text{ et le groupe } |\mathscr{H}(\eta_{\alpha,r})^*| \text{ est engendré par } |k^*| \text{ et } r.$$

Lorsque $a = 0$, nous noterons simplement $\eta_r = \eta_{\alpha,r}$.

Il nous reste un type de points à décrire. Soient I un ensemble ordonné, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de k et $\boldsymbol{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels strictement positifs qui vérifient les propriétés suivantes :

i) $\forall i \leq j$, $\overline{D}(\alpha_i, r_i)(k) \subset \overline{D}(\alpha_j, r_j)(k)$;

ii) $\bigcap_{i\in I} \overline{D}(\alpha_i, r_i)(k) = \emptyset$.

De telles familles existent lorsque le corps k n'est pas maximalement complet (*cf.* [**22**], définition 5.2). C'est le cas du corps $\mathbf{C}_p$, pour tout nombre premier p. Remarquons que de telles familles vérifient

$$\inf_{i\in I}(r_i) > 0,$$

sinon le caractère complet du corps k imposerait à l'intersection des disques de contenir un point. L'application

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P(T) & \mapsto & \inf\limits_{i\in I}(|P(\eta_{\alpha_i,r_i})|) \end{array}$$

définit une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ bornée sur k. Nous noterons $\eta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ correspondant. Un tel point est dit **de type 4**. Le corps résiduel complété en ce point est une extension immédiate du corps k : il vérifie

$$\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}})} = \tilde{k} \text{ et } |\mathscr{H}(\eta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}})^*| = |k^*|.$$

Pour terminer, revenons au cas d'un corps k ultramétrique complet quelconque et donc plus nécessairement algébriquement clos. Considérons le morphisme de changement de base

$$\varphi : \mathbf{A}_{\hat{\bar{k}}}^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}.$$

C'est un morphisme surjectif. Nous dirons qu'un point x de la droite analytique $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est de type i, pour $i \in [\![1,4]\!]$, si l'un des ses antécédents par le morphisme φ est de type i (et c'est alors le cas pour tous). En outre, pour tous éléments α de k et r de $\mathbf{R}_+$, nous noterons identiquement les points α, $\eta_{\alpha,r}$ et η_r

de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\hat{\bar{k}}}$ et leur image par le morphisme φ. De nouveau, nous appellerons **point de Gauß** le point η_1.

Soit $P(T)$ un polynôme irréductible de $k[T]$. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, avec $d \in \mathbf{N}^*$, ses racines dans $\bar{k}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ Q(T) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } P \mid Q \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

est une semi-norme multiplicative sur $k[T]$, bornée sur k. Nous noterons $\eta_{P,0}$ le point de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ correspondant. Nous avons

$$\varphi^{-1}(\eta_{P,0}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$$

et

$$\mathscr{H}(\eta_{P,0}) = k[T]/(P(T)).$$

En particulier, le point $\eta_{P,0}$ est un point de type 1 et un point rigide de la droite analytique $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$. Réciproquement, si le corps k est parfait, le théorème de l'élément primitif assure que tout point rigide de cette droite peut s'écrire sous la forme $\eta_{Q,0}$, où Q est un polynôme irréductible à coefficients dans k.

Les points rigides sont des points de type 1 de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$, mais la réciproque n'est en général pas valable, même dans le cas des corps parfaits. Considérons, par exemple, le corps $\mathbf{Q}_p$ muni de la valeur absolue p-adique usuelle $|.|_p$. Cette valeur absolue se prolonge de façon unique en une valeur absolue sur $\mathbf{C}_p$, que nous noterons identiquement. Soit α un élément de $\mathbf{C}_p$ qui n'est pas algébrique sur $\mathbf{Q}_p$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_p[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ Q(T) & \mapsto & |Q(\alpha)|_p \end{array}$$

définit un point de type 1 de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{Q}_p}$ qui n'est pas un point rigide. En effet, le corps résiduel complété en ce point n'est autre que le corps $\mathbf{Q}_p(\alpha)$, une extension transcendante de $\mathbf{Q}_p$.

La topologie de la droite analytique sur un corps ultramétrique complet quelconque est, en général, assez compliquée et nous ne la décrirons pas, mais la figure 2 nous semble permettre de se la représenter assez fidèlement. En particulier, les segments que l'on y voit tracés sont homéomorphes à des segments. Il faut cependant être prudents en ce qui concerne les voisinages des points de type 2, autrement dit, les points de branchement. Soient x un tel point et C_x l'ensemble des composantes connexes du complémentaire du point x dans la

droite $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ (cet ensemble est naturellement en bijection avec la droite projective sur le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$). Alors, pour tout voisinage V du point x, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de C_x qui ne soient pas entièrement contenus dans V.

1.1.3. Faisceau structural

Pour parvenir à faire de la géométrie sur les espaces analytiques au sens précédent, nous devons en faire des espaces localement annelés. Nous suivrons la construction développée par V. Berkovich au numéro 1.5 de l'ouvrage [**2**]. Soient $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach et n un entier positif. Nous nous restreindrons à certains types de normes.

Définition 1.1.17. — *On appelle* **semi-norme spectrale** *sur l'anneau de Banach* $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *la semi-norme définie par*

$$\forall f \in \mathscr{A},\ \|f\|_{sp} = \max_{x \in \mathcal{M}(\mathscr{A})} (|f(x)|) = \inf_{k \in \mathbf{N}^*} \left(\left\| f^k \right\|^{\frac{1}{k}} \right).$$

Remarque 1.1.18. — Les deux dernières quantités sont égales en vertu de [**2**], théorème 1.3.1.

Définition 1.1.19. — *On dit que la* **norme** $\|.\|$ *est* **uniforme** *si elle est équivalente à la semi-norme spectrale, c'est-à-dire s'il existe deux constantes* $C_- > 0$ *et* $C_+ > 0$ *telles que*

$$\forall f \in \mathscr{A},\ C_- \|f\|_{sp} \leq \|f\| \leq C_+ \|f\|_{sp}.$$

Dans ce cas, on dit que **l'anneau de Banach** $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *est* **uniforme**.

Dans la suite de ce texte, nous supposerons toujours que la norme $\|.\|$ est uniforme. Cela impose en particulier à la semi-norme spectrale d'être une norme et donc à l'anneau $\mathscr{A}$ d'être réduit. Nous disposons également d'un homéomorphisme

$$\mathcal{M}(\mathscr{A}, \|.\|) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathscr{A}, \|.\|_{sp})$$

induit par l'application identité.

Définissons, à présent, le préfaisceau $\mathscr{K}$ des fractions rationnelles sans pôles sur $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$ de la façon suivante : pour tout ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$, l'anneau $\mathscr{K}(U)$ est le localisé de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ par l'ensemble de ses éléments qui ne s'annulent en aucun point de U. Exprimons cette définition à l'aide de notations mathématiques.

Définition 1.1.20. — *Pour tout ouvert* U *de l'espace* $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$, *posons*

$$S_U = \{P \in \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \,|\, \forall x \in U,\ P(x) \neq 0\}.$$

Nous définissons **le préfaisceau $\mathscr{K}$ des fractions rationnelles sans pôles sur l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$** *comme le foncteur contravariant qui à tout ouvert U de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ associe l'anneau*

$$\mathscr{K}(U) = S_U^{-1}\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n].$$

Nous allons maintenant définir les fonctions analytiques comme les fonctions qui sont localement limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles.

Définition 1.1.21. — *Nous définissons* **le faisceau structural $\mathscr{O}$ sur l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$**, *que nous appellerons encore* **faisceau des fonctions analytiques sur l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$**, *comme le foncteur contravariant qui à tout ouvert U de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ associe l'anneau $\mathscr{O}(U)$ constitué de l'ensemble des applications*

$$f : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathscr{H}(x)$$

telles que, pour tout élément x de U, on ait

$$f(x) \in \mathscr{H}(x)$$

et qui vérifient la condition suivante : pour tout élément x de U, il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une suite $(R_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{K}(V)$ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif j pour lequel on ait

$$\forall i \geq j,\ \forall y \in V,\ |f(y) - R_i(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.1.22. — Cette définition locale assure que $\mathscr{O}$ est bien un faisceau d'anneaux sur $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. On vérifie qu'en tout point x de l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$, le germe $\mathscr{O}_x$ est un anneau local dont l'idéal maximal est l'ensemble des germes de fonctions qui s'annulent au point x.

Définition 1.1.23. — *Soit x un point de l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. Notons $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_x$. On appelle* **corps résiduel** *du point x le corps*

$$\kappa(x) = \mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x.$$

Remarque 1.1.24. — Si l'anneau de Banach considéré est l'anneau $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle, nous retrouvons la notion habituelle de fonction holomorphe. En effet, toutes les fractions rationnelles sans pôles sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ sont holomorphes sur cet ouvert et il est bien connu qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes reste holomorphe.

Réciproquement, toute fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ est localement limite uniforme de polynômes. Il suffit, par exemple, de recouvrir l'ouvert U par des disques ouverts dont l'adhérence est contenue dans U.

Le résultat qui suit justifie le fait que nous ayons choisi de munir l'anneau $\mathscr{A}$ d'une norme uniforme.

Lemme 1.1.25. — *Le morphisme d'anneaux naturel*

$$\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{O}(\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}})$$

est injectif.

Démonstration. — Soit P un élément de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ dont l'image dans $\mathscr{O}(\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}})$ est nulle. Cela signifie qu'en tout point x de l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$, nous avons

$$P(T_1, \ldots, T_n)(x) = 0.$$

Il existe une famille presque nulle $(a_{k_1,\ldots,k_n})_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que l'on ait

$$P(T_1, \ldots, T_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} a_{k_1,\ldots,k_n} T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n} \text{ dans } \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n].$$

Soit b un point de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$. Si le polynôme

$$P_b(T_1, \ldots, T_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} a_{k_1,\ldots,k_n}(b)\, T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n} \text{ de } \mathscr{H}(b)[T_1, \ldots, T_n]$$

n'est pas nul, il existe une extension finie L_b de $\mathscr{H}(b)$ et un élément α_b de L_b^n tel que l'on ait

$$P_b(\alpha_b) \neq 0 \text{ dans } L_b.$$

L'élément α_b de L_b^n définit alors un point (rigide) α'_b de l'espace $\mathscr{H}(b)[T_1, \ldots, T_n]$ en lequel nous avons

$$P(T_1, \ldots, T_n)(\alpha'_b) = P_b(T_1, \ldots, T_n)(\alpha'_b) \neq 0.$$

C'est impossible.

Soit $(k_1, \ldots, k_n)$ un élément de $\mathbf{N}^n$. Nous avons montré que, pour tout point b de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$, nous avons

$$a_{k_1,\ldots,k_n}(b) = 0.$$

On en déduit que

$$\|a_{k_1,\ldots,k_n}\|_{sp} = 0$$

et donc que

$$\|a_{k_1,\ldots,k_n}\| = 0,$$

puisque la semi-norme $\|.\|_{sp}$ et la norme $\|.\|$ sont équivalentes. Par conséquent, nous avons $a_{k_1,\ldots,k_n} = 0$ dans $\mathscr{A}$. On en déduit que le polynôme P est nul. $\square$

Remarque 1.1.26. — L'application identité de $(\mathscr{A}, \|.\|)$ vers $(\mathscr{A}, \|.\|_{sp})$ induit un isomorphisme d'espaces annelés

$$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A},\|.\|} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A},\|.\|_{sp}}.$$

Pour de nombreuses questions, nous pourrons donc supposer que la norme $\|.\|$ *est* la norme spectrale.

Nous disposons, à présent, d'une notion de fonction analytique sur les ouverts de l'espace $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. Nous pouvons en déduire une définition générale d'espace analytique. Nous la donnons ci-dessous dans un souci d'exhaustivité, mais ne l'utiliserons pas. Dans le cas complexe, un espace est dit analytique s'il est localement isomorphe à un fermé analytique d'un ouvert d'un espace affine. La définition suivante s'impose donc naturellement.

Définition 1.1.27 (V. Berkovich). — *On dit qu'un espace localement annelé $(V, \mathscr{O}_V)$ est un* **modèle local d'un espace analytique** *sur $\mathscr{A}$ s'il existe un entier positif n, un ouvert U de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ et un faisceau $\mathscr{I}$ d'idéaux de type fini de $\mathscr{O}_U$ tels que $(V, \mathscr{O}_V)$ soit isomorphe au support du faisceau $\mathscr{O}_U/\mathscr{I}$, muni du faisceau $\mathscr{O}_U/\mathscr{I}$.*

On appelle **espace analytique** *sur $\mathscr{A}$ tout espace localement annelé qui est localement isomorphe à un modèle local d'un espace analytique sur $\mathscr{A}$.*

À titre d'exemple, donnons, sans démonstration, quelques propriétés des anneaux locaux en les points de la droite analytique sur un corps ultramétrique.

Proposition 1.1.28. — *Soit $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet. Notons $X = \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ la droite analytique sur le corps k.*

i) Soit x un point rigide de l'espace X. Alors, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. S'il existe un polynôme P irréductible à coefficients dans k tel que le point x soit le point $\eta_{P,0}$ (c'est toujours le cas si le corps k est parfait), alors l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$ est engendré par P.

ii) Soit x un point de type 1 de l'espace X qui n'est pas un point rigide. Alors, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps.

iii) Soit x un point de type 2, 3 ou 4 de l'espace X. Alors, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps.

Dans la suite de ce texte, nous considérerons souvent les sections d'un faisceau au-dessus d'une partie qui n'est pas ouverte. Voici quelques rappels sur cette notion. Soit Y un espace topologique et $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur Y. À ce faisceau est associé un espace étalé $(\tilde{\mathscr{F}}, p)$, où $\tilde{\mathscr{F}}$ est un espace topologique et

$p : \tilde{\mathscr{F}} \to Y$ un homéomorphisme local. Pour tout partie V de Y, notons $\tilde{\mathscr{F}}(V)$ l'ensemble des sections continues de l'application p au-dessus de V. Pour toute partie *ouverte* U de Y, il existe alors une bijection canonique

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathscr{F}}(U).$$

Pour des précisions sur cette construction, on se reportera à [**13**], II, 1.2.

Définition 1.1.29. — *Pour toute partie V de Y, on pose*

$$\mathscr{F}(V) = \tilde{\mathscr{F}}(V).$$

Sous certaines conditions, il est possible de décrire l'ensemble $\mathscr{F}(V)$ directement en termes des ensembles de sections du faisceau $\mathscr{F}$ sur les ouverts de l'espace Y. Citons, à ce propos, le corollaire 1 au théorème 3.3.1 du chapitre II de l'ouvrage [**13**].

Théorème 1.1.30. — *Soient V une partie de Y qui possède un système fondamental de voisinages paracompacts. Alors l'application canonique*

$$\varinjlim \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V),$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des voisinages ouverts U de V dans Y, est bijective.

Nous n'utiliserons l'ensemble $\mathscr{F}(V)$ que dans les cas où les hypothèses du théorème sont satisfaites. C'est en particulier le cas lorsque

1. la partie V est fermée et l'espace Y paracompact (par exemple, si Y est une partie fermée d'un espace affine analytique au-dessus d'un anneau de Banach, d'après le théorème 1.1.13) ;
2. la partie V est quelconque et l'espace Y est métrisable (par exemple, si Y est une partie d'un espace affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres, comme nous le verrons au théorème 3.5.1).

Signalons que cette notation peut malheureusement prêter à confusion lorsque l'on considère un espace analytique au-dessus d'un corps ultramétrique complet. Soient $(k, |.|)$ un tel corps et n un entier positif. Notons $\overline{D}$ le disque unité fermé centré en 0 de l'espace $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$. L'algèbre $\mathscr{O}(\overline{D})$ n'est alors pas l'algèbre de Tate, formée des séries qui convergent sur $\overline{D}$, mais l'algèbre de Washnitzer, constituée des séries qui convergent au voisinage de $\overline{D}$ (*cf.* [**15**], 1.2).

Ajoutons quelques mots au sujet de la restriction des faisceaux.

Définition 1.1.31. — *Pour toute partie V de Y, on définit un faisceau d'ensembles $\mathscr{F}_{|V}$ sur V comme le foncteur contravariant qui à tout ouvert U de V associe l'ensemble $\mathscr{F}(U)$.*

Ces restrictions jouissent de bonnes propriétés, comme le montre le lemme qui suit.

Lemme 1.1.32. — *Soient V et W deux parties de l'espace Y. Pour toute partie U de $V \cap W$, nous avons une bijection*

$$\mathscr{F}_{|V}(U) \simeq \mathscr{F}_{|W}(U).$$

En particulier, pour tout point x de $V \cap W$, nous avons une bijection entre les germes

$$\left(\mathscr{F}_{|V}\right)_x \simeq \left(\mathscr{F}_{|W}\right)_x.$$

Pour finir, signalons que les constructions et résultats qui précèdent restent évidemment valables *mutatis mutandis* pour les faisceaux à valeurs dans n'importe quelle catégorie.

1.2. Parties compactes spectralement convexes

Soient $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach uniforme et n un entier positif. Introduisons deux nouvelles définitions. Rappelons (*cf.* définition 1.1.20) que, pour toute partie V de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$, nous définissons l'anneau $\mathscr{K}(V)$ comme le localisé de l'anneau $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ par la partie multiplicative formée des éléments qui ne s'annulent pas au voisinage de V.

Définition 1.2.1. — *Soit V une partie compacte de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. Nous notons $\mathscr{B}(V)$ le complété de l'anneau $\mathscr{K}(V)$ pour la norme uniforme $\|.\|_V$ sur V.*

Remarque 1.2.2. — Quel que soient $P \in \mathscr{K}(V)$ et $k \in \mathbf{N}$, nous avons l'égalité

$$\|P^k\|_V = \|P\|_V^k$$

et cette propriété s'étend à $\mathscr{B}(V)$. On en déduit que la norme $\|.\|_V$ sur $\mathscr{B}(V)$ est la norme spectrale. En particulier, le couple $(\mathscr{B}(V), \|.\|_V)$ est un anneau de Banach uniforme.

Soit V une partie compacte de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. Le morphisme naturel

$$f : \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{B}(V)$$

est borné sur $\mathscr{A}$. Il induit donc un morphisme entre espaces localement annelés

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}.$$

Nous allons chercher ici à décrire l'image de ce morphisme et, plus généralement, à comprendre ses propriétés.

Commençons par une propriété topologique simple.

Lemme 1.2.3. — *Le morphisme φ réalise un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. — Puisque l'espace $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$ est compact, il suffit de montrer que le morphisme φ est injectif. Soient x et y deux points distincts de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$. Notons $|.|_x$ et $|.|_y$ les semi-normes multiplicatives bornées sur $\mathscr{B}(V)$ associées. Par hypothèse, il existe un élément P de $\mathscr{B}(V)$ tel que

$$|P|_x \neq |P|_y.$$

La densité de $\mathscr{K}(V)$ dans $\mathscr{B}(V)$ nous permet d'en déduire qu'il existe $Q \in \mathscr{K}(V)$ tel que

$$|Q|_x \neq |Q|_y.$$

En écrivant Q comme élément du localisé de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$, on montre alors qu'il existe un polynôme $P \in \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ tel que

$$|f(P)|_x \neq |f(P)|_y.$$

Par conséquent, les points $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ sont distincts. □

En fait, nous disposons même d'un isomorphisme d'espaces annelés si l'on s'autorise à restreindre le morphisme à la source et au but.

Lemme 1.2.4. — *Notons U l'intérieur de l'image de φ dans $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$. Le morphisme*

$$\psi : \varphi^{-1}(U) \to U$$

induit par φ est un isomorphisme d'espaces annelés.

Démonstration. — Soit $x \in \varphi^{-1}(U)$. Notons $y = \psi(x) = \varphi(x)$. Il nous suffit de montrer que le morphisme induit

$$\psi_x^* : \mathscr{O}_{U,y} \to \mathscr{O}_{\varphi^{-1}(U),x}$$

est un isomorphisme. L'injectivité provient directement du fait que φ est un homéomorphisme.

Montrons que ce morphisme est surjectif. Soit $g \in \mathscr{O}_{\varphi^{-1}(U),x}$. Notons $\mathscr{K}'$ le préfaisceau des fractions rationnelles sur $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$. Il existe un voisinage compact W de x dans $\varphi^{-1}(U)$ et une suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{K}'(W)$ qui converge uniformément vers g sur W. Soit $k \in \mathbf{N}$. Par définition de $\mathscr{K}'(W)$, il existe un élément S_k de $\mathscr{K}(\psi(W))$ tel que

$$\|\psi^*_{|W}(S_k) - R_k\|_W \leq \frac{1}{2^k}.$$

La suite $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy uniforme sur $\psi(W)$, elle converge vers un élément de $\mathscr{B}(\psi(W))$. Son image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{U,y}$ est envoyée sur g par ψ_x^*. □

Remarque 1.2.5. — Le résultat est, en général, faux si l'on ne restreint pas le morphisme. Supposons que le compact V soit réduit à un point x. Par définition, nous avons alors $\mathscr{B}(V) = \mathscr{H}(x)$. L'homéomorphisme induit par φ est donc

$$\mathcal{M}(\mathscr{H}(x)) \xrightarrow{\sim} \{x\}$$

et le morphisme induit entre les anneaux locaux est

$$\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{H}(x).$$

Ce n'est pas, en général, un isomorphisme.

Démontrons, à présent, un premier résultat sur l'image de φ.

Lemme 1.2.6. — *L'image du morphisme φ contient le compact V.*

Démonstration. — Soit x un point de V. Il lui correspond un caractère

$$\chi_x : \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{H}(x).$$

Puisque $x \in V$, un élément P de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ qui ne s'annule pas au voisinage de V ne s'annule pas en x. Son image est donc inversible dans $\mathscr{H}(x)$. Par conséquent, le morphisme χ_x induit, par localisation, un morphisme

$$\mathscr{K}(V) \to \mathscr{H}(x).$$

Puisque x appartient à V, ce morphisme est borné. Il induit donc un morphisme entre les complétés

$$\mathscr{B}(V) \to \mathscr{H}(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 1.2.7. — La réciproque de ce résultat n'est pas vraie en général. Montrons-le sur un exemple. Choisissons pour algèbre de Banach $\mathscr{A}$ un corps algébriquement clos k que nous munissons de la valeur absolue triviale $|.|_0$. Notons D le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 de $X = \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$:

$$D = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \left\{ x \in X \,\middle|\, |T_i(x)| \leq 1 \right\}.$$

Considérons la partie compacte V de X définie par

$$V = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \left\{ x \in D \,\middle|\, |T_i(x)| = 1 \right\}.$$

Supposons que $n \geq 2$. Tout polynôme non constant P de $k[T_1, \ldots, T_n]$ s'annule alors sur V, puisqu'il s'annule en un point non nul de k^n. Par conséquent, nous avons

$$\mathscr{K}(V) = k[T_1, \ldots, T_n].$$

La norme uniforme sur la partie V n'est autre que la norme triviale. On en déduit que $\mathscr{B}(V)$ est l'algèbre $k[T_1, \ldots, T_n]$ munie de la norme triviale, autrement dit l'algèbre $k\{T_1, \ldots, T_n\}$ munie de la norme de Gauß. Par conséquent, l'image de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$ dans X est le disque D tout entier.

Dans certains cas, nous pouvons cependant affirmer que l'image du morphisme φ coïncide avec la partie compacte V.

Définition 1.2.8. — *On dit que la partie compacte V de l'espace affine $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est* **rationnelle** *s'il existe $p \in \mathbf{N}$, des polynômes $P_1, \ldots, P_p, Q$ de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ ne s'annulant pas simultanément sur V et des nombres réels $r_1, \ldots, r_p > 0$ tels que*

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \left\{ x \in X \,\middle|\, |P_i(x)| \leq r_i \, |Q(x)| \right\}.$$

Une partie compacte V de l'espace affine $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est dite **pro-rationnelle** *si elle est intersection de parties compactes rationnelles.*

Remarque 1.2.9. — Soient $p \in \mathbf{N}$, $P_1, \ldots, P_p$ des éléments de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ et $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$ des nombres réels positifs. Alors la partie de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ définie par

$$\bigcap_{1 \leq i \leq p} \left\{ x \in X \,\middle|\, s_i \leq |P_i(x)| \leq t_i \right\}$$

est une partie compacte rationnelle de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$, dès qu'elle est compacte. Rappelons que nous avons donné des exemples de parties compactes à la proposition 1.1.11 et au corollaire 1.1.12. On en déduit aisément que tout point de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ possède un système fondamental de voisinages constitué de parties compactes rationnelles.

Lemme 1.2.10. — *Si le compact V est pro-rationnel, alors l'image du morphisme φ est contenue dans V.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un ensemble J et une famille $(V_j)_{j \in J}$ de parties compactes rationnelles telles que

$$V = \bigcap_{j \in J} V_j.$$

Soit $j \in J$. Il existe un entier $p \in \mathbf{N}$, des polynômes $P_1, \ldots, P_p, Q$ de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ ne s'annulant pas simultanément sur V et des nombres réels $r_1, \ldots, r_p > 0$ tels que

$$V_j = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \left\{ x \in X \,\middle|\, |P_i(x)| \leq r_i \, |Q(x)| \right\}.$$

Soit x un point de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$. Il est associé à une semi-norme multiplicative $|.|_x$ bornée sur $\mathscr{B}(V)$. Rappelons que nous notons f le morphisme naturel de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ dans $\mathscr{B}(V)$. Le point $y = \varphi(x)$ est alors associé à la semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ définie par $|f(.)|_x$. Par hypothèse, le polynôme Q ne s'annule pas sur V_j et donc sur V. On en déduit que l'élément $f(Q)$ est inversible dans $\mathscr{B}(V)$. Par conséquent, nous avons $|f(Q)|_x \neq 0$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

Nous avons
$$\frac{|f(P_i)|_x}{|f(Q)|_x} = \left|\frac{f(P_i)}{f(Q)}\right|_x \leq \left\|\frac{f(P_i)}{f(Q)}\right\|_V .$$
Or, par définition de V_j, quel que soit $z \in V$, nous avons $|P_i(z)| \leq r_i\,|Q(z)|$. On en déduit que
$$\left\|\frac{f(P_i)}{f(Q)}\right\|_V = \sup_{z\in V}\left(\frac{|P_i(z)|}{|Q(z)|}\right) \leq \sup_{z\in V_j}\left(\frac{|P_i(z)|}{|Q(z)|}\right) \leq r_i.$$
Par conséquent, nous avons
$$|f(P_i)|_x \leq r_i\,|f(Q)|_x.$$
Cette inégalité étant vérifiée quel que soit $i \in [\![1,p]\!]$, la semi-norme multiplicative $|f(.)|_x$ correspond bien à un élément de V_j.

Finalement, nous avons montré que
$$y \in \bigcap_{j\in J} V_j = V.$$
L'image du morphisme φ est donc contenue dans V. □

Regroupons dans un même énoncé les résultats que nous avons démontrés dans le cas des parties compactes pro-rationnelles.

Théorème 1.2.11. — *Si le compact V est pro-rationnel, alors le morphisme*
$$\varphi : \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$
induit par le morphisme naturel
$$\mathscr{A}[T_1,\ldots,T_n] \to \mathscr{B}(V)$$
réalise un homéomorphisme de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$ sur son image, qui est égale à V. En outre, le morphisme
$$\varphi^{-1}\big(\mathring{V}\big) \to \mathring{V}$$
induit par φ est un isomorphisme d'espace annelés.

Afin d'y faire référence par la suite, nous donnons un nom aux parties compactes qui possèdent des propriétés analogues à celles des parties compactes pro-rationnelles.

Définition 1.2.12. — *On dit que la partie compacte V de l'espace analytique $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est* **spectralement convexe** *si le morphisme naturel*
$$\varphi : \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$
induit un homéomorphisme entre $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$ et V et si le morphisme induit
$$\varphi^{-1}\big(\mathring{V}\big) \to \mathring{V}$$

est un isomorphisme d'espace annelés.

Remarque 1.2.13. — D'après les lemmes 1.2.3, 1.2.4 et 1.2.6, une partie compacte V est spectralement convexe si, et seulement si, l'image du morphisme φ est contenue dans V.

À partir d'une partie compacte spectralement convexe donnée, il est facile d'en construire d'autres, ainsi que le montrent les résultats qui suivent. Introduisons des notations supplémentaires. Soit $m \in \mathbf{N}$. Le morphisme

$$\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{B}(V)$$

induit un morphisme

$$\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m] \to \mathscr{B}(V)[S_1, \ldots, S_m]$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \arrow[d, "\pi''"'] \\ \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \end{tikzcd}.$$

Nous noterons $\mathscr{K}'$ et $\mathscr{B}'$ (respectivement $\mathscr{K}''$ et $\mathscr{B}''$) le préfaisceau des fractions rationnelles sur $\mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)}$ (respectivement $\mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$) et celui que l'on obtient en complétant les anneaux de sections pour la norme uniforme.

Lemme 1.2.14. — *Soit $r \in \mathbf{R}_+$. Notons D'' la partie compacte de $\mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ définie par*

$$D'' = \left\{ x \in \pi''^{-1}(V) \,\middle|\, \forall j \in [\![1, m]\!],\ |S_j(x)| \leq r \right\}.$$

Si le compact V est spectralement convexe, alors le compact D'' l'est également.

Démonstration. — Supposons que le compact V est spectralement convexe. D'après la remarque 1.2.13, il suffit de montrer que l'image Z du morphisme naturel

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}''(D'')) \to \mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$

est contenue dans D''. Remarquons, tout d'abord, que, pour tout élément j de $[\![1, m]\!]$, nous avons $\|S_j\|_{D''} \leq r$. On en déduit que

$$Z \subset \left\{ x \in \mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \,\middle|\, \forall j \in [\![1, m]\!],\ |S_j(x)| \leq r \right\}.$$

Considérons, maintenant, le morphisme

$$\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m].$$

Pour tout élément P de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n$ et tout élément x de $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n+m,\mathrm{an}}$, nous avons l'égalité $|P(x)| = |P(\pi''(x))|$. On en déduit que le morphisme précédent induit un morphisme

$$\mathscr{K}(V) \to \mathscr{K}''(W),$$

puis un morphisme borné

$$\mathscr{B}(V) \to \mathscr{B}''(W).$$

Nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathscr{B}''(W)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n+m,\mathrm{an}} \arrow[d, "\pi''"] \\ \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}} \end{tikzcd} .$$

Puisque le compact V est spectralement convexe, l'image du morphisme φ est contenue dans V. On en déduit que l'image Z de $\mathcal{M}(\mathscr{B}''(W))$ est contenue dans $\pi''^{-1}(V)$ et, finalement, dans D''. □

Proposition 1.2.15. — *Si le compact V est spectralement convexe, alors le morphisme*

$$\psi : \mathbf{A}_{\mathscr{B}(V)}^{m,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n+m,\mathrm{an}}$$

induit un homéomorphime sur son image, qui est égale à $\pi''^{-1}(V)$. En outre, le morphisme induit au-dessus de $\mathring{V}$ est un isomorphisme d'espaces annelés.

Démonstration. — Supposons que le compact V est spectralement convexe. Soit $r > 0$. Posons

$$D' = \left\{ x \in \mathbf{A}_{\mathscr{B}(V)}^{m,\mathrm{an}} \,\middle|\, \forall j \in [\![1, s]\!],\ |S_j(x)| \leq r \right\}$$

et

$$D'' = \left\{ x \in \pi''^{-1}(V) \,\middle|\, \forall j \in [\![1, s]\!],\ |S_j(x)| \leq r \right\}.$$

Puisque V est spectralement convexe, le morphisme $D' \to D''$ induit par ψ est bijectif. En particulier, un élément P de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$ s'annule sur D' si, et seulement si, il s'annule sur D'' et satisfait l'égalité $\|P\|_{D'} = \|P\|_{D''}$. On déduit de ces propriétés que le morphisme naturel

$$\mathscr{B}''(D'') \to \mathscr{B}'(D')$$

est un isomorphisme.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathscr{B}'(D')) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{M}(\mathscr{B}''(D'')) \arrow[d, "\beta"'] \\ \mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)} \arrow[r, "\psi"] & \mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \end{tikzcd} .$$

Puisque D' est un compact rationnel, le morphisme α induit un homéomorphisme sur son image, qui est égale à D', et un isomorphisme d'espaces annelés sur l'intérieur. D'après le lemme précédent, le compact D'' est spectralement convexe et le morphisme β induit un homéomorphisme sur son image, qui est égale à D'', et un isomorphisme d'espaces annelés sur l'intérieur. On en déduit que le morphisme ψ induit un homéomorphisme entre les espaces D' et D'' et un isomorphisme d'espaces annelés entre leur intérieur.

On obtient finalement le résultat voulu en remarquant que les espaces $\mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)}$ et $\mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ sont obtenus comme réunion des espaces D' et D'' pour $r \in \mathbf{R}_+$.

□

Proposition 1.2.16. — *Supposons que le compact V est spectralement convexe. Soit W une partie compacte et spectralement convexe de $\mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)}$. Alors, la partie compacte $\psi(W)$ de $\mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est encore spectralement convexe.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, le morphisme

$$\psi : \mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)} \to \mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$

induit un homéomorphime sur son image, qui est égale à $\pi''^{-1}(V)$. En raisonnant comme dans la démonstration précédente, on en déduit que le morphisme naturel

$$\mathscr{B}''(\psi(W)) \to \mathscr{B}'(W)$$

est un isomorphisme.

Considérons, à présent, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathscr{B}'(W)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{M}(\mathscr{B}''(\psi(W))) \arrow[d, "\beta"'] \\ \mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)} \arrow[r, "\psi", "\sim"'] & \mathbf{A}^{n+m,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} \end{tikzcd} .$$

Puisque le compact W est spectralement convexe, l'image du morphisme α est égale à W. On en déduit que l'image du morphisme β est contenue dans $\psi(W)$. On conclut alors à l'aide de la remarque 1.2.13. □

Pour finir, nous montrons l'existence de l'enveloppe spectralement convexe d'une partie compacte.

Proposition 1.2.17. — *Notons W l'image du morphisme naturel*

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}.$$

C'est une partie compacte et spectralement convexe de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$.

Démonstration. — D'après les lemmes 1.2.3 et 1.2.6, le morphisme φ réalise un homéomorphisme sur le compact W et ce dernier contient V. Soit f un élément de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ qui ne s'annule pas au voisinage du compact V. Il possède alors un inverse dans $\mathscr{K}(V)$ et donc dans $\mathscr{B}(V)$. On en déduit que, pour tout élément y de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$, nous avons $f(y) \neq 0$. La fonction f est donc minorée par une constante strictement positive sur le compact W. Elle ne s'annule donc pas au voisinage de W. On en déduit que le morphisme

$$\mathscr{K}(W) \to \mathscr{K}(V)$$

induit par l'inclusion $V \subset W$ est un isomorphisme. Puisque le morphisme φ a pour image W, la norme uniforme sur W coïncide avec la norme sur $\mathscr{B}(V)$, qui n'est autre que la norme uniforme sur V. On en déduit que le morphisme naturel

$$\mathscr{B}(W) \to \mathscr{B}(V)$$

est un isomorphisme. Il en est donc de même pour le morphisme

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(W)) \to \mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \xrightarrow{\sim} W.$$

□

1.3. Flot

Nous consacrons cette partie à la démonstration de quelques propriétés des semi-normes multiplicatives. Nous nous intéresserons notamment à l'application qui consiste à élever une semi-norme multiplicative à une certaine puissance.

Commençons par rappeler un résultat classique permettant de démontrer qu'une application est une valeur absolue (*cf.* [**6**], VI, §6, n° 1, proposition 2).

Proposition 1.3.1. — *Soit k un corps. Soit f une application de k dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $(f(x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$;
ii) $\forall x, y \in K,\ f(xy) = f(x)f(y)$;
iii) $\exists A > 0,\ \forall x, y \in K,\ f(x + y) \leq A \max(f(x), f(y))$;
iv) $\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ f(n.1) \leq Cn$.

Alors l'application f est une valeur absolue sur k.

Lemme 1.3.2. — *Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|.|$. Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$|n.1| \leq n^{\lambda}.$$

Alors, quels que soient les éléments x et y de k, on a

$$|x + y| \leq 2^{\lambda} \max\{|x|, |y|\}.$$

Démonstration. — Soient $x, y \in k$. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
|x+y|^r &= |(x+y)^r| \\
&\leq \sum_{i=0}^{r} |C_r^i|\,|x|^i\,|y|^{r-i} \\
&\leq (r+1) \max_{0\leq i\leq r} ((C_r^i)^\lambda\,|x|^i\,|y|^{r-i}) \\
&\leq (r+1) \left(\max_{0\leq i\leq r} \left(C_r^i\,|x|^{i/\lambda}\,|y|^{(r-i)/\lambda} \right) \right)^\lambda \\
&\leq (r+1) \left(\sum_{i=0}^{r} C_r^i\,|x|^{i/\lambda}\,|y|^{(r-i)/\lambda} \right)^\lambda \\
&\leq (r+1) \left(|x|^{1/\lambda} + |y|^{1/\lambda} \right)^{r\lambda} \\
&\leq (r+1) \left(2\,\max(|x|,|y|)^{1/\lambda} \right)^{r\lambda} \\
&\leq (r+1)\,2^{r\lambda}\,\max(|x|,|y|)^r.
\end{aligned}$$

En élevant cette inégalité à la puissance $1/r$ et en faisant tendre r vers l'infini, on obtient le résultat annoncé. □

Soient x un point de $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$ et b son projeté sur $\mathcal{M}(\mathscr{A})$. Le point b est associé à une semi-norme multiplicative $|.|_b$ sur $\mathscr{A}$. Un calcul élémentaire montre que l'ensemble

$$\{\varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \mid \forall f \in \mathscr{A},\ |f|_b^\varepsilon \leq \|f\|\}$$

est un intervalle. Nous le noterons indifféremment I_x ou I_b.

Soit $\varepsilon \in I_b$. Notons $|.|_x$ la semi-norme multiplicative sur $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ associée au point x de $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$. L'application

$$|.|_x^\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{A}[T_1,\ldots,T_n] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P & \mapsto & |P|_x^\varepsilon \end{array}$$

est multiplicative, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1.

Montrons, à présent, que c'est une semi-norme. Considérons le corps résiduel complété $(\mathscr{H}(x), |.|)$ du point x. Quel que soient $f, g \in \mathscr{H}(x)$, nous avons

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq 2\max(|f|,|g|)$$

et donc

$$|f+g|^\varepsilon \leq 2^\varepsilon \max(|f|^\varepsilon, |g|^\varepsilon).$$

En outre, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$|n|^\varepsilon = |n|_x^\varepsilon = |n|_b^\varepsilon \leq \|n\| \leq n.$$

D'après la proposition 1.3.1, l'application $|.|^{\varepsilon}$ est une valeur absolue sur le corps $\mathscr{H}(x)$. On en déduit que l'application $|.|_x^{\varepsilon}$ est une semi-norme multiplicative sur $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$. Elle est bornée sur $\mathscr{A}$, par définition de I_b, et définit donc un point de $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$. Nous le noterons x^{ε}. Remarquons que les corps $\mathscr{H}(x)$ et $\mathscr{H}(x^{\varepsilon})$ sont canoniquement isomorphes. Seule la valeur absolue change.

Nous avons volontairement exclu la valeur 0 de notre définition de I_b. Il est cependant possible de définir également le point x^0, comme nous le montrons ici. Pour cela, il nous faut supposer que l'intervalle I_b a pour borne inférieure 0. L'application

$$|.|_x^0 : \begin{array}{ccc} \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } |P(x)| = 0 \\ 1 & \text{si } |P(x)| \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

est multiplicative, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1. Le même raisonnement que précédemment montre que c'est une semi-norme multiplicative sur $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ qui est bornée sur $\mathscr{A}$. Nous noterons x^0 le point de l'espace $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$ qui lui est associé. Contrairement au cas précédent, les corps $\mathscr{H}(x)$ et $\mathscr{H}(x^0)$ ne sont, en général, pas isomorphes.

Dans la suite de cette partie, nous noterons $X = \mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$.

Définition 1.3.3. — *Définissons une partie de* $X \times \mathbf{R}_+^*$ *par*

$$D = \{(x, \varepsilon),\ x \in X,\ \varepsilon \in I_x\}.$$

On appelle **flot** *l'application*

$$\begin{array}{ccc} D & \to & X \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & x^{\varepsilon} \end{array}.$$

Proposition 1.3.4. — *Le flot est une application continue.*

Démonstration. — Rappelons que la topologie de $X = \mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$ est, par définition, la topologie la plus grossière qui rend continues les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |P(x)| \end{array},$$

avec $P \in A[T_1, \ldots, T_n]$. Pour montrer que le flot est continu, il suffit donc de montrer que, quel que soit $P \in A[T_1, \ldots, T_n]$, l'application composée

$$\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbf{R}_+ \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & |P(x^{\varepsilon})| = |P(x)|^{\varepsilon} \end{array}$$

est continue. Cette propriété est bien vérifiée car l'application précédente est obtenue en composant deux applications continues : l'application d'évaluation de P et l'élévation à la puissance ε. $\square$

Le flot peut parfois se prolonger à une partie de $X \times \mathbf{R}_+$, mais il n'est alors, en général, plus continu. Nous disposons cependant du résultat, plus faible, suivant.

Lemme 1.3.5. — *Soit x un point de X tel que l'intervalle I_x ait pour borne inférieure* 0. *Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} I_x \cup \{0\} & \to & X \\ \varepsilon & \mapsto & x^\varepsilon \end{array}$$

est continue.

Démonstration. — Par définition de la topologie de X, il suffit de montrer que, quel que soit $P \in \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$, l'application

$$\begin{array}{ccc} I_x \cup \{0\} & \to & \mathbf{R}_+ \\ \varepsilon & \mapsto & |P(x^\varepsilon)| = |P(x)|^\varepsilon \end{array}$$

est continue. Ce résultat est immédiat. □

En pratique, il est plus facile d'utiliser le flot en se restreignant à certaines parties de l'espace X. Introduisons des notations adaptées. Soit Y une partie ouverte de X. Posons

$$D_Y = \{(z, \lambda) \in D \,|\, z \in Y,\, z^\lambda \in Y\}.$$

Soit x un point de Y. Nous notons

$$I_Y(x) = \{\varepsilon \in I_x \,|\, x^\varepsilon \in Y\}\,,$$

$$T_Y(x) = \{x^\varepsilon,\, \varepsilon \in I_Y(x)\}$$

et

$$D_Y(x) = \{(z, \lambda),\, z \in T_Y(x),\, \lambda \in I_Y(z)\}\,.$$

Définition 1.3.6. — *On dit que le point x de Y a des* **voisinages flottants** *dans Y si le flot est une application ouverte en chaque point de $D_Y(x)$.*

Remarque 1.3.7. — a) Cette définition ne dépend que de la partie $T_Y(x)$ et pas du point x lui-même.

b) Pour tout point p de D_Y, il est équivalent de demander que le flot soit ouvert au point p ou que sa restriction à D_Y soit ouverte au point p.

Lorsque le flot est défini sur une partie suffisamment grande, par exemple lorsque la partie D_Y est un voisinage de $D_Y(x)$ dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$, tous les points ont des voisinages flottants. Le lemme qui suit précise cet énoncé. Nous n'avons donc introduit cette notion que pour prendre en compte les effets de bord qui peuvent apparaître.

Lemme 1.3.8. — *Supposons que, quel que soit $(z, \lambda) \in D_Y(x)$, il existe un voisinage U de z dans Y tel que*

$$U \times \{\lambda\} \subset D_Y.$$

Alors, le point x a des voisinages flottants dans Y.

Démonstration. — Soit $(z, \lambda) \in D_Y(x)$. Puisque $D_Y(z) = D_Y(x)$, nous pouvons supposer que $z = x$. Soit U un voisinage du point x dans Y. Quitte à restreindre U, nous pouvons supposer qu'il est de la forme

$$U = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{ z \in Y \,\middle|\, \alpha_i < |f_i(z)| < \beta_i \right\},$$

avec $r \in \mathbf{N}$, $f_1, \ldots, f_r \in \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbf{R}_+$.

L'élément $(x^\lambda, 1/\lambda)$ appartient à $D_Y(x)$. Par conséquent, il existe un voisinage V de x^λ dans Y tel que

$$V \times \{\varepsilon\} \subset D_Y.$$

Considérons la partie W de Y définie par

$$U = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{ z \in Y \,\middle|\, \alpha_i^\varepsilon < |f_i(z)| < \beta_i^\varepsilon \right\}.$$

C'est une partie ouverte de Y qui contient le point x^λ. Par conséquent, la partie $V \cap W$ de Y est un voisinage du point x^λ dans Y. Or, quel que soit $y \in V \cap W$, il existe $z \in U$ tel que $y = z^\lambda$. On en déduit que le flot est une application ouverte au point (x, λ). □

Intéressons-nous, à présent, aux propriétés du flot. Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, il suffit de connaître les fonctions au voisinage d'un point x pour les connaître au voisinage de toute la trajectoire $T_Y(x)$.

Lemme 1.3.9. — *Supposons que le point x de Y a des voisinages flottants dans Y. Soit U un voisinage ouvert de x dans Y. Soit $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathscr{H}(U)$ qui converge uniformément sur U. Notons $f \in \mathscr{O}(U)$ sa limite. Supposons que la fonction f soit nulle au voisinage du point x. Alors la fonction f est nulle au voisinage de $T_Y(x) \cap U$.*

Démonstration. — Il existe un voisinage U' de x dans U tel que, quel que soit $z \in U'$, nous ayons

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(z) = 0 \text{ dans } \mathscr{H}(z),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} |R_n(z)| = 0.$$

Soit $y \in T_Y(x) \cap U$. Il existe $\varepsilon \in I_Y(x)$ tel que $y = x^\varepsilon$. Soit J un voisinage de ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Alors la partie $V = D_Y \cap (U' \times J)$ est un voisinage de (x, ε) dans D_Y. Puisque le flot est ouvert au voisinage de (x, ε), la partie

$$\left\{ z^\lambda,\ (z, \lambda) \in V \right\}$$

est un voisinage de y dans Y. Soit $(z, \lambda) \in V$. Nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} |R_n(z^\lambda)| = \lim_{n \to +\infty} |R_n(z)|^\lambda = 0.$$

Par conséquent, $f(z^\lambda) = 0$ et la fonction f est nulle au voisinage de y dans Y. □

Proposition 1.3.10. — *Supposons que le point x de Y a des voisinages flottants dans Y et que l'ensemble $I_Y(x)$ est un intervalle. Alors le morphisme de restriction*

$$\mathscr{O}_Y(T_Y(x)) \to \mathscr{O}_{Y,x}$$

est un isomorphisme.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de y dans Y. Alors la fonction f possède un et un seul prolongement au voisinage de $T_Y(x)$, que nous noterons encore f. Nous avons alors

$$\forall \varepsilon \in I_Y(x),\ |f(x^\varepsilon)| = |f(x)|^\varepsilon.$$

En outre, si l'intervalle $I_Y(x)$ a pour borne inférieure 0, si le point x^0 appartient à Y et si la fonction f est également définie au point x^0, alors nous avons

$$|f(x^0)| = |f(x)|^0.$$

Démonstration. — Commençons par montrer l'injectivité du morphisme. Soit $f \in \mathscr{O}_Y(T_Y(x))$ telle que f soit nulle au voisinage de x. Notons V l'ensemble des points de $T_Y(x)$ au voisinage desquels la fonction f est nulle. Il est clair que V est une partie ouverte de $T_Y(x)$. Par hypothèse, elle n'est pas vide. Montrons, à présent, que V est une partie fermée de $T_Y(x)$. Soit y un point de $T_Y(x)$ adhérent à V. Il existe un voisinage U de y dans Y et une suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathscr{K}(U)$ qui converge uniformément vers f sur U. Puisque y est adhérent à V, il existe un point z appartenant à $V \cap U$, c'est-à-dire un point de $T_Y(x) \cap U$ au voisinage duquel la fonction f est nulle. D'après le lemme 1.3.9, la fonction f est nulle au voisinage de $T_Y(z) \cap U$ et, en particulier, au voisinage de y. On en déduit que la partie V est fermée. Puisque $I_Y(x)$ est un intervalle, l'image $T_Y(x)$ de $\{x\} \times I_Y(x)$ par le flot est connexe. On en déduit que $V = T_Y(x)$ et donc que la fonction f est nulle au voisinage de $T_Y(x)$.

Montrons, à présent, que le morphisme est surjectif. Soit $f \in \mathscr{O}_{Y,x}$. Il existe un voisinage U de x dans Y et une suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{K}(U)$ qui converge uniformément vers f sur U. Soit $\varepsilon \in I_Y(x)$. Nous allons construire une fonction g_y au voisinage de $y = x^\varepsilon$. Soit J un voisinage compact de ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Alors la partie $V = D_Y \cap (U \times J)$ est un voisinage de (x, ε) dans D_Y. Puisque le flot est ouvert au voisinage du point (x, ε), la partie

$$\left\{z^\lambda,\ (z,\lambda) \in V\right\}$$

est un voisinage V_y de y dans Y. Soit $(z, \lambda) \in V$. Posons

$$g_y(z^\lambda) = f(z) \text{ dans } \mathscr{H}(z^\lambda).$$

Quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons encore $R_n \in \mathscr{K}(V_y)$. Montrons que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g_y sur V_y. Soit $\eta \in]0, 1]$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quels que soient $n \geq N$ et $z \in U$, on ait

$$|R_n(z) - f(z)| \leq \eta.$$

Soient $z \in U'$, $\lambda \in J$ et $n \geq N$. Nous avons alors

$$|R_n(z^\lambda) - g_y(z^\lambda)| = |R_n(z) - f(z)|^\lambda \leq \eta^\lambda \leq \eta^\alpha,$$

où $\alpha > 0$ désigne la borne inférieure de J. Par conséquent, la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{K}(V_y)$ converge uniformément vers g_y sur V_y.

Quel que soient $y_1, y_2 \in T_Y(x)$ et $z \in V_{y_1} \cap V_{y_2}$, nous avons

$$g_{y_1}(z) = \lim_{n\to+\infty} R_n(z) = g_{y_2}(z) \text{ dans } \mathscr{H}(z).$$

De même, quel que soient $y \in T_Y(x)$ et $z \in U \cap V_y$, nous avons

$$f(z) = \lim_{n\to+\infty} R_n(z) = g_{y_2}(z) \text{ dans } \mathscr{H}(z).$$

Toutes les fonctions que nous avons construites coïncident donc sur les domaines de définition communs. Par conséquent, la fonction f se prolonge bien au voisinage de $T_Y(x)$.

Les résultats sur la valeur absolue des fonctions proviennent directement de la construction du prolongement de f à $T_Y(x)$. Le résultat pour x^0 s'obtient, quant à lui, en utilisant le lemme 1.3.5 et la continuité de f.

□

Nous aurons parfois besoin de montrer qu'une fonction définie au voisinage du point x se prolonge sur un voisinage connexe de sa trajectoire $T_Y(x)$. Sous certaines hypothèses, le lemme suivant nous permet d'établir un tel résultat.

Lemme 1.3.11. — *Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes (respectivement connexes par arcs) dans Y. Supposons également que la partie D_Y est un voisinage de $D_Y(x)$ dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$. Alors, tout point de $T_Y(x)$ possède un système fondamental de voisinages connexes (respectivement connexes par arcs) dans Y.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la seconde hypothèse impose au point x d'avoir des voisinages flottants dans Y, en vertu du lemme 1.3.8.

Soient y un point de $T_Y(x)$ et V un voisinage de y dans Y. Il existe $\varepsilon \in I_Y(x)$ tel que $x^\varepsilon = y$. Notons W l'image réciproque de V par le flot. C'est un voisinage du point (x, ε) de $D_Y(x)$ dans D_Y. Il existe donc un voisinage U de x dans Y et un intervalle ouvert J contenant ε tels que la partie $U \times J$ soit contenue dans W. Les hypothèses nous permettent de supposer que la partie U est connexe (respectivement connexe par arcs). Dans ce cas, la partie $U \times J$ est encore connexe (respectivement connexe par arcs) et il en est de même pour son image par le flot. Puisque le point x possède des voisinages flottants dans Y, cette image est un voisinage du point Y dans V. □

CHAPITRE 2

ALGÈBRES DE SÉRIES CONVERGENTES

Nous consacrons ce chapitre à l'étude de certains anneaux de séries convergentes à coefficients dans un anneau de Banach. Au numéro 2.1, nous nous intéressons à des algèbres globales, dans la lignée des algèbres de Tate. Nous étudions leur spectre analytique et comparons leur norme en tant qu'algèbre de séries à la semi-norme uniforme sur leur spectre.

Au numéro 2.2, nous étudions certaines limites inductives d'algèbres globales de disques, en un sens que nous précisons. Ce sont des anneaux locaux dont nous montrons qu'il satisfont des théorèmes de division et de préparation de Weierstraß, à l'instar des anneaux locaux des espaces analytiques complexes. Nous en déduisons plusieurs propriétés, telles la noethérianité ou la régularité. Le numéro suivant est consacré à l'étude de limites inductives d'algèbres globales de couronnes. Nous démontrons, de nouveau, quelques propriétés algébriques de ces anneaux, mais, cette fois-ci, de façon directe, sans avoir recours aux théorèmes de Weierstraß.

Nous entreprenons ensuite, au numéro 2.4, une brève étude de la topologie des espaces affines analytiques au voisinage de certains points. Nous en déduisons une description explicite de certains anneaux locaux en termes d'algèbres de séries convergentes.

Pour finir, le numéro 2.5 est consacré à l'hensélianité des anneaux locaux des espaces analytiques. Nous expliquons comment cette propriété peut être utilisée pour démontrer l'existence d'isomorphismes locaux entre espaces analytiques.

Dans tout ce chapitre, nous fixons un anneau de Banach uniforme $(\mathscr{A}, \|.\|)$ et un entier positif n. Nous noterons

$$B = \mathcal{M}(\mathscr{A}, \|.\|) \text{ et } X = \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{(\mathscr{A},\|.\|)}.$$

Les faisceaux structuraux sur ces espaces seront respectivement notés $\mathscr{O}_B$ et $\mathscr{O}_X$.

Nous noterons encore

$$\pi : X \to B$$

le morphisme de projection induit par le morphisme naturel $\mathscr{A} \to \mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$. Pour toute partie V de B, nous posons

$$X_V = \pi^{-1}(V)$$

et, pour tout point b de B,

$$X_b = \pi^{-1}(b).$$

2.1. Algèbres globales de disques et de couronnes

Nous commençons par introduire quelques notations. Pour des éléments $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ de $\mathbf{Z}^n$ et $\boldsymbol{s} = (t_1, \ldots, t_n)$ de $(\mathbf{R}_+^*)^n$, posons

$$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}} = \prod_{i=1}^{n} s_i^{k_i}.$$

Définissons encore

$$\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_n)$$

et, quel que soit $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$,

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} = \prod_{i=1}^{n} T_i^{k_i}.$$

Soit $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Nous noterons

$$\mathscr{A}\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$$

l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ désigne une famille de $\mathscr{A}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{la famille } \Big(\|a_{\boldsymbol{k}}\|\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}\Big)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} \text{ est sommable.}$$

Cette algèbre est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \right\|_{\boldsymbol{t}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} \|a_{\boldsymbol{k}}\|\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}.$$

Comme nous l'expliquerons plus loin, elle est liée à l'algèbre des fonctions sur le disque de rayon $\boldsymbol{t}$:

$$\overline{D}(\boldsymbol{t}) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ |T_i(x)| \leq t_i \right\}.$$

Définissons, à présent, deux relations, $\leq$ et $<$, sur $\mathbf{R}^n$ de la façon suivante : pour deux éléments $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ de $\mathbf{R}^n$, nous posons

$$\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t} \text{ si } \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i \leq t_i$$

et

$$\boldsymbol{s} < \boldsymbol{t} \text{ si } \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i < t_i.$$

Définissons également une relation $\prec$ sur $\mathbf{R}_+^n$: pour deux éléments $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ de $\mathbf{R}_+^n$, nous posons

$$\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t} \text{ si } \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i < t_i \text{ ou } s_i = 0.$$

Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ dans $(\mathbf{R}_+^*)^n$ vérifiant $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$. Nous allons définir, sur le modèle précédent, une algèbre associée à la couronne de rayon intérieur $\boldsymbol{s}$ et de rayon extérieur $\boldsymbol{t}$:

$$\overline{C}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \{x \in X \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Pour $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, nous posons

$$\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) = \prod_{i=1}^{n} \max(s_i^{k_i}, t_i^{k_i}) \in]0, +\infty[.$$

Cette notation a été choisie pour son caractère naturel. Elle peut malheureusement prêter à confusion : attention à ne pas confondre la quantité précédente avec

$$\max(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) = \max\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{k_i}, \prod_{i=1}^{n} t_i^{k_i}\right).$$

Nous définissons l'algèbre

$$\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$$

comme l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n}$ désigne une famille de $\mathscr{A}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{la famille } \Big(\|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \text{ est sommable.}$$

Cette algèbre est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \right\|_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}).$$

Afin de pouvoir traiter simultanément les deux types d'algèbres présentés ci-dessus, ainsi que celui associé aux produits de disques et de couronnes, nous introduisons de nouvelles notations. Pour $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{R}_+^n$ vérifiant la condition

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (k_i < 0 \implies s_i > 0),$$

nous posons

$$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}} = \prod_{i=1}^{n} s_i^{k_i}.$$

Pour $k < 0$, nous posons $0^k = +\infty$. Pour $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{R}_+^n$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous posons

$$\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) = \prod_{i=1}^{n} \max(s_i^{k_i}, t_i^{k_i}) \in]0, +\infty].$$

Si $\boldsymbol{s}$ appartient à $(\mathbf{R}_+^*)^n$, nous posons

$$\mathbf{min}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) = \prod_{i=1}^{n} \min(s_i^{k_i}, t_i^{k_i}) \in]0, +\infty[.$$

Soient $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{R}_+^n$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous intéresserons à l'algèbre

$$\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t} \rangle$$

constituée des séries de la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n}$ désigne une famille de $\mathscr{A}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{la famille } \Big(\|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \Big)_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \text{ est sommable.}$$

Remarquons, que s'il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $s_i = 0$, alors, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$ avec $k_i < 0$, nous avons $\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) = +\infty$. La condition de sommabilité impose alors que $a_{\boldsymbol{k}} = 0$.

L'algèbre $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t} \rangle$ est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \right\|_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}).$$

L'algèbre $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t} \rangle$ est liée à l'anneau des fonctions sur la couronne de rayon intérieur $\boldsymbol{s}$ et de rayon extérieur $\boldsymbol{t}$:

$$\overline{C}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \{x \in X \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Précisons ce résultat.

Proposition 2.1.1. — *Le morphisme*

$$\mathcal{M}\left(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t} \rangle\right) \to \mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{n,\mathrm{an}}$$

induit par l'injection naturelle

$$\mathscr{A}[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$$

réalise un homéomorphisme sur son image $\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$. *En particulier, pour tout élément* f *de* $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$, *nous avons*

$$\|f\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})} = \inf_{j\geq 1}\left(\|f^j\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}^{1/j}\right).$$

Démonstration. — Posons

$$\mathscr{B} = \left\{\sum_{\boldsymbol{k}\in I} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},\ I \subset J_{\boldsymbol{s}}\right\},$$

où $J_{\boldsymbol{s}}$ désigne l'ensemble des parties finies de l'ensemble

$$\{\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbf{Z}^n \mid k_i \geq 0 \text{ si } s_i = 0\}.$$

Par exemple, si $\boldsymbol{s} = 0$, nous avons $\mathscr{B} = \mathscr{A}[\boldsymbol{T}]$. L'anneau $\mathscr{B}$, qui est contenu dans l'anneau total des fractions de $\mathscr{A}[\boldsymbol{T}]$, est dense dans $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$ pour la norme $\|.\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$. On en déduit que le morphisme

$$\varphi : \mathcal{M}\left(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle\right) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$

est injectif. Puisque l'espace $\mathcal{M}\left(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle\right)$ est compact, le morphisme φ réalise un homéomorphisme sur son image.

Il nous reste à montrer que l'image du morphisme φ est égale à $\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$. Soit $x \in \mathcal{M}\left(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle\right)$. Quel que soit $i \in [\![1,n]\!]$, nous avons

$$|T_i(x)| \leq \|T_i\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} = t_i.$$

Quel que soit $i \in [\![1,n]\!]$, avec $s_i > 0$, nous avons

$$|T_i^{-1}(x)| \leq \|T_i^{-1}\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} = s_i^{-1}$$

et donc

$$|T_i(x)| \geq s_i.$$

On en déduit que

$$\varphi\left(\mathcal{M}\left(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle\right)\right) \subset \overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}).$$

Réciproquement, soit $x \in \overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$. Pour montrer que $x \in \mathcal{M}\left(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle\right)$, nous devons montrer que la semi-norme multiplicative $|.|_x$ sur $\mathscr{A}[\boldsymbol{T}]$, bornée sur $\mathscr{A}$, associée à x se prolonge en une semi-norme multiplicative bornée sur $(\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle, \|.\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}})$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $s_i > 0$. La fonction T_i ne s'annule pas sur la couronne $\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$. On en déduit que la semi-norme multiplicative $|.|_x$ se prolonge à $\mathscr{B}$. Expliquons-en la raison. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, posons $r_i = 0$ si $s_i = 0$ et $r_i = 1$ si $s_i > 0$. Posons encore $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_n)$. Tout élément Q de $\mathscr{B}$ possède

une écriture sous la forme $\left(\boldsymbol{T}^{-\boldsymbol{r}}\right)^l P$, avec $l \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathscr{A}[\boldsymbol{T}]$, et nous pouvons alors poser

$$|Q|_x = |\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{r}}|_x^{-l}\, |P|_x.$$

Cette quantité ne dépend pas de l'écriture de Q choisie. On vérifie que l'application prolongée, que nous notons encore $|.|_x$, définit bien une semi-norme multiplicative sur $\mathscr{B}$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Nous avons

$$|T_i(x)| \leq \max_{y \in \overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})} (|T_i(y)|) = t_i.$$

Si $s_i > 0$, nous avons également

$$|T_i^{-1}(x)| = |T_i(x)|^{-1} \leq \min_{y \in \overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})} (|T_i(y)|^{-1}) = s_i^{-1}.$$

Soit $Q(\boldsymbol{T}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{B}$. Notons $b = \pi(x)$. Nous avons alors

$$|Q(\boldsymbol{T})|_x \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} |a_{\boldsymbol{k}}(b)|\, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\boldsymbol{k}}\|\, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) = \|P\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}.$$

Le résultat de densité mentionné plus haut montre finalement que $|.|_x$ se prolonge en une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$.

□

Les résultats qui suivent ont pour objet de comparer la norme $\|.\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$ et la norme uniforme $\|.\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})}$ sur la couronne $\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$. Rappelons que nous avons supposé que la norme $\|.\|$ définie sur l'anneau $\mathscr{A}$ est équivalente à la norme spectrale : il existe deux constantes $C_-, C_+ > 0$ telles que

$$\forall f \in \mathscr{A},\ C_- \|f\|_{sp} \leq \|f\| \leq C_+ \|f\|_{sp}.$$

Lemme 2.1.2. — *Soit* $R = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{A}[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}]$. *Quel que soit* $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$, *nous avons*

$$\|a_{\boldsymbol{k}}\|\, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq C_+ \|R\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que ce résultat est bien connu lorsque l'anneau de Banach $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est un corps valué. En effet, lorsque le corps est ultramétrique, cela découle immédiatement de la description de la norme $\|R\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})}$ que l'on sait justement être égale à

$$\max_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \left(\|a_{\boldsymbol{k}}\|\, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \right).$$

Lorsque le corps est archimédien, l'inégalité provient de la formule de Cauchy.

Revenons au cas général. Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$. Considérons un point z de B en lequel l'égalité $|a_{\boldsymbol{k}}(z)| = \|a_{\boldsymbol{k}}\|_{sp}$ a lieu. Il en existe car la partie B est compacte. Le raisonnement précédent assure que

$$\|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq C_+ \, |a_{\boldsymbol{k}}(z)| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq C_+ \, \|R\|_{\pi^{-1}(z) \cap \overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})}.$$

On en déduit immédiatement l'inégalité demandée. □

Proposition 2.1.3. — *Soient $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un élément de $\mathbf{R}_+^n$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ un élément de $\left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$ tels que $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v} < \boldsymbol{t}$. Alors, pour tout élément R de $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t} \rangle$, on a l'inégalité*

$$\|R\|_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \leq C_+ \left(\prod_{i=1}^n \frac{s_i}{u_i - s_i} + \frac{t_i}{t_i - v_i} \right) \|R\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})},$$

où, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, nous posons $s_i/(u_i - s_i) = 0$ si $s_i = 0$.

Démonstration. — Comme dans la preuve de la proposition 2.1.1, posons

$$\mathscr{B} = \left\{ \sum_{\boldsymbol{k} \in I} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}, \, I \subset J_{\boldsymbol{s}} \right\},$$

où $J_{\boldsymbol{s}}$ désigne l'ensemble des parties finies de l'ensemble

$$\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n \mid k_i \geq 0 \text{ si } s_i = 0\}.$$

Soit

$$P = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$$

un élément de $\mathscr{B}$. D'après le lemme précédent, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons

$$\|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq C_+ \, \|P\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|P\|_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} &= \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\boldsymbol{k}}\| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{k}}) \\
&= C_+ \, \|P\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})} \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\max(u_i^{k_i}, v_i^{k_i})}{\max(s_i^{k_i}, t_i^{k_i})} \right) \\
&\leq C_+ \, \|P\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k_i < 0} \left(\frac{u_i}{s_i} \right)^{k_i} + \sum_{k_i \geq 0} \left(\frac{v_i}{t_i} \right)^{k_i} \right) \\
&\leq C_+ \, \|P\|_{\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})} \left(\prod_{i=1}^n \frac{s_i}{u_i - s_i} + \frac{t_i}{t_i - v_i} \right).
\end{aligned}$$

On conclut par densité de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t} \rangle$ pour la norme $\|.\|_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$ et donc la norme $\|.\|_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$. □

2.2. Limites d'algèbres de disques

Soit V une partie compacte de B. Rappelons (*cf.* définitions 1.1.20 et 1.2.1) que $\mathscr{K}(V)$ désigne le localisé de l'anneau $\mathscr{A}$ par l'ensemble des éléments qui ne s'annulent pas au voisinage de V et $\mathscr{B}(V)$ le complété de l'anneau $\mathscr{K}(V)$ pour la norme uniforme $\|.\|_V$ sur V. Pour $\boldsymbol{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous noterons $\|.\|_{V,\boldsymbol{t}}$ la norme sur l'anneau $\mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$ définie au paragraphe précédent.

Soit b un point de B. Rappelons que nous notons $\mathfrak{m}_b$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ et $\kappa(b)$ son corps résiduel. Nous noterons

$$L_b = \varinjlim_{V,\boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B et $\boldsymbol{t}$ parcourt $(\mathbf{R}_+^*)^n$. Pour commencer, énonçons un lemme qui assure que certaines décompositions formelles, comme somme ou produit, d'éléments de L_b existent dans L_b.

Lemme 2.2.1. — *Soit*

$$G = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \in L_b.$$

Soit E une partie de $\mathbf{N}^n$. Alors les séries

$$G_1 = \sum_{\boldsymbol{k}\in E} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \text{ et } G_2 = \sum_{\boldsymbol{k}\notin E} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$$

appartiennent à L_b et vérifient

$$G = G_1 + G_2.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Supposons qu'il existe $H \in \mathscr{O}_{B,b}[\![\boldsymbol{T}]\!]$ telle que $G = T_i H$. Alors H appartient à L_b et l'égalité $G = T_i H$ vaut dans L_b.

Démonstration. — Il suffit de revenir à la définition des éléments de L_b et de prendre garde à ce que les conditions de convergence restent vérifiées. □

Lemme 2.2.2. — *L'anneau L_b est un anneau local d'idéal maximal*

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_b, T_1, \ldots, T_n)$$

et de corps résiduel $\kappa(b)$.

Démonstration. — En utilisant le lemme 2.2.1, on montre que le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_{B,b} \to L_b/(T_1, \ldots, T_n)$$

est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme naturel

$$\kappa(b) = \mathscr{O}_{B,b}/\mathfrak{m}_b \xrightarrow{\sim} L_b/\mathfrak{m}.$$

Par conséquent, l'idéal $\mathfrak{m}$ est maximal.

Pour montrer que l'anneau L_b est un anneau local d'idéal $\mathfrak{m}$, il suffit de montrer que tout élément de L_b qui n'appartient pas à $\mathfrak{m}$ est inversible. Soit $F \in L_b \setminus \mathfrak{m}$. Il existe V un voisinage compact du point b dans B et $t \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que $F \in \mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$. Nous pouvons écrire F sous la forme

$$F = a_0 + \sum_{i=1}^{n} T_i\, G_i(\boldsymbol{T}),$$

avec $a_0 \in \mathscr{B}(V)$ et, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, $G_i \in \mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$. Puisque F n'appartient pas à $\mathfrak{m}$, son premier coefficient a_0 n'appartient pas à $\mathfrak{m}_b$. On en déduit que a_0 est inversible au voisinage de b dans B. Quitte à restreindre V et à multiplier F par a_0^{-1}, nous pouvons supposer que $a_0 = 1$. Notons

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} (\|G_i\|_{V,\boldsymbol{t}}).$$

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} s_i\, M < 1.$$

Nous avons alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} T_i\, G_i(\boldsymbol{T}) \right\|_{V,\boldsymbol{s}} < 1.$$

On en déduit que la fonction

$$F = 1 + \sum_{i=1}^{n} T_i\, G_i(\boldsymbol{T})$$

est inversible dans l'anneau de Banach $\mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle$ et donc dans L_b. □

2.2.1. Théorèmes de Weierstraß

Dans ce paragraphe, nous montrerons que l'anneau L_b satisfait les conclusions des théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Notre preuve est calquée sur celle que mettent en œuvre H. Grauert et R. Remmert dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

Nous noterons $\boldsymbol{T}' = (T_1, \ldots, T_{n-1})$ et

$$L'_b = \varinjlim_{V,\boldsymbol{t}'} \mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}'| \leq \boldsymbol{t}'\rangle,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B et $\boldsymbol{t}'$ parcourt l'ensemble $(\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$.

Théorème 2.2.3 (Théorème de division de Weierstraß)

Soit $G \in L_b$ une série telle que $G(0,T_n)(b) \neq 0$ dans $\mathscr{H}(b)[\![T_n]\!]$. Notons p la valuation en T_n de la série $G(0,T_n)(b)$. Soit $F \in L_b$. Alors il existe un unique couple $(Q,R) \in (L_b)^2$ tel que

i) $R \in L_b'[T_n]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à p ;
ii) $F = QG + R$.

Démonstration. — Notons $G = \sum_{k\in\mathbf{N}} g_k(\boldsymbol{T'})\, T_n^k$ où, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $g_k \in L_b'$, $g_0(0)(b) = \cdots = g_{p-1}(0)(b) = 0$ et $g_p(0)(b) \neq 0$. Quitte à choisir un voisinage compact assez petit V du point b et un réel strictement positif r assez petit également, nous pouvons supposer que $G \in \mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{r}\rangle$, où $\boldsymbol{r} = (r,\ldots,r) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, et que $g_p(\boldsymbol{T'})$ est inversible dans $\mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T'}| \leq \boldsymbol{r'}\rangle$, où $\boldsymbol{r'} = (r,\ldots,r) \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$. Quitte à multiplier alors G par g_p^{-1}, nous pouvons supposer que $g_p = 1$.

Soient $\boldsymbol{s'} \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$, avec $\boldsymbol{s'} \leq \boldsymbol{r'}$, et $s \in \,]0,r]$. Posons $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s'},s) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Tout élément φ de $\mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \alpha(\varphi)\, T_n^p + \beta(\varphi),$$

où $\alpha(\varphi)$ désigne un élément de $\mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle$ et $\beta(\varphi)$ un élément de $\mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T'}| \leq \boldsymbol{s'}\rangle[T_n]$ de degré strictement inférieur à p. Remarquons, dès à présent, que, quel que soit $\varphi \in \mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle$, on a

$$\|\varphi\|_{V,\boldsymbol{s}} = \|\alpha(\varphi)\|_{V,\boldsymbol{s}}\, s^p + \|\beta(\varphi)\|_{V,\boldsymbol{s}}.$$

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$A_{\boldsymbol{s}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle & \to & \mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle \\ \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi)\, G + \beta(\varphi) \end{array}.$$

Il nous suffit de trouver un n-uplet $\boldsymbol{s}$ assez petit pour lequel l'endomorphisme $A_{\boldsymbol{s}}$ soit bijectif. Remarquons que, quel que soit $\varphi \in \mathscr{B}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|A_{\boldsymbol{s}}(\varphi) - \varphi\|_{V,\boldsymbol{s}} & = & \|\alpha(\varphi)\,(G - T_n^p)\|_{V,\boldsymbol{s}} \\ & \leq & \|\alpha(\varphi)\|_{V,\boldsymbol{s}}\, \|G - T_n^p\|_{V,\boldsymbol{s}} \\ & \leq & s^{-p}\, \|\varphi\|_{V,\boldsymbol{s}}\, \|G - T_n^p\|_{V,\boldsymbol{s}}. \end{array}$$

Soient $u,v \in \,]0,\min(r,1)[$. Nous noterons $(\boldsymbol{u},v)$ le n-uplet $(u,\ldots,u,v)$. Soit $k \in [\![0,p-1]\!]$. Il existe une constante $M_k \in \mathbf{R}$, indépendante de u et de v, telle que l'on ait

$$\|g_k\|_{V,\boldsymbol{u}} \leq \|g_k(0)\|_V + M_k\, u.$$

Il existe également une constante $N \in \mathbf{R}$, encore indépendante de u et de v, telle que l'on ait

$$\left\| \sum_{k \geq p+1} g_k(\boldsymbol{T}')\, T_n^k \right\|_{V,(\boldsymbol{u},v)} \leq N v^{p+1}.$$

Par conséquent, il existe une constante $M \in \mathbf{R}$, indépendante de u et de v, telle que

$$\|G - T_n^p\|_{V,(\boldsymbol{u},v)} \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_V + M(u + v^{p+1}).$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Quitte à choisir judicieusement v puis u, nous pouvons supposer que $M(u+v^{p+1}) \leq \varepsilon v^p/2$. Quel que soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, nous avons $g_k(0)(b) = 0$, par hypothèse. Par conséquent, quitte à restreindre le voisinage V de b, nous pouvons supposer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_V \leq \varepsilon\, \frac{v^p}{2}.$$

On dispose alors de l'inégalité

$$\|A_{(\boldsymbol{u},v)} - I\|_{V,(\boldsymbol{u},v)} \leq \varepsilon < 1$$

et on en déduit que l'endomorphisme $A_{(\boldsymbol{u},v)} = I + (A_{(\boldsymbol{u},v)} - I)$ est inversible. □

Nous pouvons obtenir une version plus précise du théorème de Weierstraß lorsque l'on divise par des séries d'un type particulier.

Définition 2.2.4. — *Soit $p \in \mathbf{N}$. On dit qu'un polynôme $h \in L'_b[T_n]$ est* ***distingué*** *de degré p s'il est unitaire, de degré p et vérifie*

$$h(0, T_n)(b) = T_n^p \text{ dans } \mathscr{H}(b)[\![T_n]\!].$$

Théorème 2.2.5 (Théorème de division de Weierstraß semi-local)

Soient $p \in \mathbf{N}$ et $G \in L'_b[T_n]$ un polynôme distingué de degré p. Soient V un voisinage compact de b dans B et $\boldsymbol{r}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$ tel que $G \in \mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}'| \leq \boldsymbol{r}'\rangle[T_n]$. Soient v_- et v_+ deux nombres réels vérifiant $0 < v_- \leq v_+$. Alors il existe un voisinage compact W de b dans V et un $(n-1)$-uplet $\boldsymbol{s}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$, avec $\boldsymbol{s}' \leq \boldsymbol{r}'$, vérifiant la propriété suivante : pour tout voisinage compact U de b dans W, tout $(n-1)$-uplet $\boldsymbol{t}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$ vérifiant $\boldsymbol{t}' \leq \boldsymbol{s}'$, tout nombre réel $w \in [v_-, v_+]$ et tout élément F de $\mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{t}', w)\rangle$, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{t}', w)\rangle)^2$ tel que

i) R soit un polynôme de degré strictement inférieur à p ;
ii) $F = QG + R$.

En outre, il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+^*$, indépendante de U, $\boldsymbol{t}'$, w et F, telle que l'on ait les inégalités

a) $\|Q\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \leq C\,\|F\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)}$;
b) $\|R\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \leq C\,\|F\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)}$.

Démonstration. — Notons

$$G = T_n^p + \sum_{k=0}^{p-1} g_k(\boldsymbol{T}')\,T_n^k$$

où, quel que soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, $g_k \in \mathscr{B}(V)$ et $g_k(0)(b) = 0$. Soient $\boldsymbol{s}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$, avec $\boldsymbol{s}' \leq \boldsymbol{r}'$, $u \in]0, v_+]$ et W un voisinage compact de b dans V. Tout élément φ de $\mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{s}', u)\rangle$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \alpha(\varphi)\,T_n^p + \beta(\varphi),$$

où $\alpha(\varphi)$ désigne un élément de $\mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{s}', u)\rangle$ et $\beta(\varphi)$ un élément de $\mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}'| \leq \boldsymbol{s}'\rangle[T_n]$ de degré strictement inférieur à p. Remarquons, dès à présent, que, quel que soit $\varphi \in \mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{s}', u)\rangle$, nous avons

$$\|\varphi\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)} = \|\alpha(\varphi)\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)}\,u^p + \|\beta(\varphi)\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)}.$$

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$A_{W,(\boldsymbol{s}',u)} : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{s}', u)\rangle & \to & \mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{s}', u)\rangle \\ \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi)\,G + \beta(\varphi) \end{array}.$$

Remarquons que, quel que soit $\varphi \in \mathscr{B}(W)\langle|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{s}', u)\rangle$, nous avons

$$\begin{aligned} \|A_{W,(\boldsymbol{s}',u)}(\varphi) - \varphi\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)} &= \|\alpha(\varphi)\,(G - T_n^p)\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)} \\ &\leq \|\alpha(\varphi)\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)}\,\|G - T_n^p\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)} \\ &\leq u^{-p}\,\|\varphi\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)}\,\|G - T_n^p\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)}. \end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{s}' = (s_1, \ldots, s_{n-1})$, nous noterons $\max(\boldsymbol{s}') = \max(s_1, \ldots, s_{n-1})$. Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Il existe une constante $M_k \in \mathbf{R}$, indépendante de $\boldsymbol{s}'$, telle que l'on ait

$$\|g_k\|_{W,\boldsymbol{s}'} \leq \|g_k(0)\|_W + M_k\,\max(\boldsymbol{s}').$$

Par conséquent, il existe une constante $M \in \mathbf{R}$, indépendante de $\boldsymbol{s}'$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned} \|G - T_n^p\|_{W,(\boldsymbol{s}',u)} &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W\,u^k + M\,\max(\boldsymbol{s}') \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W\,v_+^k + M\,\max(\boldsymbol{s}'). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Quel que soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, nous avons $g_k(0)(b) = 0$, par hypothèse. Par conséquent, il existe un voisinage W de b dans V tel que l'on ait

$$\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W \, v_+^k \leq \varepsilon \, \frac{v_-^p}{2}.$$

Il existe également $\boldsymbol{s}' \leq \boldsymbol{r}'$ tel que

$$M \max(\boldsymbol{s}') \leq \varepsilon \, \frac{v_-^p}{2}.$$

Soient U un voisinage compact de b dans W, $\boldsymbol{t}' \leq \boldsymbol{s}'$ et $w \in [v_-, v_+]$. On dispose alors de l'inégalité

$$\begin{aligned} \|G - T_n^p\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \, w^{-p} &\leq \|G - T_n^p\|_{W,(\boldsymbol{s}',w)} \, v_-^{-p} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W \, v_+^k + M \max(\boldsymbol{s}') \right) v_-^{-p} \\ &\leq \varepsilon \, v_-^p \, v_-^{-p} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\|A_{U,(\boldsymbol{t}',w)} - I\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \leq \varepsilon < 1.$$

Par conséquent, l'endomorphisme $A_{U,(\boldsymbol{t}',w)} = I + (A_{U,(\boldsymbol{t}',w)} - I)$ est inversible.

Soit $F \in \mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{t}', w)\rangle$. Il existe un unique couple (Q, R), avec $Q \in \mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{t}', w)\rangle$ et $R \in \mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}'| \leq \boldsymbol{t}'\rangle[T_n]$ de degré strictement inférieur à p, tel que

$$F = QG + R.$$

Avec les notations précédentes, nous avons $Q = \alpha(A_{U,(\boldsymbol{t}',w)}^{-1}(F))$ et $R = \beta(A_{U,(\boldsymbol{t}',w)}^{-1}(F))$. Puisque $\|A_{U,(\boldsymbol{t}',w)} - I\|_{U,|\boldsymbol{T}| \leq (\boldsymbol{t}',w)} \leq \varepsilon$, nous avons

$$\|A_{U,(\boldsymbol{t}',w)}^{-1}\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i = \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

On en déduit que

$$\|Q\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \leq \frac{v_-^{-p}}{1-\varepsilon} \, \|F\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)}$$

et que

$$\|R\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \, \|F\|_{U,(\boldsymbol{t}',w)}.$$

□

Théorème 2.2.6 (Théorème de préparation de Weierstraß)

Soit $G \in L_b$ une série telle que $G(0, T_n)(b) \neq 0$ dans $\mathscr{H}(b)[\![T_n]\!]$. Notons p la valuation en T_n de la série $G(0, T_n)(b)$. Alors il existe un unique couple $(\Omega, E) \in (L_b)^2$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $\Omega \in L_b'[T_n]$ est un polynôme distingué de degré p ;

ii) E est inversible dans L_b ;
iii) $G = E\,\Omega$.

Démonstration. — Supposons que des séries Ω et E vérifiant les conditions requises existent. Alors Ω s'écrit sous la forme $T_n^p + S$, où $S \in L_b'[T_n]$ désigne un polynôme de degré strictement inférieur à p. Les séries S et E sont alors reliées par l'égalité $T_n^p = E^{-1}\,G - S$. Le théorème de division de Weierstraß 2.2.3 nous assure l'unicité des séries E^{-1} et S. On en déduit l'unicité des séries Ω et E.

Démontrons, à présent, l'existence de ces séries. Le théorème 2.2.3 appliqué avec T_n^p et G nous assure qu'il existe $Q \in L_b$ et $R \in L_b'[T_n]$ de degré strictement inférieur à p tels que

$$T_n^p = QG + R.$$

Montrons, tout d'abord, que $R(0, T_n)(b) = 0$. Si H désigne un élément de L_b, nous noterons $v_b(H)$ la valuation en T_n de la série $H(0, T_n)(b)$ dans $\mathscr{H}(b)[\![T_n]\!]$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} v_b(R) &= v_b(T_n^p - QG) \\ &\geq \min\left(v_b(T_n^p), v_b(Q) + v_b(G)\right) \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Puisque $R(0, T_n)$ est supposé de degré strictement inférieur à p, nous avons donc $R(0, T_n)(b) = 0$. On en déduit que $v_b(T_n^p - R) = p$ et donc que

$$v_b(Q) = v_b(QG) - v_b(G) = p - p = 0.$$

Par conséquent, Q est inversible dans L_b. Les séries $E = Q^{-1}$ et $\Omega = T_n^p - R$ conviennent. □

Par la suite, nous aurons également besoin du lemme suivant, fort utile pour nous ramener à une situation dans laquelle on peut utiliser les théorèmes de Weierstraß.

Lemme 2.2.7. — *Soit $G \in L_b$ tel que $G(b) \neq 0$ dans $\mathscr{H}(b)[\![\boldsymbol{T}]\!]$. Il existe un automorphisme σ de L_b tel que l'on ait $\sigma(G)(0, T_n)(b) \neq 0$ dans $\mathscr{H}(b)[\![T_n]\!]$.*

Démonstration. — D'après [**7**], §3, n° 7, lemme 3, il existe $u(1), \ldots, u(n-1) \in \mathbf{N}^*$ tels que l'automorphisme τ de $\mathscr{H}(b)[\![\boldsymbol{T}]\!]$ défini par

i) $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\tau(T_i) = T_i + T_n^{u(i)}$;
ii) $\tau(T_n) = T_n$

envoie G sur un élément $\tau(G)$ qui vérifie $\tau(G)(0, T_n)(b) \neq 0$.

Montrons que l'application τ peut être définie sur L_b. Soient U un voisinage compact de b dans B et $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Quel que soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, il

existe $s_i, s_{n,i} \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $s_i + s_{n,i}^{u(i)} \leq r_i$. Posons $s_n = \min(s_{n,1}, \ldots, s_{n,n-1}, r_n)$ et $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$. Définissons alors un endomorphisme τ_U de $\mathscr{B}(U)[\![\boldsymbol{T}]\!]$ par les mêmes formules que τ. On vérifie alors que, quel que soit $F \in \mathscr{B}(U)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{r}\rangle$, on a

$$\tau_U(F) \in \mathscr{A}(U)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{s}\rangle.$$

On en déduit un morphisme $\sigma_U : \mathscr{B}(U)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{r}\rangle \to L_b$. On vérifie sans peine que tous ces morphismes sont compatibles et définissent donc un endomorphisme σ de L_b. En outre, l'endomorphisme σ induit l'endomorphisme τ sur $\mathscr{O}_{B,b}[\![\boldsymbol{T}]\!]$. On en déduit, en particulier, que $\sigma(G)(0, T_n)(b) \neq 0$.

En appliquant le même procédé à partir de τ^{-1}, on construit un endomorphisme σ^{-1} de L_b qui est l'inverse de σ. Par conséquent, σ est un automorphisme de L_b. □

2.2.2. Propriétés

Nous consacrerons cette partie à démontrer quelques propriétés de l'anneau local L_b.

Théorème 2.2.8. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps. Alors l'anneau local L_b est noethérien.*

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence. Si $n = 0$, l'isomorphisme $L_b \simeq \mathscr{O}_{B,b}$ nous montre que le résultat est vrai.

Supposons, à présent, que le résultat soit vrai pour L'_b. Soit I un idéal de L_b. L'idéal nul étant évidemment de type fini, nous pouvons supposer que $I \neq (0)$. Choisissons un élément non nul G de I. Puisque $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps, il s'injecte dans $\mathscr{H}(b)$ et nous avons donc $G(b) \neq 0$. D'après le lemme 2.2.7, quitte à appliquer un automorphisme de L_b, nous pouvons donc supposer que $G(0, T_n)(b) \neq 0$. D'après le théorème de division de Weierstraß 2.2.3, l'idéal I est engendré par G et par la partie $I \cap L'_b[T_n]$. Or l'anneau $L'_b[T_n]$ est noethérien, puisque L'_b l'est, donc l'idéal $I \cap L'_b[T_n]$ est engendré par un nombre fini d'éléments, ce qui suffit pour conclure. □

Nous souhaitons, maintenant, traiter le cas où l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète. Nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire.

Définition 2.2.9. — *Soit b un point de B en lequel l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est de valuation discrète. Choisissons une uniformisante π de cet anneau et V un voisinage de b dans B sur lequel elle est définie. On dit que l'uniformisante π vérifie la* **condition ($\mathbf{U}_V$)** *s'il existe une constante $C_V > 0$ telle que pour toute*

fonction $f \in \mathscr{B}(V)$ vérifiant $f(b) = 0$, il existe une fonction $g \in \mathscr{B}(V)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $f = \pi\, g$ dans $\mathscr{B}(V)$;
ii) $\|g\|_V \leq C_V\, \|f\|_V$.

On dit que l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{B,b}$ vérifie la **condition (U)** *s'il existe une uniformisante π de $\mathscr{O}_{B,b}$ définie sur un voisinage V du point b dans B et un système fondamental $\mathscr{W}$ de voisinages compacts du point b dans V tel que, pour tout élément W de $\mathscr{W}$, l'uniformisante π vérifie la condition (U_W).*

Remarque 2.2.10. — Il est clair que la condition (U) ne dépend pas de l'ouvert de définition V de π que nous avons choisi. En outre, si π' désigne une uniformisante de $\mathscr{O}_{B,b}$, il existe une fonction α inversible dans $\mathscr{O}_{B,b}$ telle que $\pi = \alpha\, \pi'$ dans $\mathscr{O}_{B,b}$. Si les propriétés précédentes sont vérifiées pour l'uniformisante π, elles le sont donc encore pour l'uniformisante π'. Par conséquent, la condition (U) porte bien sur l'anneau local lui-même et ne dépend pas des choix de π et de V effectués.

Nous utiliserons la condition (U) sous la forme du lemme suivant.

Lemme 2.2.11. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Soit π une uniformisante de $\mathscr{O}_{B,b}$ et notons v_π la valuation π-adique sur cet anneau. Soit $G \in L_b \setminus \{0\}$. Notons $\sum_{\boldsymbol{k} \geq 0} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$ son image dans $\mathscr{O}_{B,b}[\![\boldsymbol{T}]\!]$. Posons*

$$v(G) = \min\{v_\pi(a_{\boldsymbol{k}}),\, \boldsymbol{k} \geq 0\} \in \mathbf{N}.$$

Alors, il existe une fonction H de L_b vérifiant les propriétés suivantes :

i) $H(b) \neq 0$ dans $\mathscr{H}(b)[\![\boldsymbol{T}]\!]$;
ii) $G = \pi^{v(G)} H$ dans L_b.

Démonstration. — Soit V un voisinage de b dans B sur lequel π est définie. Par hypothèse, il existe un système fondamental $\mathscr{W}$ de voisinages de b dans V tel que, quel que soit $W \in \mathscr{W}$, l'uniformisante π vérifie la condition (U_W), avec une certaine constante $C_W > 0$. Il existe un voisinage compact U de b dans B et $\boldsymbol{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que la série G soit un élément de $\mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$. Par conséquent, il existe une famille $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{B}(U)$ telle que

$$G = \sum_{\boldsymbol{k} \geq 0} a_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{k} \geq 0} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_U\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} < +\infty.$$

Soit W un élément de $\mathscr{W}$ contenu dans U. Soit $\boldsymbol{k} \geq 0$. Par hypothèse, $\pi^{v(G)}$ divise $a_{\boldsymbol{k}}$ dans $\mathscr{O}_{B,b}$. La condition (U_W) nous assure qu'il existe $b_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{B}(W)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $a_{\boldsymbol{k}} = \pi^{v(G)}\, b_{\boldsymbol{k}}$ dans $\mathscr{B}(W)$;
ii) $\|b_{\boldsymbol{k}}\|_W \leq C_W^{v(G)}\, \|a_{\boldsymbol{k}}\|_W$.

Nous avons

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} \|b_{\boldsymbol{k}}\|_W\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} \leq C_W^{v(G)} \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_U\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} < +\infty.$$

Par conséquent, la série $\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} b_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$ définit un élément H de $\mathscr{B}(W)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$. Il vérifie bien $G = \pi^{v(G)} H$ et $H(b) \neq 0$. □

Théorème 2.2.12. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors, l'anneau local L_b est noethérien.*

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence sur n. Si $n = 0$, nous avons $L_b \simeq \mathscr{O}_{B,b}$ et le résultat est vrai.

Supposons, à présent, que le résultat soit vrai pour L'_b. Soit I un idéal de L_b. L'idéal nul étant de type fini, nous pouvons supposer que $I \neq (0)$. Notons

$$v(I) = \min\{v(G),\, G \in I\}.$$

D'après le lemme 2.2.11, il existe un idéal J de L_b vérifiant les propriétés suivantes :

i) $I = \pi^{v(I)} J$;
ii) l'idéal J contient un élément G vérifiant $G(b) \neq 0$ dans $\mathscr{H}(b)[\![\boldsymbol{T}]\!]$.

Nous pouvons alors utiliser le même raisonnement que dans la preuve du théorème 2.2.8 pour montrer que l'idéal J est de type fini. Il en est donc de même pour l'idéal I. □

Théorème 2.2.13. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors, l'anneau local L_b est factoriel.*

Démonstration. — Il nous suffit de reprendre la structure des raisonnements précédents en utilisant, cette fois-ci, le théorème de préparation de Weierstraß 2.2.6, joint au lemme 2.2.7, et le théorème de Gauß. □

Nous pouvons, en fait, obtenir un résultat plus fort et démontrer, sous les mêmes hypothèses, que l'anneau local L_b est régulier.

Théorème 2.2.14. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors, l'anneau L_b est un anneau local régulier de dimension égale à* $\dim(\mathscr{O}_{B,b}) + n$.

Démonstration. — Rappelons que nous notons $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_b, T_1, \ldots, T_n)$ l'idéal maximal de L_b et que nous avons

$$\kappa(b) = \mathscr{O}_{B,b}/\mathfrak{m}_b \simeq L_b/\mathfrak{m}.$$

Supposons, tout d'abord, que $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps. Nous avons $\mathfrak{m} = (T_1, \ldots, T_n)$, $\mathscr{O}_{B,b} = \kappa(b)$ et $\dim(\mathscr{O}_{B,b}) = 0$. La suite

$$(0) \subset (T_1) \subset \cdots \subset (T_1, \ldots, T_n)$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de L_b. On en déduit que

$$\dim(L_b) \geq n.$$

Montrons, à présent, que la famille $(T_1, \ldots, T_n)$ engendre le $\kappa(b)$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Soit $G \in \mathfrak{m}$. Par définition de $\mathfrak{m}$, il existe $G_1, \ldots, G_n \in L_b$ tels que

$$G = \sum_{i=1}^{n} T_i\, G_i \text{ dans } L_b.$$

Quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $h_i \in \mathscr{O}_{B,b}$, $H_{i,1}, \ldots, H_{i,n} \in \mathscr{O}_{B,b}[\![\boldsymbol{T}]\!]$ tels que

$$G_i = h_i + \sum_{j=1}^{n} T_j\, H_{i,j} \text{ dans } \mathscr{O}_{B,b}[\![\boldsymbol{T}]\!].$$

D'après le lemme 2.2.1, cette décomposition vaut encore dans L_b. Par conséquent, nous avons

$$G = \sum_{i=1}^{n} h_i\, T_i + \sum_{1 \leq i,j \leq n} T_i\, T_j\, H_{i,j} \text{ dans } L_b.$$

Or, quels que soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, nous avons $T_i\, T_j \in \mathfrak{m}^2$. On en déduit que

$$G = \sum_{i=1}^{n} h_i\, T_i \text{ dans } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Nous avons bien montré que la famille $(T_1, \ldots, T_n)$ engendre le $\kappa(b)$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Comme tout anneau local noethérien, l'anneau L_b vérifie

$$\dim(L_b) \leq \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq n.$$

Finalement, nous avons donc

$$\dim(L_b) = \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n.$$

On en déduit que l'anneau L_b est un anneau local régulier de dimension n.

Supposons, à présent, que $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition U. Nous avons alors $\dim(\mathscr{O}_{B,b}) = 1$. Soit π une uniformisante de $\mathscr{O}_{B,b}$. La suite

$$(0) \subset (\pi) \subset (\pi, T_1) \subset \cdots \subset (\pi, T_1, \ldots, T_n)$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de L_b. Observons que pour montrer que ce sont des idéaux premiers, il faut faire appel à la condition U et, plus précisément, au lemme 2.2.11. Nous avons montré que

$$\dim(L_b) \geq n + 1.$$

Montrons, à présent, que la famille $(\pi, T_1, \ldots, T_n)$ engendre le $\kappa(b)$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Soit $G \in \mathfrak{m}$. Par définition de $\mathfrak{m}$, il existe $G_0, \ldots, G_n \in L_b$ tels que

$$G = \pi\, G_0 + \sum_{i=1}^{n} T_i\, G_i \text{ dans } L_b.$$

Par le même raisonnement que dans le cas des corps, on montre qu'il existe $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{O}_{X,x}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} T_i\, G_i = \sum_{i=1}^{n} h_i\, T_i \text{ dans } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

En utilisant de nouveau le lemme 2.2.1, on montre qu'il existe $h_0 \in \mathscr{O}_{B,b}$, $H_{0,1}, \ldots, H_{0,n} \in L_b$ tels que

$$G_0 = h_0 + \sum_{j=1}^{n} T_j\, H_{0,j} \text{ dans } L_b.$$

Par conséquent, nous avons

$$\pi\, G_0 = \pi\, h_0 + \sum_{j=1}^{n} \pi\, T_j\, H_{0,j} \text{ dans } L_b.$$

Or, quel que soit $j \in [\![1, n]\!]$, nous avons $\pi\, T_j \in \mathfrak{m}^2$. On en déduit que

$$G = h_0\, \pi + \sum_{i=1}^{n} h_i\, T_i \text{ dans } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Nous avons bien montré que la famille $(\pi, T_1, \ldots, T_n)$ engendre le $\kappa(b)$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

L'anneau local noethérien L_b vérifie donc

$$\dim(L_b) \leq \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq n + 1.$$

On en déduit que

$$\dim(L_b) = \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n + 1.$$

Finalement, l'anneau L_b est un anneau local régulier de dimension $n + 1$. $\square$

2.3. Limites d'algèbres de couronnes

Soit V une partie compacte de B. Pour $\boldsymbol{s} \in \mathbf{R}_+^n$ et $\boldsymbol{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous noterons $\|.\|_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$ la norme sur l'anneau $\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$ définie au numéro 2.1.

Soit b un point de B. Soit $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que la famille $(r_1, \ldots, r_n)$ soit libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^*/|\mathscr{H}(b)^*|)$. Nous noterons

$$L_{b,\boldsymbol{r}} = \varinjlim_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B, $\boldsymbol{s}$ parcourt $\prod_{i=1}^n]0, r_i[$ et $\boldsymbol{t}$ parcourt $\prod_{i=1}^n]r_i, +\infty[$.

Comme précédemment, lorsque l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète soumis à la condition (U), nous pouvons mener une étude précise de l'anneau $L_{b,\boldsymbol{r}}$. Signalons que les résultats s'obtiennent bien plus facilement que précédemment. En particulier, nous n'aurons pas besoin de faire appel aux théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Nous commençons par énoncer un lemme qui généralise, en un certain sens, l'inégalité ultramétrique.

Lemme 2.3.1. — *Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|.|$ vérifiant l'inégalité suivante : quels que soient les éléments x et y de k, on a*

$$|x + y| \leq 2^\lambda \max(|x|, |y|).$$

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, \ldots, x_n \in k$. Alors on a

$$\left|\sum_{i=0}^n x_i\right| \leq 2^{n\lambda} \max_{0 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

Si l'on suppose que, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|x_i| < 2^{-n\lambda}|x_0|$, alors on a

$$\left|\sum_{i=0}^n x_i\right| \geq 2^{-n\lambda}|x_0|.$$

Démonstration. — La première inégalité s'obtient facilement par récurrence. Démontrons la seconde. Supposons donc que, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|x_i| < 2^{-n\lambda}|x_0|$. Alors

$$\begin{aligned} |x_0| &= \left|\sum_{i=0}^n x_i - x_n - \cdots - x_1\right| \\ &\leq 2^{n\lambda} \max\left(\left|\sum_{i=0}^n x_i\right|, |x_n|, \ldots, |x_1|\right), \end{aligned}$$

d'après la première inégalité. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\max\left(\left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right|, |x_n|, \ldots, |x_1|\right) = |x_i|.$$

Nous obtenons alors

$$|x_0| \leq 2^{n\lambda}\,|x_i| < |x_0|,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, nous avons

$$\max\left(\left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right|, |x_n|, \ldots, |x_1|\right) = \left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right|.$$

On en déduit la seconde inégalité. □

Théorème 2.3.2. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps. Alors l'anneau $L_{b,\boldsymbol{r}}$ est un corps.*

Démonstration. — Soit f un élément non nul de l'anneau $L_{b,\boldsymbol{r}}$. Il nous suffit de montrer que cet élément est inversible. Il existe un voisinage compact V de b dans B, des éléments $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{r}$ tels que

$$f \in \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle.$$

Dans ce dernier anneau, la fonction f possède une écriture sous la forme

$$f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons $a_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{B}(V)$ et la famille $(\|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}))_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ est sommable.

Les conditions imposées au n-uplet $\boldsymbol{r}$ nous assurent qu'il existe un élément $\boldsymbol{k}_0$ de $\mathbf{Z}^n$ tel que, quel que soit $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}_0$, on ait

$$|a_{\boldsymbol{k}_0}(b)|\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}_0}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}_0}) > |a_{\boldsymbol{k}}(b)|\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}).$$

En utilisant le fait que la famille $(\|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}))_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ est sommable, on en déduit qu'il existe $u, v \in \mathbf{R}$ tels que, quel que soit $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}_0$, on ait même

$$|a_{\boldsymbol{k}_0}(b)|\,\mathbf{min}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}_0}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}_0}) > v > u > |a_{\boldsymbol{k}}(b)|\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}).$$

Il existe un voisinage E de $-\infty$ dans $\mathbf{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{k}_0\}$ tel que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in E} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq u.$$

De même, il existe un voisinage F de $+\infty$ dans $\mathbf{Z}^n \setminus (E \cup \{\boldsymbol{k}_0\})$ tel que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in F} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \leq u.$$

La partie $G = \mathbf{Z}^n \setminus (E \cup F \cup \{\boldsymbol{k}_0\})$ ne contient qu'un nombre fini de termes. On en déduit qu'il existe deux éléments $\boldsymbol{s}_0$ et $\boldsymbol{t}_0$ de $(\mathbf{R}_+^*)^n$ vérifiant $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{s}_0 < \boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{t}_0 \leq \boldsymbol{t}$ tels que l'on ait

$$|a_{\boldsymbol{k}_0}(b)|\,\mathbf{min}(\boldsymbol{s}_0^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}_0^{\boldsymbol{k}}) > v$$

et, quel que soit $\boldsymbol{k} \in G$,

$$|a_{\boldsymbol{k}}(b)|\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}_0^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}_0^{\boldsymbol{k}}) < u.$$

Définissons deux voisinages compacts du point b dans V par

$$W_0 = \left\{ c \in V \,\middle|\, \forall \boldsymbol{k} \in G,\ |a_{\boldsymbol{k}}(b)|\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}_0^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}_0^{\boldsymbol{k}}) \leq u \right\}$$

et

$$W_1 = \left\{ c \in V \,\middle|\, |a_{\boldsymbol{k}_0}(c)|\,\mathbf{min}(\boldsymbol{s}_0^{\boldsymbol{k}_0}, \boldsymbol{t}_0^{\boldsymbol{k}_0}) \geq v \right\}.$$

Il existe un élément λ de l'intervalle $]0, 1]$ vérifiant

$$2^{(c+2)\lambda}\, u < v.$$

Les conditions que nous avons imposées sur $\boldsymbol{r}$ imposent au corps valué $\mathscr{H}(b)$ d'être ultramétrique. En particulier, nous avons $|2(b)| \leq 1$. Par conséquent, la partie

$$W_2 = \left\{ c \in V \,\middle|\, |2(c)| \leq 2^{\lambda} \right\}$$

est un voisinage compact de b dans V. Choisissons un voisinage compact rationnel W de b contenu dans $W_0 \cap W_1 \cap W_2$. Nous allons montrer que la fonction f est inversible dans l'anneau $\mathscr{B}(W)\langle \boldsymbol{s}_0 \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}_0 \rangle$. Notons

$$D = \pi^{-1}(W) \cap \overline{C}(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}_0).$$

En utilisant le fait que $\mathscr{B}(W) = W$ et le lemme 2.1.1, on montre que

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(W)\langle \boldsymbol{s}_0 \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}_0 \rangle) = D.$$

D'après [**2**], corollaire 1.2.4, pour montrer que la fonction f est inversible dans l'anneau $\mathscr{B}(W)\langle \boldsymbol{s}_0 \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}_0 \rangle$, il suffit de montrer qu'elle ne s'annule par sur son spectre analytique D. Soit y un point de D. Notons c son projeté sur B. C'est un élément de W. Nous avons

$$\begin{aligned} |f(y)| &= \left| \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}(c)\, \boldsymbol{T}(y)^{\boldsymbol{k}} \right| \\ &= \left| a_{\boldsymbol{k}_0}(c)\, \boldsymbol{T}(y)^{\boldsymbol{k}_0} + \sum_{\boldsymbol{k} \in E} a_{\boldsymbol{k}}(c)\, \boldsymbol{T}(y)^{\boldsymbol{k}} + \sum_{\boldsymbol{k} \in F} a_{\boldsymbol{k}}(c)\, \boldsymbol{T}(y)^{\boldsymbol{k}} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{\boldsymbol{k} \in G} a_{\boldsymbol{k}}(c)\, \boldsymbol{T}(y)^{\boldsymbol{k}} \right|. \end{aligned}$$

Écrivons l'expression à l'intérieur de la valeur absolue comme une somme de $3 + \sharp G$ termes. À l'exception du premier, chacun de ces termes g vérifie

$$|g| \leq u < 2^{-(\sharp G+2)\lambda}\, v \leq |a_{\boldsymbol{k}_0}(c)|\, |\boldsymbol{T}(c)^{\boldsymbol{k}_0}|.$$

D'après le lemme 2.3.1, nous avons donc

$$|f(y)| \geq 2^{-(\sharp G+2)\lambda}\, |a_{\boldsymbol{k}_0}(c)|\, |\boldsymbol{T}(c)^{\boldsymbol{k}_0}| > 0.$$

On en déduit le résultat. □

Venons-en, à présent, au cas où l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U) de la définition 2.2.9. Soit π une uniformisante de $\mathscr{O}_{B,b}$ et v_π la valuation associée. Nous disposons d'un résultat analogue à celui du lemme 2.2.11. Avant de l'énoncer, définissons une application v de $L_{b,\boldsymbol{r}}$ dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Soit f un élément de $L_{b,\boldsymbol{r}}$. Il existe un voisinage compact V de b dans B, des éléments $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{r}$ tels que

$$f \in \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle.$$

Dans ce dernier anneau, la fonction f possède une écriture sous la forme

$$f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons $a_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{B}(V)$ et la famille $(\|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}))_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ est sommable. Posons

$$v(f) = \min\{v_\pi(a_{\boldsymbol{k}}),\, \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n\} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}.$$

Cette quantité ne dépend pas du représentant de f choisi.

Lemme 2.3.3. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Soit π une uniformisante de $\mathscr{O}_{B,b}$ et notons v_π la valuation associée. Soit f un élément non nul de $L_{b,\boldsymbol{r}} \setminus \{0\}$. Alors, il existe une fonction g de $L_{b,\boldsymbol{r}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $v(g) = 0$ *;*
ii) $f = \pi^{v(f)} g$ *dans* $L_{b,\boldsymbol{r}}$.

Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 2.3.4. — *Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors l'anneau $L_{b,\boldsymbol{r}}$ est un anneau de valuation discrète, de valuation v et d'idéal maximal $\mathfrak{m}_b\, L_{b,\boldsymbol{r}}$.*

Démonstration. — On vérifie directement sur la définition de l'application v que les deux propriétés suivantes sont vérifiées : quels que soient f et g dans $L_{b,\boldsymbol{r}}$, nous avons

i) $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$;
ii) $v(fg) = v(f) + v(g)$.

En outre, la condition (U) assure que nous avons $v(f) = +\infty$ si, et seulement si, la fonction f est nulle. De cette propriété, jointe à la propriété *ii)*, on déduit que l'anneau $L_{b,\boldsymbol{r}}$ est intègre. Notons F son corps des fractions. L'application v se prolonge en un morphisme surjectif de F^* dans $\mathbf{Z}$ qui vérifie encore la propriété *i)*. C'est donc une valuation discrète.

Pour conclure, il nous reste à montrer que nous avons les deux égalités suivantes :

a) $L_{b,\boldsymbol{r}} = \{f \in F \mid v(f) \geq 0\}$;
b) $\mathfrak{m}_b L_{b,\boldsymbol{r}} = \{f \in F \mid v(f) > 0\}$.

L'égalité b) se déduit de l'égalité a) en utilisant la condition (U). En outre, en utilisant le lemme 2.3.3, on se ramène à montrer que tout élément de $L_{b,\boldsymbol{r}}$ de valuation nulle est inversible dans $L_{b,\boldsymbol{r}}$. Soit f un élément de $L_{b,\boldsymbol{r}}$ tel que $v(f) = 0$. Il existe un voisinage compact V de b dans B, des éléments $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{r}$ tels que

$$f \in \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle.$$

Dans ce dernier anneau, la fonction f possède une écriture sous la forme

$$f = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons $a_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{B}(V)$ et la famille $(\|a_{\boldsymbol{k}}\|_V \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}))_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Puisque $v(f) = 0$, la famille $(|a_{\boldsymbol{k}}(b)|)_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n}$ n'est pas nulle. Les conditions imposées au n-uplet $\boldsymbol{r}$ nous assurent alors qu'il existe un élément $\boldsymbol{k}_0$ de $\mathbf{Z}^n$ tel que, quel que soit $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}_0$, on ait

$$|a_{\boldsymbol{k}_0}(b)| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}_0}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}_0}) > |a_{\boldsymbol{k}}(b)| \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}).$$

On en utilisant le même raisonnement que dans la preuve du théorème 2.3.2, on montre que la fonction f est inversible dans l'anneau $L_{b,\boldsymbol{r}}$. $\square$

2.4. Exemples d'anneaux locaux

Il est possible d'exhiber des bases de voisinages explicites de certains points de l'espace affine. Ces résultats nous seront, par la suite, très utiles pour étudier les anneaux locaux en ces points. Commençons par nous intéresser à des parties compactes plus générales.

Lemme 2.4.1. — *Soient U un ouvert de B, Y un ouvert de X_U, p un entier et $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathscr{O}_X(Y)$. Pour toute partie compacte V de U et tous éléments $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_p)$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_p)$ de $\mathbf{R}_+^p$, nous posons*

$$M_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \{y \in Y \cap X_V \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ s_i \leq |f_i(y)| \leq t_i\}.$$

Nous supposerons que toutes ces parties sont compactes.

Soient V une partie compacte de U et $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}^p$. Soit N un voisinage du compact $M_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ dans Y. Il existe un voisinage compact V' de V dans U et deux éléments $\boldsymbol{s}'$ et $\boldsymbol{t}'$ de $\mathbf{R}_+^p$ vérifiant les inégalités $\boldsymbol{s}' \prec \boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}' > \boldsymbol{t}$ tels que l'on ait l'inclusion

$$M_{V'}(\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}') \subset N.$$

Démonstration. — Posons $M = M_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. Soient V_0 un voisinage compact de V dans U et $\boldsymbol{s}_0$ et $\boldsymbol{t}_0$ deux éléments de $\mathbf{R}^p$ vérifiant les inégalités $\boldsymbol{s}' \prec \boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}' > \boldsymbol{t}$. La partie compacte $M_0 = M_{V_0}(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}_0)$ est alors un voisinage compact de M dans Y. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que N est un voisinage ouvert de M dans M_0.

Posons $M_1 = M_{V_0}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. La partie $N \cap M_1$ est un voisinage ouvert de M dans M_1. Son complémentaire S_1 est une partie compacte. Puisque $M_1 \cap X_V = M$, le compact S_1 ne coupe pas X_V. Par conséquent, le compact $\pi(S_1)$ ne coupe pas V. Choisissons un voisinage compact V' de V dans V_0 contenu dans le complémentaire de $\pi(S_1)$. Nous avons alors

$$M_{V'}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = M_1 \cap X_{V'} \subset M_1 \cap N \subset N.$$

Posons $M_2 = M_{V'}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_0)$. La partie $N \cap M_2$ est un voisinage ouvert de M dans M_2. Son complémentaire S_2 est une partie compacte. La fonction

$$\max_{1 \leq i \leq p} (|f_i| - t_i)$$

atteint son minimum m sur S_2. Puisque S_2 est disjoint de M, le nombre réel m est strictement positif. Pour tout élément i de $[\![1, p]\!]$, choisissons un élément t'_i

de l'intervalle $]t_i, t_i + m[$. Posons $\boldsymbol{t}' = (t'_1, \ldots, t'_p)$. Nous avons alors $\boldsymbol{t}' > \boldsymbol{t}$ et

$$M_{V'}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}') \subset M_2 \cap N \subset N.$$

Nous montrons de même qu'il existe un élément $\boldsymbol{s}'$ de $\mathbf{R}_+^p$ vérifiant $\boldsymbol{s}' \prec \boldsymbol{s}$ tel que

$$M_{V'}(\boldsymbol{s}', \boldsymbol{s}) \subset N.$$

On en déduit que

$$M_{V'}(\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}') \subset N,$$

ce qui démontre le résultat. □

Nous allons maintenant appliquer ce résultat afin d'obtenir une description explicite de systèmes fondamentaux de voisinages pour certains points.

Définition 2.4.2. — *Soient b un point de B, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathscr{O}_{B,b}$ et $r_1, \ldots, r_n$ des éléments de $\mathbf{R}_+$. Notons I l'ensemble des éléments i de $[\![1, n]\!]$ tels que $r_i \neq 0$. Supposons que la famille $(r_i)_{i \in I}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^* / |\mathscr{H}(b)^*|)$. Il existe alors un unique point x de la fibre X_b qui vérifie les inégalités suivantes :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |(T_i - \alpha_i)(x)| = r_i.$$

Un tel point est dit **déployé**.

Soient b un point de B et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un élément de $\mathscr{O}_{B,b}^n$. Soit B_0 un voisinage de b dans B sur lequel les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont définies.

Soient I une partie de $[\![1, n]\!]$ et $(r_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbf{R}_+^*$ dont l'image dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^* / |\mathscr{H}(b)^*|)$ est libre. Notons $J = [\![1, n]\!] \setminus I$ et, pour $i \in J$, posons $r_i = 0$. Posons encore $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$. Notons x l'unique point de la fibre X_b qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |(T_i - \alpha_i)(x)| = r_i.$$

Proposition 2.4.3. — *Soit U un voisinage du point x dans X. Pour tout élément i de J, posons $s_i = 0$. Il existe un voisinage V du point b dans B_0, pour tout élément i de I, un élément s_i de $]0, r_i[$ et, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, un élément t_i de $]r_i, +\infty[$ tels que l'on ait l'inclusion*

$$\left\{ y \in X_V \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i \leq |(T_i - \alpha_i)(y)| \leq t_i \right\} \subset U.$$

Démonstration. — D'après le corollaire 1.1.12, pour toute partie compacte V de B_0 et tous éléments $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ de $\mathbf{R}_+$, la partie de X définie par

$$\{ y \in X_V \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ s_i \leq |(T_i - \alpha)(y)| \leq t_i \}$$

est compacte. Le résultat découle alors du lemme 2.4.1. □

Nous allons, à présent, préciser ce résultat. À cet effet, nous allons construire une application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ de B_0 dans

$$W = \left\{ y \in X_{B_0} \,\middle|\, \forall i \in [\![1,n]\!],\ |(T_i - \alpha_i)(y)| = r_i \right\}$$

qui soit une section du morphisme π au-dessus de B_0.

Soit c un point de B_0. Si le point c est associé à une valeur absolue ultramétrique, nous définissons $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(c)$ comme le point associé à la semi-norme multiplicative

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}[T_1,\dots,T_n] & \to & \mathbf{R}_+ \\ \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} a_{\boldsymbol{k}} \prod_{i=1}^{n} (T_i - \alpha_i)^{k_i} & \mapsto & \displaystyle\max_{\boldsymbol{k}\geq 0} \left(|a_{\boldsymbol{k}}(c)| \prod_{i=1}^{n} r_i^{k_i} \right) \end{array}.$$

Si le point c est associé à une valeur absolue archimédienne, alors le corps résiduel complété $\mathscr{H}(c)$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue $|.|_\infty^\varepsilon$, avec $\varepsilon \in]0,1]$. Nous définissons $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(c)$ comme le point $(\alpha_1 + r_1^{1/\varepsilon}, \dots, \alpha_n + r_n^{1/\varepsilon})$ de la fibre X_c, autrement dit, comme le point associé à la semi-norme multiplicative

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}[T_1,\dots,T_n] & \to & \mathbf{R}_+ \\ \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} a_{\boldsymbol{k}} \prod_{i=1}^{n} (T_i - \alpha_i)^{k_i} & \mapsto & \displaystyle\left| \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} a_{\boldsymbol{k}}(c) \prod_{i=1}^{n} r_i^{k_i/\varepsilon} \right|_\infty^\varepsilon \end{array}.$$

Lemme 2.4.4. — *L'application*

$$\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}} : B_0 \to W$$

est une section continue du morphisme π au-dessus de B_0.

Démonstration. — Le fait que l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ prenne ses valeurs dans W et soit une section de π est immédiat. Intéressons-nous, maintenant, à sa continuité. Rappelons que, par définition de la topologie de X, l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ est continue si, et seulement si, pour tout élément P de $\mathscr{A}[T_1,\dots,T_n]$, l'application

$$|P(.)| \circ \sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}} : \begin{array}{ccc} B_0 & \to & \mathbf{R}_+ \\ c & \mapsto & |P(\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(c))| \end{array}$$

est continue.

Considérons l'ouvert de B_0 défini par

$$B_1 = \left\{ c \in B_0 \,\middle|\, 2(c)| < 1 \right\}.$$

Chacun des points de cet ouvert est associé à une valeur absolue ultramétrique. Par conséquent, pour tout élément $P = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} a_{\boldsymbol{k}} \prod_{i=1}^{n} (T_i - \alpha_i)^{k_i}$ de $\mathscr{A}[T_1,\dots,T_n]$,

nous avons

$$|P(\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(c))| = \max_{\boldsymbol{k}\geq 0}\left(|a_{\boldsymbol{k}}(c)|\prod_{i=1}^{n} r_i^{k_i}\right).$$

On en déduit que l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ est continue sur B_1.

Considérons de même l'ouvert de B_0 défini par

$$B_2 = \left\{c \in B_0 \,\middle|\, 2(c)| > 1\right\}.$$

Chacun des points de cet ouvert est associé à une valeur absolue archimédienne. Par conséquent, pour tout élément $P = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} a_{\boldsymbol{k}} \prod_{i=1}^{n}(T_i - \alpha_i)^{k_i}$ de $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$, nous avons

$$|P(\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(c))| = \left|P\left(\alpha + r_1^{1/\varepsilon}, \ldots, \alpha + r_n^{1\varepsilon}\right)(c)\right|.$$

On en déduit que l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ est continue sur B_2.

Si le point central a_0 de B n'appartient pas à B_0, alors $B_0 = B_1 \cup B_2$ et nous avons montré que l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ est continue. Supposons, à présent, que le point a_0 appartienne à B_0. Par hypothèse, l'image dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}_+^*/|\mathscr{H}(b)^*|)$ de la famille $(r_i)_{i\in I}$ de $\mathbf{R}_+^*$ est libre. Puisque $|\mathscr{H}(a_0)^*| = \{1\}$ est contenu dans $|\mathscr{H}(b)^*|$ son image est encore libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^*/|\mathscr{H}(a_0)^*|)$. On en déduit que le point $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(a_0)$ est l'unique point du compact

$$\{y \in X_0 \,|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ |(T_i - \alpha_i)(y)| = r_i\}.$$

Soit U un voisinage du point $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}(a_0)$ dans X. D'après la proposition 2.4.3, il contient une partie de la forme

$$\left\{y \in X_V \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i \leq |(T_i - \alpha_i)(y)| \leq t_i\right\},$$

où V est un voisinage du point a_0 dans B_0, pour tout élément i de J, $s_i = 0$, pour tout élément i de I, s_i appartient à $]0, r_i[$ et, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, t_i appartient à $]r_i, +\infty[$. En particulier, il contient la partie $W \cap X_V$. Par conséquent, la partie $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}^{-1}(U)$ contient le voisinage V de a_0 dans B_0. On en déduit que l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ est continue au voisinage du point a_0.

Nous avons, à présent, traité le cas de tous les points de B_0. Nous avons donc bien montré que l'application $\sigma_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$ est continue. □

Cette section nous permet d'obtenir des informations supplémentaires sur les voisinages des points déployés des fibres.

Corollaire 2.4.5. — *Soient b un point de B, x un point déployé de la fibre X_b et U un voisinage du point x dans X. Il existe un voisinage V du point x dans U vérifiant les propriétés suivantes :*

i) la projection $\pi(V)$ est un voisinage du point $\pi(x) = b$ dans B ;

ii) il existe une section continue σ du morphisme de projection $V \to \pi(V)$;

iii) pour tout point b de $\pi(V)$, la trace de la fibre X_b sur V est connexe par arcs.

Démonstration. — Ce résultat découle directement de la proposition et du lemme qui précèdent. Le point *iii)* est vrai car pour tout corps valué complet k, tous éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de k et $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ de $\mathbf{R}_+$, la partie de l'espace analytique $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ définie par

$$\left\{ y \in \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}} \,\middle|\, \forall i \in [\![1,n]\!],\ s_i \leq |(T-\alpha_i)(y)| \leq t_i \right\}$$

est connexe par arcs. □

Corollaire 2.4.6. — *Soient b un point de B et x un point déployé de la fibre X_b. Le morphisme π est ouvert au point x.*

Corollaire 2.4.7. — *Soient b un point de B et x un point déployé de la fibre X_b. Si le point b de B possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs, alors il en est de même pour le point x de X.*

Nous pouvons, à présent, décrire explicitement les anneaux locaux aux points déployés des fibres. Reprenons les notations du début de ce numéro. Soient b un point de B et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un élément de $\mathscr{O}_{B,b}^n$. Soit B_0 un voisinage de b dans B sur lequel les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont définies.

Soient I une partie de $[\![1,n]\!]$ et $(r_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbf{R}_+^*$ dont l'image dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^*/|\mathscr{H}(b)^*|)$ est libre. Notons $J = [\![1,n]\!] \setminus I$ et, pour $i \in J$, posons $r_i = 0$. Posons encore $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$. Notons x l'unique point de la fibre X_b qui vérifie

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |(T_i - \alpha_i)(x)| = r_i.$$

Théorème 2.4.8. — *Le morphisme $\mathscr{A}[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme*

$$\varinjlim_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{t} \rangle \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x},$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages de b dans B_0, quel que soit $i \in J$, $s_i = 0$ et t_i parcourt $\mathbf{R}_+^*$, quel que soit $i \in I$, s_i et t_i parcourent respectivement $]0, r_i[$ et $]r_i, +\infty[$.

Démonstration. — Quitte à remplacer l'anneau $\mathscr{A}$ par $\mathscr{B}(U)$, où U désigne un voisinage compact rationnel de b assez petit, nous pouvons supposer que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}^n$. Cette opération est licite d'après le théorème 1.2.11. Quitte à appliquer la translation par le vecteur $-\boldsymbol{\alpha}$, qui est un automorphisme, nous pouvons supposer que $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

Soit V un voisinage compact du point b dans $\mathcal{M}(\mathscr{A})$, $\boldsymbol{s}$ un élément de $\mathbf{R}_+^n$ et $\boldsymbol{t}$ un élément de $\left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$ tels que $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$. D'après la proposition 2.1.1, le morphisme naturel $\mathscr{A}[T] \to \mathscr{B}(\overline{C}_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}))$ se prolonge en un morphisme

$$\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle \to \mathscr{B}(\overline{C}_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})).$$

La proposition 2.1.3 assure que ce morphisme est injectif. En utilisant la proposition 2.4.3, on en déduit qu'il existe un morphisme injectif

$$\varphi : \varinjlim_{V, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle \hookrightarrow \mathscr{O}_{X,x},$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B et $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}_+^n$ qui vérifient $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{r} < \boldsymbol{t}$.

Il nous reste à montrer que ce morphisme est surjectif. Soit f un élément de $\mathscr{O}_{X,x}$. Par définition du faisceau structural, il existe un voisinage U du point x dans X sur lequel la fonction f est la limite uniforme d'une suite de fractions rationnelles $(R_j)_{j \geq 0}$ à coefficients dans $\mathscr{A}$ sans pôles sur U. D'après la proposition 2.4.3, nous pouvons supposer que le voisinage U est de la forme

$$U = \overline{C}_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}),$$

où V désigne un voisinage compact rationnel du point b dans B, et $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$ qui vérifient $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{r} < \boldsymbol{t}$. Le morphisme naturel

$$\mathscr{A}[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$$

est injectif. D'après les propositions 1.2.15 et 2.1.1, ce morphisme induit un homéomorphisme

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle) \xrightarrow{\sim} U.$$

Soit P un élément de $\mathscr{A}[\boldsymbol{T}]$ qui ne s'annule en aucun point de U. D'après [**2**], corollaire 1.2.4, l'image de P est inversible dans l'anneau $\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$. On en déduit que l'anneau $\mathscr{K}(U)$ s'injecte dans $\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$.

Soient $\boldsymbol{u}$ un élément de $\mathbf{R}_+^n$ tel que $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{v}$ un élément de $\left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$ tel que $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{v} < \boldsymbol{t}$. L'anneau $\mathscr{K}(U)$ s'injecte encore dans l'anneau $\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{u} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{v}\rangle$. L'inégalité sur les normes démontrée dans la proposition 2.1.3 assure que la suite $(R_j)_{j \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'anneau $\mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{u} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{v}\rangle$. Puisque ce dernier anneau est complet, la suite $(R_j)_{j \geq 0}$ y converge et sa limite est envoyée sur la fonction f par le morphisme φ.

$\square$

2.5. Hensélianité

Nous commençons par montrer que les anneaux locaux de l'espace affine analytique X au-dessus de B sont henséliens. Nous décrivons ensuite un cadre dans lequel cette propriété peut déboucher sur l'existence d'un isomorphisme local entre espaces analytiques.

2.5.1. Démonstration

Proposition 2.5.1. — *Soit x un point de X. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est hensélien.*

Démonstration. — Rappelons que nous notons $\kappa(x) = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Soit $P(T)$ un polynôme unitaire de $\mathscr{O}_{X,x}[T]$ dont l'image dans $\kappa(x)[T]$ possède une racine simple α. D'après [**28**], chapitre VII, proposition 3, il nous suffit de montrer que α se relève en une racine de $P(T)$ dans $\mathscr{O}_{X,x}$.

Choisissons un élément f de $\mathscr{O}_{X,x}$ relevant α. Nous pouvons alors retraduire les hypothèses sous la forme $P(f)(x) = 0$ et $P'(f)(x) \neq 0$.

Soit U un voisinage compact de x dans X tel que les coefficients du polynôme P et l'élément f appartiennent à $\mathscr{B}(U)$. Quitte à restreindre U, nous pouvons supposer que la fonction $P'(f)$ y est inversible. Il existe un polynôme $Q(T_1, T_2) \in \mathscr{B}(U)[T_1, T_2]$, indépendant de f, tel que, quel que soit $g \in \mathscr{B}(U)$, on ait

$$\begin{aligned} P(f + P(f)g) &= P(f) + P'(f)P(f)g + P(f)^2 g^2 Q(f, g) \\ &= P'(f)P(f)\left(\tfrac{1}{P'(f)} + g + \tfrac{P(f)}{P'(f)}\, g^2 Q(f, g)\right). \end{aligned}$$

Notons $d \in \mathbf{N}$ le degré du polynôme $Q(f, T)$. Soit $t \in]0, 1[$. Quitte à restreindre encore le voisinage U de x, nous pouvons supposer que $t/(d+1)$ majore la norme uniforme sur U de tous les coefficients du polynôme

$$R(T) = -\frac{P(f)}{P'(f)}\, T^2 Q(f, T).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathscr{B}(U),\ \|R(g)\|_U &\leq \sum_{i=2}^{d+2} \tfrac{t}{d+1}\, \|g\|_U^i \\ &\leq t \max\left(\|g\|_U^2, \|g\|_U^{d+2}\right). \end{aligned}$$

En particulier, si $g \in \mathscr{B}(U)$ vérifie $\|g\|_U \leq 1$, alors nous avons encore $\|R(g)\|_U \leq 1$.

Quitte à diminuer t, nous pouvons supposer que

$$t \max\left(\left\|\frac{-1}{P'(f)}\right\|_U^2, \left\|\frac{-1}{P'(f)}\right\|_U^{d+2}\right) \leq 1.$$

Nous avons alors

$$\left\|R\left(\frac{-1}{P'(f)}\right)\right\|_U \leq 1.$$

On en déduit que, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\left\|R^{\circ n}\left(\frac{-1}{P'(f)}\right)\right\|_U \leq 1,$$

où $R^{\circ n}$ désigne l'application R élevée à la puissance n pour la loi de composition.

En utilisant le fait que, si un élément b de $\mathscr{B}(U)$ vérifie $\|b\|_U \leq 1$, alors

$$\|R(b)\| \leq t\,\|b\|_U^2,$$

on montre, à l'aide d'une récurrence, que, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\left\|R^{\circ n}\left(\frac{-1}{P'(f)}\right)\right\|_U \leq t^{2^{n-1}-1}.$$

En particulier, la série

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} R^{\circ n}\left(\frac{-1}{P'(f)}\right)$$

converge dans $\mathscr{B}(U)$. Notons s sa somme. Elle vérifie l'équation

$$s - R(s) = -\frac{1}{P'(f)}.$$

On en déduit que $P(f + P(f)s) = 0$. Puisque $P(f)$ est nul dans $\kappa(x)$, l'élément $f + P(f)s$ de $\mathscr{O}_{X,x}$ relève bien α. □

Corollaire 2.5.2. — *Soit $(Z, \mathscr{O}_Z)$ un espace analytique sur $\mathscr{A}$ (au sens de la définition 1.1.27). Pour tout point z de Z, l'anneau local $\mathscr{O}_{Z,z}$ est hensélien.*

Démonstration. — Par définition, l'anneau local $\mathscr{O}_{Z,z}$ est le quotient de l'anneau local en un point d'un espace affine analytique sur $\mathscr{A}$. Ce dernier anneau est hensélien, d'après la proposition précédente. Cela suffit pour conclure car tout quotient d'un anneau hensélien est hensélien. □

2.5.2. Isomorphismes locaux

Le caractère hensélien d'un anneau local peut être interprété comme une sorte de théorème des fonctions implicites. Par la suite, nous utiliserons effectivement cette propriété pour démontrer des résultats d'isomorphie. La proposition qui suit donne un exemple d'application.

Soit $P(S)$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{A}$. Notons $d \in \mathbf{N}$ son degré. Nous nous intéresserons à l'algèbre

$$\mathscr{A}' = \mathscr{A}[S]/(P(S)).$$

Puisque le polynôme est unitaire, le morphisme

$$n : \begin{array}{ccc} \mathscr{A}^d & \to & \mathscr{A}' \\ (a_0, \ldots, a_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. Munissons l'algèbre $\mathscr{A}^d$ de la norme $\|.\|_\infty$ donnée par le maximum des normes des coefficients. On définit alors une norme, notée $\|.\|_{\mathrm{div}}$, sur $\mathscr{A}'$ de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathscr{A}',\ \|f\|_{\mathrm{div}} = \|n^{-1}(f)\|_\infty.$$

Cette norme n'est pas, *a priori*, une norme d'algèbre. Nous supposerons donc que l'algèbre $\mathscr{A}'$ est munie d'une norme d'algèbre $\|.\|'$ équivalente à la norme $\|.\|_{\mathrm{div}}$: il existe deux constantes $D_-, D_+ > 0$ telles que

$$\forall f \in \mathscr{A}',\ D_- \|f\|_{\mathrm{div}} \leq \|f\|' \leq D_+ \|f\|_{\mathrm{div}}.$$

Munie de la norme $\|.\|'$, l'algèbre $\mathscr{A}'$ est une algèbre de Banach. En outre, le morphisme $(\mathscr{A}, \|.\|) \to (\mathscr{A}', \|.\|')$ est borné. Nous noterons

$$\varphi : X' = \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}} = X$$

le morphisme induit entre les espaces analytiques.

Soit U une partie ouverte de X et supposons qu'il existe une fonction R définie sur U vérifiant $P(R) = 0$. Signalons qu'en pratique, nous déduirons l'existence d'une telle fonction du caractère hensélien d'un certain anneau local.

Nous pouvons alors définir une application σ de $U \subset X$ vers X'. Soit x un point de U. Soit $p(\boldsymbol{T}) = \sum_{\boldsymbol{k} \geq 0} p_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$, où la famille $(p_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \geq 0}$ est une famille presque nulle d'éléments de $\mathscr{A}'$. Quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n$, relevons l'élément $p_{\boldsymbol{k}}$ de

$\mathscr{A}'$ en un élément $q_{\boldsymbol{k}}(S)$ de $\mathscr{A}[S]$. Considérons l'application

$$\chi_{\sigma(x)} : \begin{array}{ccc} \mathscr{A}'[\boldsymbol{T}] & \to & \mathscr{H}(x) \\ p(\boldsymbol{T}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} q_{\boldsymbol{k}}(R(x))\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}(x) \end{array} .$$

Puisque $P(R(x)) = 0$, cette application ne dépend pas du choix des différents relevés. On en déduit aussitôt que $\chi_{\sigma(x)}$ est un morphisme de $\mathscr{A}$-algèbres. Montrons que ce morphisme est borné sur $\mathscr{A}'$. Soit $f \in \mathscr{A}'$. Il existe $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathscr{A}$ tels que

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\, S^i \text{ dans } \mathscr{A}'.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \left|\chi_{\sigma(x)}(f)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{d-1} a_i(x)\, R(x)^i\right| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |R(x)^i|\right) \max_{0\leq i\leq d-1}(|a_i(x)|) \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |R(x)^i|\right) \max_{0\leq i\leq d-1}(\|a_i\|) \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |R(x)^i|\right) D_-^{-1}\, \|f\|'. \end{aligned}$$

Par conséquent, le morphisme $\chi_{\sigma(x)}$ est borné sur $\mathscr{A}'$. C'est donc un caractère de $\mathscr{A}'[\boldsymbol{T}]$. Nous noterons $\sigma(x)$ le point de X' associé. L'application σ ainsi construite est une section continue de φ au-dessus de U. Sous certaines hypothèses, nous pouvons obtenir un résultat bien plus fort. Nous noterons α l'image de S dans $\mathscr{A}'$.

Proposition 2.5.3. — *Supposons que*

i) la norme $\|.\|'$ sur $\mathscr{A}'$ est uniforme et équivalente à la norme $\|.\|_{div}$;
ii) l'ouvert U est connexe ;
iii) la fonction $P'(\alpha)$ est inversible sur $\varphi^{-1}(U)$;
iv) il existe un point $x_0 \in U$ tel que $R(\sigma(x_0)) = \alpha$ dans $\mathscr{H}(\sigma(x_0))$.

Alors la partie $\sigma(U)$ est ouverte dans X' et la section σ induit un isomorphisme entre les espaces U et $\sigma(U)$, munis des structures d'espaces localement annelés induites.

Démonstration. — Le polynôme $P(T)$ possède une unique factorisation dans $\mathscr{A}'[T]$ sous la forme $P(T) = (T - \alpha)Q(T)$, avec $Q(T) \in \mathscr{A}'[T]$. Quel que soit le

point x' de $\varphi^{-1}(U)$, nous avons $P(R(x')) = 0$, d'où l'on tire soit $R(x') = \alpha$, soit $Q(R(x')) = 0$. Ces deux conditions ne peuvent valoir simultanément, puisque, par hypothèse, nous avons $P'(\alpha)(x') \neq 0$. Par conséquent, la partie de X' définie par

$$U' = \{x' \in \varphi^{-1}(U) \mid R(x') = \alpha\}$$

est ouverte.

Montrons, à présent, que $\sigma(U) = U'$. Par hypothèse, nous avons $R(\sigma(x_0)) = \alpha$, autrement dit, le point $\sigma(x_0)$ appartient à U'. Puisque l'ouvert U est connexe, la partie $\sigma(U)$ l'est encore. Nous en déduisons l'inclusion $\sigma(U) \subset U'$.

Réciproquement, soit x' un point de U'. Par définition de U', nous avons $R(x') = \alpha$. Notons $x \in U$ son image par le morphisme φ. Soit $p(\boldsymbol{T}) = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} p_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$, où la famille $(p_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\geq 0}$ est une famille presque nulle d'éléments de $\mathscr{A}[S]/(P(S))$. Quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n$, relevons l'élément $p_{\boldsymbol{k}}$ en un élément $q_{\boldsymbol{k}}$ de $\mathscr{A}[S]$. Le caractère $\chi_{\sigma(x)}$ envoie le polynôme $p_{\boldsymbol{k}}$ sur l'élément

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} q_{\boldsymbol{k}}(R(x))\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}(x) \text{ de } \mathscr{H}(x).$$

L'image de cet élément par l'injection $\mathscr{H}(x) \hookrightarrow \mathscr{H}(x')$ n'est autre que

$$\sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} q_{\boldsymbol{k}}(R(x'))\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}(x') = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} q_{\boldsymbol{k}}(\alpha)\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}(x) = p(\boldsymbol{T}(x')) \text{ dans } \mathscr{H}(x').$$

On en déduit que $\sigma(x) = x'$.

Nous venons de démontrer que le morphisme φ réalise un homéomorphisme de l'ouvert U' de X' sur l'ouvert U de X. Nous allons prouver qu'il induit même un isomorphisme entre les espaces annelés. Soit x' un point de U'. Notons $x \in U$ son image par le morphisme φ. Il suffit de montrer que le morphisme

$$\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X',x'}$$

induit par φ est un isomorphisme. Montrons, tout d'abord, qu'il est injectif. Soit f une fonction analytique définie sur un voisinage V de x dans U dont l'image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X',x'}$ est nulle. Il existe alors un voisinage W' du point x' dans $\varphi^{-1}(V)$ tel que, quel que soit y' dans W', nous ayons

$$\varphi^*(f)(y') = 0 \text{ dans } \mathscr{H}(y').$$

On en déduit que, quel que soit y dans $\varphi(W')$, nous avons

$$f(y) = 0 \text{ dans } \mathscr{H}(y).$$

La partie $W = \varphi(W')$ est un voisinage de x dans X, car φ est un homéomorphisme sur U', et la fonction f est nulle en tout point de ce voisinage. Cette condition

impose que à la fonction f d'être nulle en tant qu'élément de $\mathscr{O}_X(W)$, et donc dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$, car l'algèbre $\mathscr{A}$ est munie d'une norme uniforme.

Montrons, à présent, que le morphisme entre les anneaux locaux est surjectif. Soit $f' \in \mathscr{O}_{X',x'}$. Il existe un voisinage ouvert V' de x' dans U' et une suite $(R'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{K}(V')$ qui converge vers f' uniformément sur V'.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Il existe deux éléments p' et q' de $\mathscr{A}'[\boldsymbol{T}]$, q' ne s'annulant pas sur V', tels que $R'_n = p'/q'$ dans $\mathscr{K}(V')$. Il existe une famille presque nulle $(p'_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}'$ telle que

$$p'(\boldsymbol{T}) = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} p'_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}.$$

Quel que soit $\boldsymbol{k}$ dans $\mathbf{N}^n$, relevons l'élément $p'_{\boldsymbol{k}}$ en un élément $p_{\boldsymbol{k}}$ de $\mathscr{A}[S]$. Puisque $V = \varphi(V')$ est contenu dans U, la fonction R y est définie. Il en est donc de même pour la fonction

$$p(\boldsymbol{T}) = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} p_{\boldsymbol{k}}(R)\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \text{ de } \mathscr{O}_X(V).$$

Par définition de U', au-dessus de U', nous avons $R = \alpha$. On en déduit que

$$\varphi^*(p) = \sum_{\boldsymbol{k}\geq 0} p_{\boldsymbol{k}}(\alpha)\, \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} = p' \text{ dans } \mathscr{O}_X(V').$$

En procédant comme précédemment, on montre qu'il existe un élément q de $\mathscr{O}_X(V)$ tel que

$$\varphi^*(q) = q' \text{ dans } \mathscr{O}_X(V').$$

Puisque la fonction q' ne s'annule pas sur V', la fonction q ne s'annule pas sur V et elle est donc inversible dans $\mathscr{O}_X(V)$. L'élément $R_n = pq^{-1}$ de $\mathscr{O}_X(V)$ vérifie l'égalité

$$\varphi^*(R_n) = R'_n \text{ dans } \mathscr{O}_X(V').$$

Puisque la suite $(R'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur V', la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme sur toute partie compacte de V. Elle converge donc vers une fonction f de $\mathscr{O}_X(V)$. Cette fonction vérifie

$$\varphi^*(f) = f'$$

dans $\mathscr{O}_X(V')$ et donc dans $\mathscr{O}_{X',x'}$. C'est ce que nous voulions démontrer.

□

Remarque 2.5.4. — En général, il n'est pas aisé de montrer que l'hypothèse *i)* de la proposition précédente est satisfaite. Nous établirons, dans un chapitre ultérieur, des critères permettant de l'assurer (*cf.* lemme 5.2.3 et proposition 5.2.7).

Nous prouverons également qu'elle est vérifiée dans trois cas particuliers, dans la preuve des propositions 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3.

CHAPITRE 3

ESPACE AFFINE ANALYTIQUE AU-DESSUS D'UN ANNEAU D'ENTIERS DE CORPS DE NOMBRES

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces analytiques au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Dans ce cadre, nous allons pouvoir préciser et généraliser les résultats obtenus au chapitre précédent.

Dans le numéro 3.1, nous nous intéressons au spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres A. Nous commençons par le décrire ensemblistement et poursuivons en établissant ses propriétés topologiques. Pour finir, nous étudions les anneaux de sections du faisceau structural au-dessus des ouverts de cet espace et en tirons une description des anneaux locaux.

Dans la suite du chapitre, nous considérons des espaces affines de dimension quelconque. Au numéro 3.2, nous commençons par reprendre, pour les préciser dans le cadre que nous avons choisi, les descriptions des anneaux locaux que nous avons déjà obtenues. À titre d'application, nous utilisons le caractère hensélien d'un certain anneau local pour donner une nouvelle démonstration d'un théorème classique d'Eisenstein (*cf.* théorème 3.2.10). À la fin de ce numéro, nous nous intéressons aux anneaux de sections globales sur les disques et couronnes relatifs et en proposons une description explicite.

Les numéros 3.3 et 3.4 sont consacrés à l'étude de certains types de points : points rigides des fibres, puis points internes. Pour ceux-ci, nous décrivons des systèmes fondamentaux de voisinages et démontrons quelques propriétés algébriques des anneaux locaux. Nous n'avons malheureusement pas pu adapter les méthodes mises en œuvre ici pour traiter le cas des autres types de points : certains problèmes ont, jusqu'ici, résisté à nos tentatives et nécessitent vraisemblablement une approche nouvelle.

Au numéro 3.5, nous nous intéressons à la dimension topologique des espaces affines au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres.

Finalement, le numéro 3.6 est consacré au prolongement analytique. Il ne contient presque aucun résultat et nous nous contentons d'y énoncer quelques définitions et propriétés liées à cette question, en vue d'une utilisation ultérieure.

Dans ce chapitre, nous fixons un corps de nombres K. Nous notons A l'anneau de ses entiers.

3.1. Spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Dans cette partie, nous allons étudier le spectre analytique de l'anneau d'entiers de corps de nombres A. Pour ce faire, nous devons le munir d'une norme qui en fasse un anneau de Banach. Plusieurs choix d'offrent à nous : norme triviale, restriction de la valeur absolue complexe, etc. Nous choisirons la norme $\|.\|$ définie de la façon suivante :

$$\forall f \in A,\ \|f\| = \max_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} (|\sigma(f)|_\infty),$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des plongements σ du corps K dans $\mathbf{C}$. Par exemple, lorsque $K = \mathbf{Q}$, cette norme est simplement la valeur absolue usuelle $|.|_\infty$. Notre choix est guidé par le fait que cette norme est plus grande que toutes les semi-normes multiplicatives que l'on peut définir sur l'anneau A. Le spectre $\mathcal{M}(A, \|.\|)$ contiendra donc tous les points possibles.

Remarquons que l'anneau A muni de la norme $\|.\|$ est bien un anneau de Banach. En effet, quel que soit $f \in A \setminus \{0\}$, nous avons $\|f\| \geq 1$. Cette inégalité découle simplement de la formule du produit. Par conséquent, la topologie induite sur A par la norme $\|.\|$ est discrète.

Dans la suite de ce texte, nous supposerons toujours que l'anneau A est muni de la norme $\|.\|$. Nous écrirons donc $\mathcal{M}(A)$ et $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, pour tout entier n, sans plus de précisions. Nous noterons simplement $\mathscr{O}$ le faisceau structural sur l'espace $\mathcal{M}(A)$.

3.1.1. Description ensembliste et topologique

Le théorème d'Ostrowski nous permet de décrire explicitement toutes les semi-normes multiplicatives sur A, autrement dit l'ensemble $\mathcal{M}(A)$.

Nous avons, tout d'abord, la valeur absolue triviale

$$|.|_0 : \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } f = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Nous noterons a_0 le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathscr{H}(a_0), |.|) = (K, |.|_0).$$

Soit p un nombre premier. Nous noterons v_p la valuation p-adique sur $\mathbf{Q}$ et $|.|_p$ la valeur absolue p-adique définie par

$$|.|_p : \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \to & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & p^{-v_p(f)} \end{array}.$$

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. L'anneau local $A_\mathfrak{m}$ est un anneau de valuation discrète. Notons $k_\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel. Choisissons une uniformisante $\pi_\mathfrak{m}$ de $A_\mathfrak{m}$. Nous noterons encore $\hat{A}_\mathfrak{m}$ le complété de $A_\mathfrak{m}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique et $\hat{K}_\mathfrak{m}$ son corps des fractions. Notons $p_\mathfrak{m}$ le nombre premier tel que $\mathfrak{m} \cap \mathbf{Z} = p_\mathfrak{m}\,\mathbf{Z}$. Le corps $\hat{K}_\mathfrak{m}$ est alors une extension finie du corps $\mathbf{Q}_{p_\mathfrak{m}}$, dont nous noterons $n_\mathfrak{m}$ le degré. Nous noterons $|.|_\mathfrak{m}$ l'unique valeur absolue sur K qui prolonge la valeur absolue $|.|_{p_\mathfrak{m}}$ sur $\mathbf{Q}$. Pour tout élément f de K, nous avons

$$|f|_\mathfrak{m} = \left| N_{\hat{K}_\mathfrak{m}/\mathbf{Q}_{p_\mathfrak{m}}}(f) \right|_{p_\mathfrak{m}}^{1/n_\mathfrak{m}}.$$

Nous noterons $a_\mathfrak{m}$ le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant à la valeur absolue $|.|_\mathfrak{m}$.

À chaque nombre réel strictement positif ε, on associe alors la valeur absolue $|.|_\mathfrak{m}^\varepsilon$ sur K. Nous noterons $a_\mathfrak{m}^\varepsilon$ le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathscr{H}(a_\mathfrak{m}^\varepsilon), |.|) = (\hat{K}_\mathfrak{m}, |.|_{\mathfrak{m},\varepsilon}).$$

Lorsque nous faisons tendre ε vers 0 dans la formule précédente, nous retrouvons la valeur absolue triviale. Nous noterons donc

$$a_\mathfrak{m}^0 = a_0.$$

Lorsque nous faisons tendre ε vers $+\infty$, nous obtenons la semi-norme multiplicative induite par la valeur absolue triviale sur le corps fini $k_\mathfrak{m}$:

$$|.|_{\mathfrak{m},\infty} : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } f \in \mathfrak{m} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Nous noterons $\tilde{a}_\mathfrak{m}$, ou encore $a_\mathfrak{m}^{+\infty}$, le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathscr{H}(\tilde{a}_\mathfrak{m}), |.|) = (\tilde{k}_\mathfrak{m}, |.|_0).$$

Soit σ un plongement du corps K dans $\mathbf{C}$. Nous poserons $\hat{K}_\sigma = \mathbf{R}$ si le plongement est réel, c'est-à-dire si son image est contenue dans $\mathbf{R}$, et $\hat{K}_\sigma = \mathbf{C}$

dans les autres cas. Nous noterons $|.|_\sigma$ la valeur absolue sur K définie par

$$|.|_\sigma : \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & |\sigma(f)|_\infty \end{array},$$

où $|.|_\infty$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{C}$. Nous noterons a_σ le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Remarquons que deux plongements complexes conjugués définissent la même valeur absolue et donc le même point de $\mathcal{M}(A)$. Nous noterons n_σ le degré de l'extension $\hat{K}_\sigma/\mathbf{R}$.

À chaque nombre réel $\varepsilon \in [0,1]$, on associe la valeur absolue $|.|_\sigma^\varepsilon$ sur K. Nous noterons a_σ^ε le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathscr{H}(a_\sigma^\varepsilon), |.|) = (\hat{K}_\sigma, |.|_{\sigma,\varepsilon}).$$

Remarque 3.1.1. — Pour $\varepsilon > 1$, l'application $|.|_\sigma^\varepsilon$ ne définit plus une norme, car elle ne satisfait plus l'inégalité triangulaire.

Comme précédemment, lorsque nous faisons tendre ε vers 0, nous retrouvons la valeur absolue triviale. Nous noterons donc

$$a_\sigma^0 = a_0.$$

Adoptons quelques notations supplémentaires. Nous noterons $\Sigma_f = \mathrm{Max}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et Σ_∞ l'ensemble des plongements du corps K dans le corps $\mathbf{C}$, à conjugaison près. Désignons par r_1 le nombre de plongements réels de K et par $2r_2$ son nombre de plongements complexes non réels. Nous avons alors

$$\sharp\,(\Sigma_\infty) = r_1 + r_2.$$

Rappelons que l'on a l'égalité $r_1 + 2r_2 = [K : \mathbf{Q}]$.

Pour finir, nous notons $\Sigma = \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$ et posons

$$l(\sigma) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma \in \Sigma_f\ ; \\ 1 & \text{si } \sigma \in \Sigma_\infty. \end{cases}$$

Proposition 3.1.2 (formule du produit). — *Pour tout élément non nul f de K, nous avons l'égalité*

$$\prod_{\sigma\in\Sigma} |f|_\sigma^{n_\sigma} = 1.$$

Théorème 3.1.3 (Ostrowski). — *L'ensemble $\mathcal{M}(A)$ est constitué exactement des points décrits précédemment.*

Démonstration. — Soit b un point de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Notons

$$\mathfrak{p}_b = \left\{ f \in A \,\middle|\, |f(b)| = 0 \right\}.$$

C'est un idéal premier de l'anneau A. Puisque l'anneau A est un anneau de Dedekind, l'idéal $\mathfrak{p}_b$ est soit l'idéal nul, soit un idéal maximal.

Supposons, tout d'abord, que $\mathfrak{p}_b$ est un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Dans ce cas, la semi-norme multiplicative $|.|_b$ associée au point b induit une valeur absolue sur le quotient $A/\mathfrak{m}$. Or, ce quotient est un corps fini. Il ne peut donc être muni que de la valeur absolue triviale. On en déduit que le point b n'est autre que le point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$.

Supposons, maintenant, que $\mathfrak{p}_b$ est l'déal nul. Dans ce cas, la semi-norme multiplicative $|.|_b$ associée au point b est une valeur absolue sur l'anneau A. La version habituelle du théorème d'Ostrowski entraîne alors le résultat. □

La description explicite des points nous permet de décrire, de façon tout aussi explicite, la topologie de l'espace $\mathcal{M}(A)$.

Lemme 3.1.4. — *Soit $\sigma \in \Sigma$. L'application*

$$a_\sigma^{\cdot} : \begin{array}{ccc} [0, l(\sigma)] & \to & \mathcal{M}(A) \\ \varepsilon & \mapsto & a_\sigma^\varepsilon \end{array}$$

induit un homéomorphisme sur son image.

Démonstration. — Par définition de la topologie de $\mathcal{M}(A)$, pour montrer que l'application $a_\sigma^{\cdot}$ est continue, il suffit de montrer que, quel que soit $f \in A$, l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} [0, l(\sigma)] & \to & \mathcal{M}(A) & \to & \mathbf{R}_+ \\ \varepsilon & \mapsto & a_\sigma^\varepsilon & \mapsto & |f(a_\sigma^\varepsilon)| = |f|_\sigma^\varepsilon \end{array}$$

est continue. Ce résultat est immédiat. Puisque l'espace $[0, l(\sigma)]$ est compact et que l'espace $\mathcal{M}(A)$ est séparé, l'application $a_\sigma^{\cdot}$ induit un homéomorphisme sur son image. □

Définition 3.1.5. — *Soit $\sigma \in \Sigma$. On appelle* **branche σ-adique** *l'image de l'application précédente et on la note $\mathcal{M}(A)_\sigma$. On appelle* **branche σ-adique ouverte**, *et on note $\mathcal{M}(A)'_\sigma$, la branche σ-adique privée des points associés à une valeur absolue triviale. Nous ôtons donc deux points si $\sigma \in \Sigma_f$, mais un seul point si $\sigma \in \Sigma_\infty$. Signalons que ces branches ouvertes sont les trajectoires du flot, au sens du numéro 1.3. Précisément, quel que soit $\varepsilon \in]0, l(\sigma)]$ tel que $a_\sigma^\varepsilon \in \mathcal{M}(A)'_\sigma$, nous avons*

$$T_{\mathcal{M}(A)}(a_\sigma^\varepsilon) \simeq \mathcal{M}(A)'_\sigma.$$

On appelle **branche σ-adique semi-ouverte**, *et on note $\mathcal{M}(A)''_\sigma$, la branche σ-adique privée du point associé à la valeur absolue triviale sur A. Cette définition coïncide avec la précédente dans le cas des éléments de Σ_∞.*

On appelle **point central** *de* $\mathcal{M}(A)$ *le point* a_0*. On appelle* **point extrême** *de* $\mathcal{M}(A)$ *tout point de la forme* $\tilde{a}_m$*, où* $\mathfrak{m}$ *est un élément de* Σ_f*. Enfin, on appelle* **point interne** *de* $\mathcal{M}(A)$ *tout autre point. En particulier, quel que soit* $\sigma \in \Sigma_\infty$*, le point* $a_\sigma = a_\sigma^1$ *est un point interne.*

Afin de décrire plus précisément la topologie de l'espace $\mathcal{M}(A)$, nous aurons besoin de quelques résultats de théorie des nombres.

Lemme 3.1.6. — *Soit* $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$*. Alors il existe un élément* f *de* A *qui vérifie les propriétés suivantes :*

i) $|f|_{\mathfrak{m}} < 1$ *;*
ii) $\forall \mathfrak{m}' \in \Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|f|_{\mathfrak{m}'} = 1$.

Démonstration. — Notons P le point de $\mathrm{Spec}(A)$ associé à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Puisque le groupe de Picard de $\mathrm{Spec}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que le diviseur $N[P]$ soit principal. Tout élément f de A dont $N[P]$ est le diviseur convient. □

Lemme 3.1.7. — *Supposons que le corps* K *ne soit ni* $\mathbf{Q}$*, ni un corps quadratique imaginaire. Alors, quel que soit* $\sigma \in \Sigma$*, il existe un élément* f *de* A *qui vérifie les conditions suivantes :*

i) $|f|_\sigma < 1$ *;*
ii) $\forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}$, $|f|_{\sigma'} = 1$ *;*
iii) $\forall \sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}$, $|f|_{\sigma'} > 1$.

Démonstration. — Notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$, avec $r_1 \in \mathbf{N}$, les plongements réels du corps K et $\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}$, avec $r_2 \in \mathbf{N}$, ses plongements complexes non réels à conjugaison près. Par hypothèse, nous avons $r_1 + r_2 \geq 2$. Rappelons que, d'après le théorème des unités de Dirichlet, le morphisme de groupes L qui à toute unité $f \in A^\times$ associe l'élément

$$\big(\log(|\sigma_1(g)|), \ldots, \log(|\sigma_{r_1}(g)|), 2\log(|\sigma_{r_1+1}(g)|), \ldots, 2\log(|\sigma_{r_1+r_2}(g)|)\big)$$

de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ a pour image un réseau de l'hyperplan H de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ défini par l'équation

$$H \ : \ x_1 + \cdots + x_{r_1+r_2} = 0.$$

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Il existe alors $i \in [\![1, r_1 + r_2]\!]$ tel que $\sigma = \sigma_i$. Considérons le quadrant de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ défini par

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_{r_1+r_2}) \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \,|\, x_i < 0, \forall j \neq i, \, x_j > 0\}.$$

Le résultat rappelé ci-dessus assure qu'il existe une unité $f \in A^\times$ telle que

$$L(f) \in Q.$$

Nous avons alors $|f|_{\sigma_i} < 1$, quel que soit $j \neq i$, $|f|_{\sigma_j} > 1$ et, quel que soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$, $|f|_{\mathfrak{m}} = 1$.

D'après le lemme 3.1.6, il existe un élément f de A qui vérifie $|f|_{\mathfrak{m}} < 1$ et, pour tout élément $\mathfrak{m}$ de $\Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|f|_{\mathfrak{m}'} = 1$. La formule du produit assure alors que

$$\prod_{i=1}^{r_1} |f|_{\sigma_i} \prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |f|_{\sigma_i}^2 > 1.$$

Notons $L(f) = (y_1, \ldots, y_{r_1+r_2}) \in R^{r_1+r_2}$. Nous avons alors

$$S = \sum_{i=1}^{r_1+r_2} y_i > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $S > (r_1 + r_2 - 1)\varepsilon$. Posons

$$z_0 = \big(-y_1 + \varepsilon, \ldots, -y_{r_1+r_2-1} + \varepsilon, -y_{r_1+r_2} + S - (r_1 + r_2 - 1)\varepsilon \big) \in H.$$

Nous avons $L(f) + z_0 \in (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2}$. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans H de volume v strictement positif tel que

$$L(f) + U \subset (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel nv soit strictement plus grand que le volume d'une maille du réseau $L(A^\times)$. La partie

$$nL(f) + nU \subset (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2}$$

contient alors un élément z du réseau $L(A^\times)$. Il existe $g \in A^\times$ tel que $L(g) = z$. Posons $h = f^n g$. Nous avons toujours $|h|_{\mathfrak{m}} < 1$ et, quel que soit $\mathfrak{m}' \in \Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|h|_{\mathfrak{m}'} = 1$. En outre, nous avons

$$L(h) \in (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2},$$

autrement dit, quel que soit $i \in [\![1, r_1 + r_2]\!]$, $|h|_{\sigma_i} > 1$. □

Lemme 3.1.8. — *Supposons que le corps K soit $\mathbf{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire. Dans ce cas, Σ_∞ est réduit à un élément que nous noterons σ_∞. Alors, pour tout élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f, il existe un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :*

i) $|f|_{\mathfrak{m}} < 1$;
ii) $|f|_{\sigma_\infty} > 1$;
iii) $\forall \mathfrak{m}' \in \Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|f|_{\mathfrak{m}'} = 1$.

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.6, il existe un élément f de A vérifiant $|f|_{\mathfrak{m}} < 1$ et, pour tout élément $\mathfrak{m}'$ de $\Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|f|_{\mathfrak{m}'} = 1$. La formule du produit (*cf.* proposition 3.1.2) assure alors que $|f|_{\sigma_\infty} > 1$. □

Corollaire 3.1.9. — *Soit $\sigma \in \Sigma$. L'ensemble*

$$\mathcal{M}(A)''_\sigma = \{a_\sigma^\varepsilon,\ \varepsilon \in]0, l(\sigma)]\}$$

est un ouvert de l'espace $\mathcal{M}(A)$.

Ce corollaire joint au lemme 3.1.4 permet de décrire la topologie au voisinage de tout point de l'espace $\mathcal{M}(A)$ différent du point central. Intéressons-nous, à présent, à ce dernier.

Lemme 3.1.10. — *Soit V un voisinage du point a_0 dans $\mathcal{M}(A)$. Il existe un sous-ensemble fini Σ_V de Σ tel que, pour tout élément σ de $\Sigma \backslash \Sigma_V$, la branche $\mathcal{M}(A)_\sigma$ soit contenue dans V.*

Démonstration. — Par définition de la topologie, il existe $r \in \mathbf{N}$, $f_1, \ldots, f_r \in A$, $s_1, \ldots, s_r, t_1, \ldots, t_r \in \mathbf{R}$ tels que la partie

$$W = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{b \in \mathcal{M}(A) \mid s_i < |f_i(b)| < t_i\}$$

soit un voisinage du point a_0 dans V.

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Supposons, tout d'abord, que $f_i = 0$. Nous avons alors $f_i(a_0) = 0$ et donc $s_i < 0$ et $t_i > 0$. Posons $\Sigma_i = \emptyset$. Nous avons alors

$$\{b \in \mathcal{M}(A) \mid s_i < |f_i(b)| < t_i\} = \mathcal{M}(A) = \bigcup_{\sigma \notin \Sigma_i} \mathcal{M}(A)_\sigma.$$

Supposons, à présent, que $f_i \neq 0$. Nous avons alors $|f_i(a_0)| = 1$ et donc $s_i < 1$ et $t_i > 1$. Posons

$$\Sigma_i = \{\mathfrak{m} \in \Sigma_f \mid f_i \in \mathfrak{m}\} \cup \Sigma_\infty.$$

C'est un sous-ensemble fini de Σ qui vérifie

$$\{b \in \mathcal{M}(A) \mid s_i < |f_i(b)| < t_i\} \supset \bigcup_{\sigma \notin \Sigma_i} \mathcal{M}(A)_\sigma.$$

Le sous-ensemble fini $\Sigma_V = \bigcup_{1 \leq i \leq r} \Sigma_i$ satisfait alors la condition voulue. □

Lemme 3.1.11. — *Notons $\mathscr{V}_0$ l'ensemble des parties de $\mathcal{M}(A)$ qui vérifient les propriétés suivantes : pour tout élément V de $\mathscr{V}_0$, il existe un sous-ensemble fini Σ_V de Σ et, pour tout élément σ de Σ_V, il existe un élément ε_σ de $]0, l(\sigma)]$ tels que*

$$V = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} [a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}[\ \cup \bigcup_{\sigma \notin \Sigma_0} \mathcal{M}(A)_\sigma.$$

L'ensemble $\mathscr{V}_0$ est un système fondamental de voisinages ouverts du point a_0 dans $\mathcal{M}(A)$.

Démonstration. — Le fait que les éléments de $\mathscr{V}_0$ soient des ouverts de $\mathcal{M}(A)$ découle des lemmes 3.1.7 et 3.1.8. Il nous suffit donc de montrer que tout voisinage du point central a_0 contient un élément de $\mathscr{V}_0$.

Soit U un voisinage du point a_0 dans $\mathcal{M}(A)$. D'après le lemme précédent, il existe un sous-ensemble fini Σ_U de Σ tel que, pour tout élément σ de $\Sigma \setminus \Sigma_U$, la branche $\mathcal{M}(A)_\sigma$ soit contenue dans U. Pour tout élément σ de Σ_U, la partie $U \cap \mathcal{M}(A)_\sigma$ est un voisinage du point a_0 dans $\mathcal{M}(A)_\sigma$. Le lemme 3.1.4 assure alors qu'il existe un élément ε_σ de $]0, l(\sigma)]$ tel que la partie $U \cap \mathcal{M}(A)_\sigma$ contienne $[a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}[$. On en déduit que le voisinage U du point central a_0 contient l'élément de $\mathscr{V}_0$ défini par

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} [a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}[\cup \bigcup_{\sigma \notin \Sigma_0} \mathcal{M}(A)_\sigma.$$

□

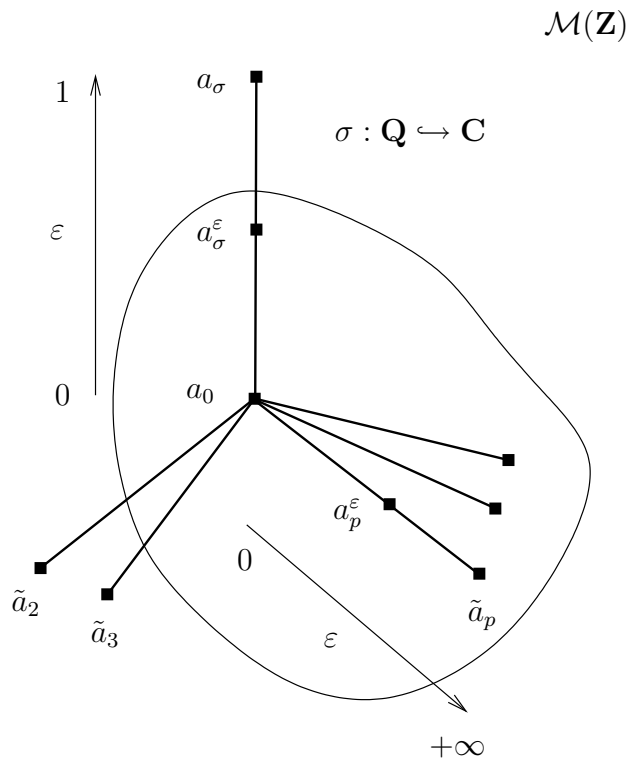

FIGURE 1. Un voisinage du point central a_0.

Regroupons, finalement, les résultats obtenus.

Corollaire 3.1.12. — *Considérons l'espace topologique*

$$P = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma}]0, l(\sigma)].$$

Notons $\hat{P} = \hat{P} \cup \{\infty\}$ *son compactifié d'Alexandrov. L'application*

$$\begin{array}{ccc} P & \to & \mathcal{M}(A) \\ \varepsilon_\sigma \in]0, l(\sigma)] & \mapsto & a_\sigma^{\varepsilon_\sigma} \end{array}$$

se prolonge en un homéomorphime

$$\hat{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A)$$

qui envoie le point ∞ *de* $\hat{P}$ *sur le point central* a_0 *de* $\mathcal{M}(A)$.

Remarquons qu'à partir de la description de la topologie que nous venons de donner, on redémontre facilement la compacité de l'espace $\mathcal{M}(A)$. D'autres propriétés sont vérifiées. Nous les résumons dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.13. — *L'espace* $\mathcal{M}(A)$ *est compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs.*

Remarquons que nous pouvons décrire facilement les parties connexes de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Deux cas se présentent. Si une partie connexe de $\mathcal{M}(A)$ évite le point central a_0, alors elle est contenue dans l'une des branches et est donc homéomorphe à un intervalle. Si une partie connexe de $\mathcal{M}(A)$ contient le point central a_0, alors sa trace sur toute branche est une partie connexe, et donc homéomorphe à un intervalle, contenant le point a_0. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.1.14. — *Une intersection de parties connexes de* $\mathcal{M}(A)$ *est connexe.*

Indiquons pour finir un résultat concernant les morphismes de changement de base.

Théorème 3.1.15. — *Soit* K' *une extension finie de* K. *Notons* A' *l'anneau des entiers de* K'. *Alors le morphisme*

$$\mathcal{M}(A') \to \mathcal{M}(A)$$

induit par l'injection $A \to A'$ *est continu, ouvert, propre, surjectif et à fibres finies.*

3.1.2. Faisceau structural

Nous allons décrire les sections du faisceau structural $\mathscr{O}$ sur plusieurs types d'ouverts connexes de $\mathcal{M}(A)$. Auparavant, il est utile de calculer explicitement la norme uniforme sur certains compacts et le complété pour cette norme de l'anneau des fractions rationnelles sans pôles au voisinage du compact.

3.1.2.1. Parties compactes

Nous allons décrire ici toutes les parties compactes, connexes et non vides de $\mathcal{M}(A)$. Soit L une telle partie. Nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Il existe $\sigma \in \Sigma_\infty$ tel que L soit contenue dans la branche σ-adique de $\mathcal{M}(A)$.
   (a) La partie L évite le point central a_0.
   Dans ce cas, il existe $u, v \in]0,1]$, avec $u \leq v$, tels que
   $$L = [a_\sigma^u, a_\sigma^v] = \{a_\sigma^\varepsilon,\ u \leq \varepsilon \leq v\}.$$
   Les fonctions rationnelles définies au voisinage de ce compact sont $\mathscr{K}(L) = K$ et la norme uniforme est $\|.\|_L = \max(|.|_\sigma^u, |.|_\sigma^v)$. On en déduit que $\mathscr{B}(L) \simeq \hat{K}_\sigma$. Attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de corps topologiques mais pas de corps normés (sauf dans le cas où $u = v$) !
   (b) La partie L contient le point central a_0.
   Il existe alors $v \in [0,1]$ tel que
   $$L = [a_0, a_\sigma^v].$$
   Les fonctions rationnelles définies au voisinage de ce compact sont $\mathscr{K}(L) = K$ et la norme uniforme est $\|.\|_L = \max(|.|_0, |.|_\sigma^v)$. On en déduit que $\mathscr{B}(L) \simeq K$.
2. Il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que L soit contenue dans la branche $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{M}(A)$.
   (a) La partie L évite le point central a_0 et le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.
   Il existe alors $u, v \in]0, +\infty[$, avec $u \leq v$, tels que
   $$L = [a_\mathfrak{m}^u, a_\mathfrak{m}^v].$$
   Nous avons $\mathscr{K}(L) = K$, $\|.\|_L = \max(|.|_\mathfrak{m}^u, |.|_\mathfrak{m}^v)$ et $\mathscr{B}(L) \simeq \hat{K}_\mathfrak{m}$.
   (b) La partie L évite le point central a_0 et contient le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.
   Il existe alors $u \in]0, +\infty]$ tel que
   $$L = [a_\mathfrak{m}^u, \tilde{a}_\mathfrak{m}].$$
   Dans ce cas, les élements de K peuvent avoir un pôle au point $\tilde{a}_\mathfrak{m}$ et nous avons donc $\mathscr{K}(L) = A_\mathfrak{m}$, $\|.\|_L = |.|_\mathfrak{m}^u$ et $\mathscr{B}(L) \simeq \hat{A}_\mathfrak{m}$.

(c) La partie L contient le point central a_0 et évite le point extrême $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Il existe alors $v \in [0, +\infty[$ tel que

$$L = [a_0, a_{\mathfrak{m}}^v].$$

Nous avons $\mathscr{K}(L) = K$, $\|.\|_L = \max(|.|_0, |.|_{\mathfrak{m}}^u)$ et $\mathscr{B}(L) \simeq K$.

(d) La partie L contient le point central a_0 et le point extrême $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Dans ce cas, la partie L est la branche $\mathfrak{m}$-adique tout entière :

$$L = \mathcal{M}(A)_{\mathfrak{m}}.$$

Nous avons $\mathscr{K}(L) = A_{\mathfrak{m}}$, $\|.\|_L = |.|_0$ et $\mathscr{B}(L) \simeq A_{\mathfrak{m}}$.

3. La partie L n'est contenue dans aucune branche de $\mathcal{M}(A)$.

D'après le raisonnement précédant la proposition 3.1.14, quel que soit $\sigma \in \Sigma$, il existe $v_\sigma \in [0, l(\sigma)]$ tel que

$$L = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} [a_0, a_\sigma^{v_\sigma}].$$

Notons $\Sigma' = \{\mathfrak{m} \in \Sigma_f \mid v_\sigma = l(\sigma)\}$. Nous avons alors

$$\mathscr{K}(L) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{K}(L_\sigma) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Sigma'} A_{\mathfrak{m}}.$$

La norme uniforme sur cet anneau est

$$\|.\|_L = \max_{\sigma \in \Sigma}(\|.\|_{L_\sigma}) = \max\left(\max_{\sigma \in \Sigma}(|.|_\sigma^{v_\sigma}), |.|_0\right)$$

et nous avons donc

$$\mathscr{B}(L) = \mathscr{K}(L) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Sigma'} A_{\mathfrak{m}}.$$

Nous venons de décrire toutes les parties compactes et connexes de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Nous allons montrer qu'elles sont pro-rationnelles, au sens de la définition 1.2.8.

Proposition 3.1.16. — *Toute partie compacte et connexe L de l'espace $\mathcal{M}(A)$ est pro-rationnelle et donc spectralement convexe. En particulier, le morphisme naturel*

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(L)) \to \mathcal{M}(\mathscr{A})$$

induit un homéomorphisme entre les espaces $\mathcal{M}(\mathscr{B}(L))$ et L.

Démonstration. — Commençons par démontrer le résultat pour certaines parties compactes simples. Soient $\sigma \in \Sigma$ et $\varepsilon \in]0, l(\sigma)[$. Considérons le compact

$$L = \mathcal{M}(A) \setminus]a_\sigma^\varepsilon, a_\sigma^{l(\sigma)}].$$

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_f$ ou que $\sigma \in \Sigma_\infty$ et que le corps K n'est ni $\mathbf{Q}$, ni un corps quadratique imaginaire. D'après le lemme 3.1.7, il existe alors un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :

i) $|f|_\sigma < 1$;
ii) $\forall \sigma' \neq \sigma$, $|f|_{\sigma'} \geq 1$.

Nous avons alors

$$\left\{ b \in \mathcal{M}(A) \,\middle|\, |f(b)| \geq |f|_\sigma^\varepsilon \right\} = L.$$

Le compact L est rationnel.

Supposons, à présent, que le corps K est soit $\mathbf{Q}$, soit un corps quadratique imaginaire et que $\sigma = \sigma_\infty$. D'après le lemme 3.1.8, il existe alors un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :

i) $|f|_{\sigma_\infty} > 1$;
ii) $\forall \sigma' \neq \sigma$, $|f|_{\sigma'} \leq 1$.

Nous avons alors

$$\left\{ b \in \mathcal{M}(A) \,\middle|\, |f(b)| \leq |f|_{\sigma_\infty}^\varepsilon \right\} = L.$$

De nouveau, le compact L est donc rationnel.

Considérons, à présent, le compact

$$M = [a_\sigma^\varepsilon, a_\sigma^{l(\sigma)}].$$

En utilisant la même fonction f que précédemment, nous pouvons écrire, dans le premier cas,

$$\left\{ b \in \mathcal{M}(A) \,\middle|\, |f(b)| \leq |f|_\sigma^\varepsilon \right\} = M,$$

et, dans le second,

$$\left\{ b \in \mathcal{M}(A) \,\middle|\, |f(b)| \geq |f|_{\sigma_\infty}^\varepsilon \right\} = M.$$

Le compact M est donc rationnel.

Puisque toutes les parties compactes et connexes de $\mathcal{M}(A)$ s'obtiennent comme intersection de compacts de l'un des deux types précédents, la première partie du résultat est démontrée. Nous déduisons la seconde partie du théorème 1.2.11. □

3.1.2.2. Parties ouvertes

Pour déterminer les sections globales sur les ouverts de la base, il suffit à présent de recoller les complétés précédents. Introduisons tout d'abord une notation.

Définition 3.1.17. — *Pour tout sous-ensemble Σ_0 de Σ, nous posons*

$$A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right] = \left\{ \frac{a}{b} \in K \,\middle|\, a \in A,\, b \in A^*,\, \exists \mathfrak{m} \in \Sigma_f \cap \Sigma_0, b \in \mathfrak{m} \right\}.$$

Remarque 3.1.18. — Supposons que l'ensemble Σ_0 précédent est fini. Le localisé $A[1/\Sigma_0]$ possède alors une expression plus simple. Nous pouvons alors, en effet, considérer le diviseur $\sum_{\mathfrak{m}\in\Sigma_f\cap\Sigma_0}(\mathfrak{m})$ sur $\mathrm{Spec}(A)$. Puisque le groupe de Picard de $\mathrm{Spec}(A)$ est fini, ce diviseur est de torsion. Il existe donc $n \in \mathbf{N}^*$ et $f \in A$ tels que

$$n \sum_{\mathfrak{m}\in\Sigma_f\cap\Sigma_0} (\mathfrak{m}) = (f).$$

Nous avons donc

$$A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right] = A\left[\frac{1}{f}\right].$$

Soit U un ouvert connexe et non vide de $\mathcal{M}(A)$. Comme précédemment, nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Il existe $\sigma \in \Sigma_\infty$ tel que U soit contenu dans la branche σ-adique de $\mathcal{M}(A)$.
   Alors, il existe $u, v \in [0,1]$, avec $u < v$, tels que
   $$U =]a_\sigma^u, a_\sigma^v[\text{ ou }]a_\sigma^u, a_\sigma].$$
   Dans les deux cas, nous avons $\mathscr{O}(U) = \hat{K}_\sigma$.
2. Il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que U soit contenu dans la branche $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{M}(A)$.
   (a) L'ouvert U évite le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.
   Alors, il existe $u, v \in [0, +\infty]$, avec $u < v$, tels que
   $$U =]a_\mathfrak{m}^u, a_\mathfrak{m}^v[.$$
   Comme précédemment, nous avons $\mathscr{O}(U) = \hat{K}_\mathfrak{m}$.
   (b) L'ouvert U contient le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.
   Alors, il existe $u \in [0, +\infty[$ tel que
   $$U =]a_\mathfrak{m}^u, \tilde{a}_\mathfrak{m}].$$
   Dans ce cas, nous avons $\mathscr{O}(U) = \hat{A}_\mathfrak{m}$.
3. L'ouvert U n'est contenu dans aucune branche de $\mathcal{M}(A)$.
   Dans ce cas, c'est un voisinage du point central a_0 et il possède une écriture de la forme
   $$\begin{aligned} U &= \mathcal{M}(A) \setminus \left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma_0} [a_{\sigma_i}^{u_i}, a_{\sigma_i}^{l(\sigma_i)}] \right) \\ &= \left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma_0} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}[\right) \cup \left(\bigcup_{\sigma\notin\Sigma_0} \mathcal{M}(A)_\sigma \right), \end{aligned}$$

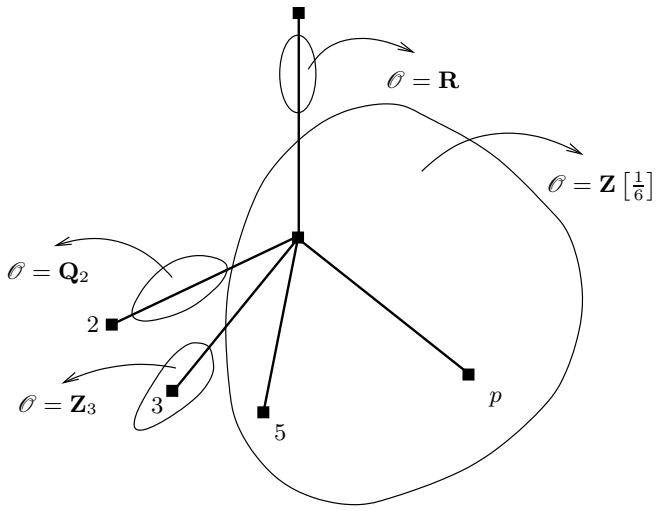

FIGURE 2. Anneaux de sections globales.

où Σ_0 est un sous-ensemble fini de Σ et, pour tout élément σ de Σ_0, u_σ est un élément de $]0, l(\sigma)]$. Nous avons alors

$$\mathscr{O}(U) = A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right].$$

Nous pouvons, à présent, décrire les anneaux locaux en les points de la base. Soit b un point de $\mathcal{M}(A)$. Nous allons, de nouveau, distinguer plusieurs cas.

1. Il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que le point b est un point interne de la branche σ-adique.
   Dans ce cas, nous avons
   $$\mathscr{O}_b \simeq \hat{K}_\sigma.$$
2. Il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que le point b est le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.
   Dans ce cas, nous avons
   $$\mathscr{O}_{\tilde{a}_\mathfrak{m}} \simeq \hat{A}_\mathfrak{m}.$$
3. Le point b est le point central a_0 de $\mathcal{M}(A)$.
   Nous avons alors
   $$\mathscr{O}_{a_0} \simeq K.$$

Remarque 3.1.19. — La topologie de l'espace $\mathcal{M}(A)$ laisse penser que c'est, en quelque sorte, un espace adélique. La connaissance du faisceau structural permet de préciser cette idée. Considérons le morphisme d'inclusion

$$j : \mathcal{M}(A) \setminus \{a_0\} \to \mathcal{M}(A).$$

Le germe $(j_*\mathscr{O})_{a_0}$ est isomorphe à l'anneau des adèles.

Grâce aux descriptions explicites que nous avons obtenues, il est désormais facile de montrer que les anneaux locaux de l'espace $\mathcal{M}(A)$ qui sont des anneaux de valuation discrète – ce sont exactement les anneaux locaux en les points extrêmes – satisfont la condition (U), au sens de la définition 2.2.9.

Lemme 3.1.20. — *Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. L'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{\tilde{a}_\mathfrak{m}}$ satisfait la condition (U).*

Démonstration. — Considérons l'uniformisante $\pi_\mathfrak{m}$ de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{\tilde{a}_\mathfrak{m}} = \hat{A}_\mathfrak{m}$. Elle est définie sur l'ouvert $V =]a_0, \tilde{a}_\mathfrak{m}]$. L'ensemble

$$\mathscr{W} = \{[a_\mathfrak{m}^\varepsilon, \tilde{a}_\mathfrak{m}],\ \varepsilon > 0\}$$

est un système fondamental de voisinages compacts du point b dans V.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $W = [a_\mathfrak{m}^\varepsilon, \tilde{a}_\mathfrak{m}]$. Les descriptions précédentes montrent que nous avons

$$\mathscr{B}(W) = \hat{A}_\mathfrak{m}$$

et

$$\forall f \in \hat{A}_\mathfrak{m},\ \|f\|_W = |f|_\mathfrak{m}^\varepsilon.$$

Soit f un élément de $\mathscr{B}(W)$ tel que $f(\tilde{a}_\mathfrak{m}) = 0$. Cela signifie que f est divisible par $\pi_\mathfrak{m}$ dans $\mathscr{O}_{\tilde{a}_\mathfrak{m}}$, c'est-à-dire dans $\hat{A}_\mathfrak{m}$, et donc dans $\mathscr{B}(W)$. Il existe donc un élément g de $\hat{A}_\mathfrak{m}$ tel que $f = \pi_\mathfrak{m} g$. En outre, nous avons

$$\|f\|_W = |f|_\mathfrak{m}^\varepsilon = |\pi_\mathfrak{m}|_\mathfrak{m}^\varepsilon\, |g|_\mathfrak{m}^\varepsilon = |\pi_\mathfrak{m}|_\mathfrak{m}^\varepsilon\, \|g\|_W.$$

Par conséquent, l'uniformisante $\pi_\mathfrak{m}$ vérifie la condition U_W. On en déduit le résultat attendu. □

Les résultats qui précèdent permettent également de décrire explicitement les anneaux de fonctions définies au voisinages des parties compactes de $\mathcal{M}(A)$. Nous obtenons en particulier le résultat suivant.

Proposition 3.1.21. — *Soit V une partie compacte et connexe de l'espace $\mathcal{M}(A)$ qui n'est pas réduite à un point extrême. Alors le morphisme naturel*

$$\mathscr{K}(V) \to \mathscr{O}(V)$$

se prolonge en un isomorphisme

$$\mathscr{B}(V) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(V).$$

En particulier, pour tout point b de l'espace $\mathcal{M}(A)$ qui n'est pas extrême, le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_b \to \mathscr{H}(b)$$

est un isomorphisme.

De la description explicite des anneaux locaux découle un autre fait important, qui permet de ramener l'étude de n'importe quel point rationnel d'une fibre d'un espace analytique affine au-dessus de $\mathscr{A}$ à celle du point 0 de cette même fibre.

Lemme 3.1.22. — *Soit b un point de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}_b \to \mathscr{H}(b)$$

est surjectif.

Soient n un entier, $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ l'espace analytique de dimension n au-dessus de A et $\pi : \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}} \to \mathcal{M}(A)$ le morphisme naturel de projection. Soit x un point rationnel de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Il existe un voisinage ouvert U du point b dans $\mathcal{M}(A)$ et un automorphisme φ de $\pi^{-1}(U)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

et envoie le point x de la fibre $\pi^{-1}(b)$ sur le point 0 de cette même fibre.

Démonstration. — La première partie du résultat provient de la description explicite des anneaux locaux et des corps résiduels complétés.

Passons à la deuxième partie. Il existe des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $\mathscr{H}(b)$ tels que le point x de la fibre $\pi^{-1}(b)$ soit défini par les équations

$$(T_1 - \alpha_1)(b) = \cdots = (T_n - \alpha_n)(b) = 0.$$

D'après la première partie, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, il existe un élément β_i de $\mathscr{O}_b$ dont l'image dans le corps résiduel complété $\mathscr{H}(b)$ est égal à α_i. Choisissons un voisinage ouvert U du point b dans $\mathcal{M}(A)$ sur lequel les fonctions $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont définies. Nous pouvons alors choisir comme automorphisme la translation de vecteur $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ au-dessus de $\pi^{-1}(U)$. □

3.1.2.3. Bord de Shilov

Commençons par quelques définitions.

Définition 3.1.23. — *Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach. On dit qu'une partie fermée Γ de $\mathcal{M}(\mathscr{A}, \|.\|)$ est un* **bord analytique de l'anneau normé** *$(\mathscr{A}, \|.\|)$ si elle vérifie la condition suivante :*

$$\forall f \in \mathscr{A},\ \|f\|_{\mathcal{M}(\mathscr{A},\|.\|)} = \|f\|_\Gamma.$$

On appelle **bord de Shilov** *de l'anneau de Banach* $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *le plus petit bord, pour la relation d'inclusion, de l'anneau de Banach* $(\mathscr{A}, \|.\|)$*, s'il existe.*

Soient n *un nombre entier positif et* V *une partie compacte et spectralement convexe de l'espace analytique* $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$*. Par définition (*cf. *1.2.12), le morphisme naturel*

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(V)) \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$

induit un homéomorphisme entre les espaces $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$ *et* V*. Nous appellerons* **bord analytique (respectivement bord de Shilov) du compact** V *l'image par cet homéomorphisme d'un bord analytique (respectivement du bord de Shilov, s'il existe) de l'anneau de Banach* $(\mathscr{B}(V), \|.\|_V)$*.*

Remarque 3.1.24. — Le lemme de Zorn assure que tout anneau de Banach possède un bord analytique minimal.

Signalons qu'A. Escassut et N. Maïnetti ont prouvé l'existence du bord de Shilov dans de nombreux cas (*cf.* [**11**], théorème C).

Théorème 3.1.25 (A. Escassut, N. Maïnetti). — *Soit* $(k, |.|)$ *un corps valué et complet dont la valuation n'est pas triviale. Soit* $\mathscr{A}$ *une* k*-algèbre de Banach munie d'une norme d'algèbre* $\|.\|$ *qui induit la valeur absolue* $|.|$ *sur* k*. Alors l'algèbre* $(\mathscr{A}, \|.\|)$ *possède un bord de Shilov.*

Intéressons-nous, à présent, au bord de Shilov des parties compactes et connexes de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Cela a un sens puisque ces parties sont pro-rationnelles (*cf.* proposition 3.1.16) et donc spectralement convexes (*cf.* théorème 1.2.11). En reprenant les résultats des paragraphes 3.1.2.1 et 3.1.2.2, l'on montre simplement que les parties compactes et connexes de $\mathcal{M}(A)$ possèdent un bord de Shilov. Nous pouvons en donner une description explicite.

1. Pour tout élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f et tous éléments u et v de $\mathbf{R}_+$ vérifiant l'inégalité $u \leq v$, la partie compacte $[a^u_{\mathfrak{m}}, a^v_{\mathfrak{m}}]$ possède un bord de Shilov égal à l'ensemble $\{a^u_{\mathfrak{m}}, a^v_{\mathfrak{m}}\}$.
2. Pour tout élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f et tout élément u de $\mathbf{R}_+$, la partie compacte $[a^u_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$ possède un bord de Shilov égal au singleton $\{a^u_{\mathfrak{m}}\}$.
3. Pour tout élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f, la partie compacte $\{\tilde{a}_{\mathfrak{m}}\}$ possède un bord de Shilov égal au singleton $\{\tilde{a}_{\mathfrak{m}}\}$.
4. Pour tout élément σ de Σ_∞ et tous éléments u et v de $[0, 1]$ vérifiant l'inégalité $u \leq v$, la partie compacte $[a^u_{\mathfrak{m}}, a^v_{\mathfrak{m}}]$ possède un bord de Shilov égal à l'ensemble $\{a^u_{\mathfrak{m}}, a^v_{\mathfrak{m}}\}$.
5. Lorsque la partie compacte et connexe n'est pas contenue dans une branche, le résultat est plus difficile à établir. Les lemmes 3.1.7 et 3.1.8 permettent

cependant d'y parvenir rapidement. Soit L une partie compacte et connexe de B qui n'est pas contenue dans une branche. Alors, il existe un élément $(v_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ de $\prod_{\sigma\in\Sigma}[0, l(\sigma)]$ tel que l'on ait l'égalité

$$L = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} [a_0, a_\sigma^{v_\sigma}].$$

Posons

$$\Sigma_0 = \{\sigma \in \Sigma_f \,|\, 0 < v_\sigma < +\infty\}.$$

Alors, la partie compacte L de B possède un bord de Shilov égal à l'ensemble

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma_0} \{a_\sigma^{v_\sigma}\} \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\infty} \{a_\sigma^{v_\sigma}\}.$$

Ces descriptions explicites permettent d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 3.1.26. — *Soit V une partie compacte et connexe de l'espace B. Cette partie possède un bord de Shilov Γ_V. C'est un ensemble fini.*

En outre, pour tout point γ de Γ_V, il existe un élément f de $\mathscr{K}(V)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

$$|f(\gamma)| = \|f\|_V \text{ et } \forall b \in V \setminus \{\gamma\},\ |f(b)| < \|f\|_V.$$

Si la partie compacte et connexe V n'est pas réduite à un point extrême, alors, en tout point γ de Γ_V, l'anneau local $\mathscr{O}_{B,\gamma}$ est un corps.

Introduisons une nouvelle définition.

Définition 3.1.27. — *Soient $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach et n un nombre entier positif. Posons $X = \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{(\mathscr{A},\|.\|)}$ et notons $\mathscr{O}_X$ le faisceau structural sur cet espace. On dit qu'une partie S de l'espace analytique X est* **algébriquement triviale** *si, pour tout point x de S, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps.*

Corollaire 3.1.28. — *Tout point de l'espace $\mathcal{M}(A)$ possède un système fondamental de voisinages compacts et connexes dont le bord de Shilov est une partie finie et algébriquement triviale.*

3.2. Faisceau structural sur l'espace affine

Dans la suite de ce chapitre, nous fixons un entier positif n. Nous posons

$$B = \mathcal{M}(A) \text{ et } X = \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}.$$

Les faisceaux structuraux sur ces espaces seront respectivement notés $\mathscr{O}_B$ et $\mathscr{O}_X$. Lorsqu'aucune confusion ne peut en découler, nous les noterons simplement $\mathscr{O}$.

Nous noterons encore

$$\pi : X \to B$$

le morphisme de projection induit par le morphisme naturel $A \to A[T_1, \ldots, T_n]$. Pour toute partie V de B, nous posons

$$X_V = \pi^{-1}(V)$$

et, pour tout point b de B,

$$X_b = \pi^{-1}(b).$$

Introduisons encore quelques éléments de terminologie pour l'espace affine de dimension n au-dessus de $\mathcal{M}(A)$, dans la lignée de la définition 3.1.5.

Définition 3.2.1. — *Pour $\sigma \in \Sigma$, on appelle* **partie σ-adique** *de X (respectivement* **partie σ-adique ouverte** *de X,* **partie σ-adique semi-ouverte** *de X), et on note X_σ (respectivement X'_σ, X''_σ), l'image réciproque par la projection π de la branche σ-adique (respectivement branche σ-adique ouverte, branche σ-adique semi-ouverte) de $\mathcal{M}(A)$.*

On appelle **fibre centrale** *de X, et on note X_0, la fibre de π au-dessus du point central de $\mathcal{M}(A)$. On appelle* **fibre extrême** *de X toute fibre de π au-dessus d'un point extrême de $\mathcal{M}(A)$. Pour $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$, on note $\tilde{X}_\mathfrak{m} = \pi^{-1}(\tilde{a}_\mathfrak{m})$. Finalement, on appelle* **fibre interne** *de X toute fibre de π au-dessus d'un point interne de $\mathcal{M}(A)$. On appelle* **point interne** *de X tout point d'une telle fibre.*

3.2.1. Anneaux locaux

Au théorème 2.4.8, nous avons décrit les anneaux locaux en les points déployés en fonction d'anneaux de sections sur la base. Grâce aux résultats établis à la section précédente, nous pouvons préciser cette description dans le cas où la base est le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Soit b un point de B. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathscr{O}_{B,b}$. Soient I une partie de $[\![1, n]\!]$ et $(r_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbf{R}_+^*$ dont l'image dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_\mathbf{Z} (\mathbf{R}_+^* / |\mathscr{H}(b)^*|)$ est

libre. Notons $J = [\![1, n]\!] \setminus I$ et, pour $i \in J$, posons $r_i = 0$. Notons x l'unique point de la fibre X_b qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |(T_i - \alpha_i)(x)| = r_i.$$

Notons

$$S = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{R}_+^n, \, | \, \forall i \in I, \, s_i \in]0, r_i[, \; \forall i \in J, \, s_i = 0\}$$

et

$$T = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}_+^n, \, | \, \forall i \in I, \, t_i > r_i, \; \forall i \in J, \, t_i > 0\}.$$

Proposition 3.2.2. — *Supposons que le point b est un point interne de l'espace B. Il existe un élément σ de Σ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que $b = a_\sigma^\varepsilon$. Notons L_i l'anneau composé des séries à coefficients dans $\hat{K}_\sigma$ de la forme*

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \, (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{k}}$$

qui vérifient la condition suivante : il existe des éléments $\boldsymbol{s}$ de S et $\boldsymbol{t}$ de T tels que la famille

$$\left(|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\varepsilon \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \right)_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n}$$

est sommable. Une telle famille vérifie en particulier la condition suivante : pour tout élément i de J et tout élément $\boldsymbol{k}$ de $\mathbf{Z}^n$ vérifiant $k_i < 0$, nous avons $a_{\boldsymbol{k}} = 0$.

Le morphisme naturel $A[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$L_i \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}.$$

Démonstration. — Nous supposerons que le nombre réel ε appartient à l'intervalle $]0, l(\sigma)[$. Le cas où $\varepsilon = l(\sigma)$, et donc $\sigma \in \Sigma_\infty$, ne présente pas de difficulté supplémentaire et nous ne le traiterons pas.

La famille

$$\mathscr{V} = (V_{\alpha,\beta} = [a_\sigma^\alpha, a_\sigma^\beta])_{0<\alpha<\varepsilon<\beta<l(\sigma)}$$

est un système fondamental de voisinages du point a_σ^ε dans B. En outre, quel que soient les nombres réels α et β vérifiant $0 < \alpha < \varepsilon < \beta < l(\sigma)$, nous avons

$$(\mathscr{B}(V_{\alpha,\beta}), \|.\|_{V_{\alpha,\beta}}) = \left(\hat{K}_\sigma, \max(|.|_\sigma^\alpha, |.|_\sigma^\beta) \right).$$

D'après le théorème 2.4.8, le morphisme $\mathscr{A}[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$\varinjlim_{V, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{t} \rangle \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x},$$

où V parcourt la famille $\mathscr{V}$, $\boldsymbol{s}$ l'ensemble S et $\boldsymbol{t}$ l'ensemble T. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 < \alpha < \varepsilon < \beta < l(\sigma)$, $\boldsymbol{s} \in S$ et $\boldsymbol{t} \in T$. Soit f un élément de l'anneau

$\mathscr{B}(V_{\alpha,\beta})\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{t}\rangle$. Il existe alors une famille $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ d'éléments de $\hat{K}_\sigma$ telle que

$$\text{la famille } \Big(\max(|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\alpha, |a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\beta)\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} \text{ est sommable}$$

et telle que l'on ait l'égalité

$$f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}.$$

Pour conclure, il reste à constater que l'ensemble des familles $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ d'éléments de $\hat{K}_\sigma$ pour lesquelles il existe des éléments $\boldsymbol{s}$ de S et $\boldsymbol{t}$ de T tels que

$$\text{la famille } \Big(\max(|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\alpha, |a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\beta)\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} \text{ est sommable}$$

est identique à l'ensemble des familles $(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ d'éléments de $\hat{K}_\sigma$ pour lesquelles il existe des éléments $\boldsymbol{s}$ de S et $\boldsymbol{t}$ de T tels que

$$\text{la famille } \Big(|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\varepsilon\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} \text{ est sommable.}$$

□

Remarque 3.2.3. — Supposons que le point b est un point interne de l'espace B. La description explicite que nous venons d'obtenir montre que le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X_b,x}$$

est un isomorphisme. Ce résultat vaut, en fait, pour tous les points des fibres internes, ainsi que nous le démontrerons plus tard (*cf.* proposition 3.4.6).

Proposition 3.2.4. — *Supposons que le point b est un point extrême de l'espace B. Il existe un élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f tel que $b = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Notons L_e l'anneau composé des séries à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ de la forme*

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\,(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{k}}$$

qui vérifient la condition suivante : il existe des éléments ε de $\mathbf{R}_+^*$, $\boldsymbol{s}$ de S et $\boldsymbol{t}$ de T tels que la famille

$$\Big(|a_{\boldsymbol{k}}|_{\mathfrak{m}}^\varepsilon\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$$

est sommable. Une telle famille vérifie en particulier la condition suivante : pour tout élément i de J et tout élément $\boldsymbol{k}$ de $\mathbf{Z}^n$ vérifiant $k_i < 0$, nous avons $a_{\boldsymbol{k}} = 0$.

Le morphisme naturel $A[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$L_e \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}.$$

Démonstration. — La famille

$$\mathscr{V} = (V_\varepsilon = [a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}])_{\varepsilon>0}$$

est un système fondamental de voisinages du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B. En outre, pour tout élément ε de $\mathbf{R}_+^*$, nous avons

$$(\mathscr{B}(V_\varepsilon), \|.\|_{V_\varepsilon}) = \left(\hat{A}_{\mathfrak{m}}, |.|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}\right).$$

D'après le théorème 2.4.8, le morphisme $\mathscr{A}[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$\varinjlim_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{t}\rangle \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x},$$

où V parcourt la famille $\mathscr{V}$, $\boldsymbol{s}$ l'ensemble S et $\boldsymbol{t}$ l'ensemble T. On en déduit le résultat annoncé. □

Corollaire 3.2.5. — *Supposons qu'il existe un élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f tel que le point $b = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ et que $I = \emptyset$. Le point x est alors un point rationnel de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Le morphisme naturel $A[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme*

$$\hat{A}_{\mathfrak{m}}[\![\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha}]\!] \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}.$$

Démonstration. — Reprenons les notations de la proposition précédente. Nous souhaitons montrer que l'anneau L_e n'est autre que l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[\![\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha}]\!]$. Tout d'abord, puisque I est vide, nous disposons de l'inclusion

$$L_e \subset \hat{A}_{\mathfrak{m}}[\![\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha}]\!].$$

Réciproquement, soit

$$f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{k}}$$

un élément de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[\![\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\alpha}]\!]$. Soient $\varepsilon > 0$ et $t_1, \ldots, t_n \in]0, 1[$. Le n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ appartient à T. Puisque I est vide, l'ensemble S est réduit au n-uplet nul. Remarquons finalement que, pour tout élément $\boldsymbol{k}$ de $\mathbf{N}^n$, nous avons $|a_{\boldsymbol{k}}|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon} \leq 1$. On en déduit que la famille

$$\left(|a_{\boldsymbol{k}}|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon} \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\right)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} = \left(|a_{\boldsymbol{k}}|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}\right)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$$

est sommable et donc que l'élément f appartient à L_e. □

Dans le cas de la droite, nous pouvons simplifier la description. Pour traiter ce cas, nous supposerons que $n = 1$ et supprimerons les indices des notations.

Corollaire 3.2.6. — *Supposons que $n = 1$, que $r < 1$ et que le point b est un point extrême de l'espace B. Il existe un élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f tel que $b = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Notons $L_e^{(1)}$ l'anneau composé des séries à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ de la forme*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\,(T-\alpha)^k$$

telles que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k<0} a_k\,U^k$$

soit strictement supérieur à 1. C'est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $(\pi_{\mathfrak{m}})$ et de corps résiduel $\tilde{k}_{\mathfrak{m}}(\!(T)\!)$. Le morphisme naturel $A[T] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit des isomorphismes

$$L_e^{(1)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}$$

et

$$\tilde{k}_{\mathfrak{m}}(\!(T)\!) \xrightarrow{\sim} \kappa(x) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(x).$$

Démonstration. — Commençons par nous intéresser à l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$. Nous savons qu'il est isomorphe à l'anneau composé des séries à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ de la forme

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\,(T-\alpha)^k$$

qui vérifient la condition suivante : il existe des éléments ε de $\mathbf{R}_+^*$, s de $]0,r[$ et t de $]r,+\infty[$ tels que la famille

$$\Big(|a_k|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}\,\max(s^k,t^k)\Big)_{k\in\mathbf{Z}}$$

soit sommable. Cette condition est équivalente à la conjonction des deux conditions suivantes :

a) il existe $\varepsilon > 0$ et $t > r$ tel que la famille $(|a_k|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}\,t^k)_{k\geq 0}$ est sommable ;

b) il existe $\varepsilon > 0$ et $s \in\,]0,r[$ tel que la famille $(|a_k|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}\,s^k)_{k<0}$ est sommable.

La condition a) est toujours satisfaite. En effet, la suite $(|a_k|_{\mathfrak{m}})_{k\geq 0}$ est bornée. Le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 0} a_k\,U^k$ est donc supérieur à 1. On vérifie ensuite sans peine que la condition b) est équivalente à celle de l'énoncé du corollaire.

Pour démontrer l'assertion finale, il suffit de remarquer que le corps $\kappa(x) \simeq \tilde{k}_{\mathfrak{m}}(\!(T)\!)$ est complet pour la valuation T-adique et donc pour la valeur absolue associée au point x. On en déduit que le morphisme naturel

$$\kappa(x) \to \mathscr{H}(x)$$

est un isomorphisme. □

Proposition 3.2.7. — *Supposons que le point b est le point central a_0 de l'espace B. Notons L_c l'anneau composé des séries à coefficients dans K de la forme*

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\,(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{k}}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

i) il existe un sous-ensemble fini Σ_0 de Σ contenant Σ_∞ tel que, quel que soit $\boldsymbol{k}$ dans $\mathbf{Z}^n$, l'élément $a_{\boldsymbol{k}}$ appartient à $A[1/\Sigma_0]$;

ii) quel que soit σ dans Σ_0, il existe des éléments ε de $]0,l(\sigma)[$, $\boldsymbol{s}$ de S et $\boldsymbol{t}$ de T tels que la famille

$$\Big(|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\varepsilon\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$$

est sommable.

Une telle famille vérifie en particulier la condition suivante : pour tout élément i de J et tout élément $\boldsymbol{k}$ de $\mathbf{Z}^n$ vérifiant $k_i<0$, nous avons $a_{\boldsymbol{k}}=0$. Pour i dans $[\![1,n]\!]$, posons $\varepsilon_i=1$, si $r_i>1$, et $\varepsilon_i=-1$, si $r_i<1$. La famille précédente vérifie également la condition suivante : l'ensemble

$$\{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\,|\,\forall i\in[\![1,n]\!],\ \varepsilon_i k_i>0 \text{ et } a_{\boldsymbol{k}}\}$$

est fini.

Le morphisme naturel $A[\boldsymbol{T}]\to\mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$L_c\xrightarrow{\sim}\mathscr{O}_{X,x}.$$

Démonstration. — Soit Σ_0 une partie finie de Σ qui contient Σ_∞. Soit $(\varepsilon_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_0}$ un élément de $\prod_{\sigma\in\Sigma_0}]0,l(\sigma)[$. Posons

$$M=B\setminus\bigcup_{\sigma\in\Sigma_0}]a_\sigma^{\varepsilon_\sigma},a_\sigma^{l(\sigma)}].$$

C'est un voisinage compact du point a_0 dans B et l'ensemble des parties construites de cette manière est un système fondamental du point a_0 dans B.

Nous avons

$$\mathscr{B}(M)=A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right]$$

et, pour tout élément f de $\mathscr{B}(M)$,

$$\|f\|_M=\max_{\sigma\in\Sigma_0}(|f|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}).$$

Nous déduisons alors le résultat attendu du théorème 2.4.8.

À l'aide de la formule du produit, l'on démontre que tout élément non nul a de $\mathscr{B}(M)$ satisfait l'inégalité $\|a\|_M\geq 1$. Le résultat concernant la forme des séries en découle aussitôt. □

Dans le cas de la droite, nous pouvons simplifier la description. Pour traiter ce cas, nous supposerons que $n = 1$ et supprimerons les indices des notations. Nous adopterons les notations suivantes. Si $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k T^k$ est une série à coefficients dans K et σ un élément de Σ, nous noterons $R_\sigma(f)$ le rayon de convergence de la série $\sum_{k\in\mathbf{N}} |a_k|_\sigma T^k$.

Corollaire 3.2.8. — *Supposons que $n = 1$ et que le point b est le point central a_0 de l'espace B. Notons E l'anneau composé des séries à coefficients dans K de la forme*

$$f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k (T-\alpha)^k$$

qui vérifient les conditions suivantes :

i) il existe un élément N de A^* tel que, quel que soit k dans $\mathbf{N}$, l'élément a_k appartient à $A[1/N]$;

ii) quel que soit σ dans Σ, nous avons $R_\sigma(f) > 0$.

C'est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal (T) et de corps résiduel K. Si $r = 0$, le morphisme naturel $A[T] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$E \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}.$$

Si $r \in]0,1[$, le morphisme naturel $A[T] \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$Frac(E) = E\left[\frac{1}{T-\alpha}\right] \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}.$$

L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est alors un corps hensélien.

Démonstration. — Supposons, tout d'abord, que $r = 0$. Reprenons les notations de la proposition précédente. Soit $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k (T-\alpha)^k$ un élément de L_c. Il existe un sous-ensemble fini Σ_0 de Σ contenant Σ_∞ tel que, quel que soit k dans $\mathbf{N}$, l'élément a_k appartient à $A[1/\Sigma_0]$. En utilisant la finitude du groupe des classes de l'anneau A, on montre qu'il existe un élément N de A^* tel que

$$A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right] = A\left[\frac{1}{N}\right].$$

Soit σ dans Σ_0. Il existe des éléments ε de $]0, l(\sigma)[$ et t de T tels que la série

$$\sum_{k\in\mathbf{N}} |a_k|_\sigma^\varepsilon t^k$$

converge. On en déduit que $R_\sigma(f) \geq t^{1/\varepsilon} > 0$.

Soit $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. Pour tout élément k de $\mathbf{N}$, nous avons $|a_k|_\sigma \leq 1$. On en déduit que $R_\sigma(f) \geq 1 > 0$. Par conséquent, l'élément f appartient à E.

Réciproquement, soit $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\,(T-\alpha)^k$ un élément de E. Il existe un élément N de A^* tel que la série f appartienne à $A[1/N][\![T]\!]$. Posons

$$\Sigma_0 = \{\mathfrak{m} \in \Sigma_f \mid N \in \mathfrak{m}\} \cup \Sigma_\infty.$$

C'est une partie finie de Σ qui vérifie

$$A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right] = A\left[\frac{1}{N}\right].$$

Choisissons un élément $t > 0$ qui satisfait la condition suivante :

$$\forall \sigma \in \Sigma_0,\ t < R_\sigma(f).$$

Alors, pour tout élément σ de Σ_0, la famille

$$(|a_k|_\sigma\, t^k)_{k\in\mathbf{N}}$$

est sommable. On en déduit que l'élément f appartient à L_c.

Le cas où le nombre réel r appartient à l'intervalle $]0,1[$ se traite de la même manière. Remarquons que la proposition précédente assure déjà que n'interviennent dans le développement en série d'un élément de L_c qu'un nombre fini de termes non nuls d'indice négatif. Montrons, à présent, que le corps $\mathrm{Frac}(E)$ est hensélien. D'après [**2**], lemme 2.3.2 [(1)], il suffit de montrer que l'anneau local E est hensélien. La proposition 2.5.1 assure que tel est bien le cas. □

Remarque 3.2.9. — Soient N un élément de A^* et $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\,(T-\alpha)^k$ une série à coefficients dans $A[1/N]$. Posons

$$\Sigma_0 = \{\mathfrak{m} \in \Sigma_f \mid N \in \mathfrak{m}\} \cup \Sigma_\infty.$$

C'est une partie finie de Σ. Pour tout élément $\mathfrak{m}$ de $\Sigma \setminus \Sigma_0$, la série f est à coefficients dans $\hat{A}_\mathfrak{m}$ et nous avons donc $R_\mathfrak{m}(f) \geq 1$. Par conséquent, pour assurer que la série f appartient à l'anneau E, il suffit de tester un nombre fini de conditions.

Donnons, à présent, un exemple d'application de ces descriptions explicites. Nous nous plaçerons de nouveau dans le cadre de la droite et considérerons le point x défini comme étant le point 0 de la fibre centrale. Reprenons les notations du corollaire précédent. Nous identifierons l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ avec l'anneau E. Nous noterons F son corps des fractions. Nous avons démontré que c'est un corps hensélien. Observons que cette propriété permet de retrouver le théorème d'Eisenstein.

[(1)] V. Berkovich énonce, en fait, ce résultat pour des corps supposés « quasi-complete ». La définition 2.3.1 montre que cette notion coïncide avec celle de corps hensélien.

Théorème 3.2.10 (G. Eisenstein). — *Tout élément de $K[\![T]\!]$ entier sur $K[T]$ appartient à E.*

Démonstration. — Soit f un élément de $K[\![T]\!]$ entier sur $K[T]$. Il est encore entier sur l'anneau local E. Par conséquent, il existe un polynôme $P \in E[U]$ unitaire qui annule f. Puisque l'anneau local E est factoriel, l'anneau $E[U]$ l'est également. Il existe donc un entier r, des polynômes $P_1, \ldots, P_r$ à coefficients dans E, irréductibles et unitaires et des entiers $n_1, \ldots, n_r$ tels que l'on ait l'égalité

$$P = \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i} \text{ dans } E[U].$$

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Puisque la caractéristique du corps F est nulle, le polynôme P_i est séparable. D'après [**3**], proposition 2.4.1, la catégorie des extensions séparables finies du corps F est équivalente à celle des extensions séparables finies de son complété $\hat{F}$. On en déduit que le polynôme P_i est encore irréductible dans $\hat{F}[U]$.

Remarquons, à présent, que le corps $\hat{F}$ n'est autre que le corps des séries de Laurent $K(\!(T)\!)$. L'écriture

$$P = \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i}$$

est encore la décomposition du polynôme P en produits de facteurs irréductibles et unitaires dans $K[\![T]\!][U]$. Par conséquent, il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $P_i = U - f$. On en déduit que la série f est un élément de E. □

3.2.2. Anneaux de sections globales

Dans cette partie, nous voulons décrire les anneaux de sections globales de certaines parties de l'espace affine X. Plus précisément, nous allons nous intéresser aux disques et couronnes compacts au-dessus de parties compactes et connexes de l'espace B.

Introduisons quelques notations. Pour une partie V de B et des n-uplets $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ dans $\mathbf{R}_+^n$, nous posons

$$\mathring{D}_V(\boldsymbol{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ |T_i(x)| < t_i\},$$

$$\overline{D}_V(\boldsymbol{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ |T_i(x)| \leq t_i\},$$

$$\mathring{C}_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i < |T_i(x)| < t_i\}$$

et

$$\overline{C}_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Toutes ces parties sont compactes, en vertu de la proposition 1.1.11.

Définition 3.2.11. — *On appelle* **disque relatif** *de X toute partie de la forme $\mathring{D}_V(\boldsymbol{t})$ ou $\overline{D}_V(\boldsymbol{t})$, où V désigne une partie de B et $\boldsymbol{t}$ un élément de $\mathbf{R}_+^n$.*

On appelle **couronne relative** *de X toute partie de la forme $\mathring{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$ ou $\overline{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$, où V désigne une partie de B et $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$.*

Rappelons que, d'après la définition 1.1.29 et les remarques qui la suivent, si K est une partie compacte de X, la notation $\mathscr{O}(K)$ désigne l'anneau des fonctions qui sont définies au voisinage de K. En particulier, si $(k,|.|)$ est un corps ultramétrique complet et $\overline{D}$ le disque unité de $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, l'algèbre $\mathscr{O}(\overline{D})$ n'est pas l'algèbre affinoïde $k\{\boldsymbol{T}\}$, mais l'algèbre des séries surconvergentes, constituée des séries dont le rayon de convergence est strictement supérieur à 1.

Commençons par énoncer un résultat topologique. C'est un cas particulier du lemme 2.4.1.

Lemme 3.2.12. — *Soient V une partie compacte de B et $\boldsymbol{t}$ un élément de $\mathbf{R}_+^n$. Tout voisinage du disque $\overline{D}_V(\boldsymbol{t})$ contient un disque de la forme $\overline{D}_V(\boldsymbol{t}')$, où $\boldsymbol{t}'$ est un élément de $\mathbf{R}_+^n$ qui vérifie l'inégalité $\boldsymbol{t}' > \boldsymbol{t}$.*

Soit $\boldsymbol{s}$ un élément de $\mathbf{R}_+^n$ tel que $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$. Tout voisinage de la couronne $\overline{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$ contient une couronne de la forme $\overline{C}_V(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}')$, où $\boldsymbol{s}'$ et $\boldsymbol{t}'$ sont deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$ qui vérifient les inégalités $\boldsymbol{s}' \prec \boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}' > \boldsymbol{t}$.

Consacrons-nous, à présent, à l'étude des fonctions définies au voisinage de disques compacts. Nous commençons par montrer que ces fonctions admettent un développement en série.

Proposition 3.2.13. — *Soit V une partie compacte de B. Soit $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}_+^n$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}(V)[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$$

se prolonge en un morphisme injectif

$$\varphi_{V,\boldsymbol{t}} : \mathscr{O}\left(\overline{D}_V(\boldsymbol{t})\right) \hookrightarrow \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!].$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{O}\left(\overline{D}_V(\boldsymbol{t})\right)$. D'après le lemme 3.2.12, il existe un polyrayon $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{t}$ telle que la fonction f soit définie sur $\mathring{D}_V(\boldsymbol{r})$.

Soit b un point de V. La fonction f est définie au voisinage du point 0 de la fibre X_b. D'après le théorème 2.4.8, il existe un voisinage compact V^b du point b dans B et un nombre réel $r_b > 0$ tels qu'au voisinage de la partie compacte $\overline{D}_{V^b}(r_b)$ de X, la fonction f possède une expression de la forme

$$f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

où, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n$, $a_{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{B}(V^b)$.

En identifiant localement les différents développements en série, on montre que, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n$, l'élément $a_{\boldsymbol{k}}$ appartient à $\mathscr{O}(V)$. Nous avons donc construit un morphisme

$$\varphi_{V,\boldsymbol{t}} : \mathscr{O}\left(\overline{D}_V(\boldsymbol{t})\right) \to \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$$

qui coïncide avec le morphisme naturel $\mathscr{O}(V)[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$ sur $\mathscr{O}(V)[\boldsymbol{T}]$.

Montrons que le morphisme $\varphi_{V,\boldsymbol{t}}$ est injectif. Supposons que deux fonctions f et g de $\mathscr{O}\left(\overline{D}_V(\boldsymbol{t})\right)$ aient la même image. Soit $b \in V$. Notons x le point 0 de la fibre X_b. Les fonctions f et g ont même développement dans $L_b \simeq \mathscr{O}_{X,x}$. On en déduit que les fonctions f et g coïncident sur un voisinage de x dans la fibre X_b. Puisque cette fibre est un espace irréductible, les fonctions f et g coïncident nécessairement sur toute la fibre. On en déduit finalement que $f = g$. □

Afin de décrire explicitement l'image du morphisme précédent, introduisons une notation. Pour toute partie compacte V de B et tout élément $\boldsymbol{t}$ de $\mathbf{R}_+^n$, nous noterons

$$\mathscr{O}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$$

l'anneau des séries à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ de la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$$

qui vérifient la condition suivante :

$$\exists \boldsymbol{r} > \boldsymbol{t},\ \lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\, \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}} = 0.$$

Proposition 3.2.14. — *Soit V une partie compacte de B. Soit $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}_+^n$. L'image du morphisme $\varphi_{V,\boldsymbol{t}}$ est contenue dans $\mathscr{O}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{O}(\overline{D}_V(\boldsymbol{t}))$. D'après le lemme 3.2.12, il existe un polyrayon $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{t}$ telle que la fonction f soit définie sur $\mathring{D}_V(\boldsymbol{v})$. La proposition précédente nous montre que la fonction f possède un développement en série de la forme

$$f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!].$$

Soit $b \in V$. Puisque le groupe $|\mathscr{H}(b)^*|$ est discret dans $\mathbf{R}_+^*$, il existe une famille $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbf{R}_+^*$ qui vérifie $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ et dont l'image est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q} \times_{\mathbf{Z}} \left(\mathbf{R}_+^*/|\mathscr{H}(b)^*|\right)$. Notons x l'unique point de la fibre X_b qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |T_i(x)| = u_i.$$

La description de l'anneau local au point x obtenue au théorème 2.4.8 nous assure qu'il existe un voisinage V^b de b dans B et $\boldsymbol{r}_b > \boldsymbol{v} > \boldsymbol{t}$ tels que

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_{V^b}\, \boldsymbol{r}_b^{\boldsymbol{k}} = 0.$$

Par compacité, nous pouvons recouvrir la partie V par un nombre fini de compacts $V^{b_1}, \ldots, V^{b_p}$, avec $p \in \mathbf{N}$ et $b_1, \ldots, b_p \in V$. On en déduit qu'il existe $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{t}$ tel que

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_{V}\, \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}} = 0.$$

□

Remarque 3.2.15. — Ce résultat cache un principe du prolongement analytique. Nous n'insisterons pas ici sur ce point, mais consacrerons la section 3.6 à ce propos.

Intéressons-nous, à présent, à la réciproque de ce résultat. Nous n'allons considérer que certaines parties compactes de la base.

Théorème 3.2.16. — *Soit V une partie compacte et connexe de B. Supposons que le point central de B n'appartienne pas au bord du compact V. Soit $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}_+^n$. Alors le morphisme*

$$\varphi_{V,\boldsymbol{t}} : \mathscr{O}\left(\overline{D}_V(\boldsymbol{t})\right) \hookrightarrow \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$$

réalise un isomorphisme sur l'anneau $\mathscr{O}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$.

Démonstration. — D'après les propositions qui précèdent, il nous suffit de montrer que toute série de la forme donnée appartient à l'image de $\varphi_{V,\boldsymbol{t}}$. Nous allons distinguer plusieurs cas, en fonction du compact V.

Commençons par considérer un compact de la forme

$$V = [a_{\sigma,\alpha}, a_{\sigma,l(\sigma)}],$$

avec $\sigma \in \Sigma$ et $\alpha \in]0, l(\sigma)[$.

Soit $\boldsymbol{r}' \in \mathbf{R}_+^n$ tel que $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{r}' < \boldsymbol{r}$. Soit $\mu > 1$ tel que $\boldsymbol{t} < (\boldsymbol{r}')^\mu < \boldsymbol{r}$. Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n$. Nous avons

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} |a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^\alpha\, (\boldsymbol{r}')^{\boldsymbol{k}} = 0$$

et l'on en déduit que

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} |a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^{\alpha\mu}\, \left((\boldsymbol{r}')^\mu\right)^{\boldsymbol{k}} = 0.$$

Remarquons, à présent, que, quel que soit $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^n$, l'élément $a_{\boldsymbol{k}}$ de $\mathscr{O}(V) = \hat{A}_\sigma$ se prolonge à l'ouvert $U =]a_{\sigma,\alpha\mu}, a_{\sigma,l(\sigma)}]$ et vérifie

$$\|a_{\boldsymbol{k}}\|_U = |a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma^{\alpha\mu}.$$

On en déduit que la série f définit un élément de $\mathscr{O}\big(\mathring{D}_U(\boldsymbol{r}')\big)$ et donc de $\mathscr{O}\left(\overline{D}_V(\boldsymbol{t})\right)$.

Ce raisonnement met en évidence le fait que la difficulté du problème réside dans l'étude du comportement au bord du compact V. Remarquons que ce bord ne peut contenir qu'un nombre fini de points. En effet, si le compact V ne contient pas le point central de B, sa connexité lui impose d'être contenu dans une branche de B. Il est donc de la forme

$$V = [a_\sigma^u, a_\sigma^v],$$

avec $\sigma \in \Sigma$, $u, v \in \,]0, l(\sigma)]$ et $u \leq v$. Son bord contient alors au plus deux points. Si le compact V contient le point central a_0 de B, alors, par hypothèse, il contient un voisinage de ce point et il n'existe donc qu'un nombre fini de branches de B que V ne contient pas entièrement. On en déduit que le bord du compact V n'est constitué que d'un nombre fini de points. En reprenant le raisonnement précédent en chaque point du bord du compact V, on obtient le résultat annoncé. □

Remarque 3.2.17. — Énoncée de la même façon, la proposition précédente est fausse si le point central de B se situe sur le bord du compact V. Considérons, par exemple, la partie compacte constituée du seul point central de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$,

$$V = \{a_0\}.$$

L'anneau $\mathscr{O}(V)$ est alors l'anneau $\mathbf{Q}$ et la norme $\|.\|_V$ est la norme triviale.

Plaçons-nous sur la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbf{Z}}$. Soit $t \in [0, 1[$. L'anneau $\mathscr{O}(V)\langle |T| \leq t\rangle^\dagger$ n'est autre que l'anneau $\mathbf{Q}[\![T]\!]$. Considérons la série

$$f = \sum_{k \in \mathbf{N}} k!\, T^k.$$

Elle appartient bien à l'anneau précédent, mais ne peut se prolonger à aucun disque de centre 0 et de rayon strictement positif de la branche archimédienne de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

De même, pour tout nombre premier p, la série

$$f = \sum_{k \in \mathbf{N}} q^{-k^2}\, T^k \in \mathbf{Q}[\![T]\!]$$

ne peut se prolonger à aucun disque de centre 0 et de rayon strictement positif de la branche p-adique de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Le cas des couronnes se traite de façon analogue à celui des disques. Introduisons de nouveau une notation. Soient V une partie compacte de B et $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$

deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$. Posons $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid s_i > 0\}$ et $J = [\![1,n]\!] \setminus I$. Nous noterons

$$\mathscr{O}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$$

l'anneau constitué des séries à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ de la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}},$$

qui vérifient les trois conditions suivantes :

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n \setminus \left(\prod_{i\in I}\mathbf{R} \times \prod_{i\in J}\mathbf{R}_+\right),\ a_{\boldsymbol{k}} = 0,$$

$$\exists \boldsymbol{r} > \boldsymbol{t},\ \lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\, \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}} = 0$$

et

$$\exists \boldsymbol{r} \prec \boldsymbol{s},\ \lim_{\boldsymbol{k}\to-\infty} \|a_{\boldsymbol{k}}\|_V\, \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}} = 0.$$

En particulier, si $\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$, alors cet anneau est contenu dans $\mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$ et nous avons l'égalité

$$\mathscr{O}(V)\langle \mathbf{0} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger = \mathscr{O}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger.$$

Proposition 3.2.18. — *Soit V une partie compacte de B. Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant l'inégalité $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t}$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}(V)[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$$

se prolonge en un morphisme injectif

$$\varphi_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} : \mathscr{O}\left(\overline{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\right) \hookrightarrow \mathscr{O}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{T} \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger.$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve des propositions 3.2.13 et 3.2.14. Il faut cependant prendre garde au fait que nous ne pouvons plus considérer un voisinage du point 0 d'une fibre. Il est cependant possible de remplacer ce point par un point de type 3 déployé, c'est-à-dire un point x défini par des équations du type

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |T_i(x)| = r_i,$$

où $r_1, \ldots, r_n$ sont des éléments de $\mathbf{R}_+^*$ tels que l'image de la famille $(r_1, \ldots, r_n)$ dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\left(\mathbf{R}_+^*/|\mathscr{H}(b)^*|\right)$ est libre. Un tel choix est possible car le groupe $|\mathscr{H}(b)^*|$ est discret dans $\mathbf{R}_+^*$. Dans ce cas, nous disposons encore d'une description de l'anneau local en termes de séries, par le théorème 2.4.8. $\square$

Comme dans le cas des disques, nous pouvons raffiner cette proposition pour obtenir, dans certains cas, un résultat d'isomorphie similaire à celui de la proposition 3.2.16. La démonstration en étant complètement analogue, nous ne la rédigerons pas.

Théorème 3.2.19. — *Soit V une partie compacte et connexe de B. Supposons que le point central de B n'appartienne pas au bord du compact V. Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant l'inégalité $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t}$. Alors, le morphisme*

$$\varphi_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} : \mathscr{O}\left(\overline{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\right) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$$

est un isomorphisme.

Intéressons-nous, à présent, au bord analytique des couronnes. Dans le cas d'espaces définis au-dessus d'un corps ultramétrique, nous disposons d'une description explicite.

Lemme 3.2.20. — *Soit $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet. Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux élément de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant l'inégalité $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t}$. Considérons la couronne C de $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ de rayon intérieur $\boldsymbol{s}$ et de rayon extérieur $\boldsymbol{t}$. Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, notons*

$$R_i = \{s_i, t_i\} \cap \mathbf{R}_+^*.$$

La couronne C possède un bord de Shilov. C'est l'ensemble fini et algébriquement trivial

$$\Gamma_C = \{\eta_{r_1,\ldots,r_n} \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i \in R_i\}.$$

Démonstration. — La description explicite des fonctions définies au voisinage de la couronne C et de la norme uniforme sur C montre que, pour tout élément f de $\mathscr{O}(C)$, nous avons

$$\|f\|_C = \max_{z \in \Gamma_C}(|f(x)|).$$

Puisque $\mathscr{O}(C)$ est dense dans $\mathscr{B}(C)$ pour la norme $\|.\|_C$, ce résultat vaut encore pour les éléments de $\mathscr{B}(C)$. On en déduit que la partie Γ_C est un bord analytique du compact C.

En outre, pour tout point z de Γ_C, il existe un élément $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$ tel que la fonction $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$ appartienne à $\mathscr{K}(C)$ et atteigne son maximum en valeur absolue au point z et uniquement en ce point. Par conséquent, tout bord analytique du compact C contient la partie Γ_C. Cette dernière est donc bien le bord de Shilov du compact C. □

Dans le cas archimédien, nous disposons également d'une description.

Lemme 3.2.21. — *Soit $(k, |.|)$ un corps archimédien complet. Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant l'inégalité $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t}$. Considérons la couronne C de $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ de rayon intérieur $\boldsymbol{s}$ et de rayon extérieur $\boldsymbol{t}$. Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, notons*

$$R_i = \{s_i, t_i\} \cap \mathbf{R}_+^*.$$

La couronne C possède un bord de Shilov. C'est l'ensemble compact

$$\Gamma_C = \{x \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\mathrm{an}} \,|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists r_i \in R_i,\ |T_i(x)| = r_i\}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que le principe du maximum assure que le bord topologique de la couronne C, qui n'est autre que la partie Γ_C, est un bord analytique de C.

Distinguons maintenant deux cas. Supposons, tout d'abord, que le corps k est le corps $\mathbf{C}$. Nous avons alors

$$\Gamma_C = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \,|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists r_i \in R_i,\ |z_i| = r_i\}.$$

Pour tout point P de Γ_C, il existe un élément $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbf{C}^n$ et un élément $(k_1, \ldots, k_n)$ de $\{-1, 1\}^n$ tels que la fonction $\prod_{1 \leq i \leq n}(z_i - \alpha_i)^{k_i}$ soit définie au voisinage de la couronne C et atteigne son maximum en valeur absolue sur la couronne au point P et uniquement en ce point. Par conséquent, tout bord analytique du compact C contient la partie Γ_C. Cette dernière est donc bien le bord de Shilov du compact C.

Supposons, maintenant, que le corps k est le corps $\mathbf{R}$. Soit P un point de Γ_C. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbf{C}^n$ et un élément$(k_1, \ldots, k_n)$ de $\{-1, 1\}^n$ tels que la fonction $\prod_{1 \leq i \leq n}((z_i - \alpha_i)(z_i - \bar{\alpha}_i))^{k_i}$ soit définie au voisinage de la couronne C et atteigne son maximum en valeur absolue sur la couronne dans la boule de centre P et de rayon ε et pas en dehors. Par conséquent, tout bord analytique de C doit contenir un point de cette boule. On en déduit que tout bord analytique, qui, par définition, est fermé, contient le compact Γ_C. Ce dernier est donc bien le bord de Shilov du compact C.

□

Ces rappels nous permettent de décrire un bord analytique non trivial des couronnes relatives à l'aide du lemme suivant. Remarquons que toute couronne compacte au-dessus d'une partie compacte et connexe de B (et donc pro-rationnelle, d'après la proposition 3.1.16) est pro-rationnelle et donc spectralement convexe, d'après le théorème 1.2.11.

Lemme 3.2.22. — *Soit V une partie compacte et connexe de B et C une couronne compacte au-dessus de V. Pour tout point v de V, notons γ_v le bord de*

Shilov du compact $C \cap X_v$ dans X_v. Alors, la partie

$$\Gamma = \bigcup_{v \in V} \gamma_v$$

est un bord analytique de la couronne C.

Démonstration. — Puisque $\mathscr{K}(C)$ est dense dans $\mathscr{B}(C)$ pour la norme $\|.\|_C$, il suffit de démontrer que, pour tout élément f de $\mathscr{K}(C)$, nous avons

$$\|f\|_C = \|f\|_\Gamma.$$

Soit f un élément de $\mathscr{K}(C)$. Il existe un élément v de V tel que l'on ait

$$\|f\|_C = \|f\|_{C \cap X_v}.$$

La fonction f induit par restriction une section sur $C \cap X_v$ du préfaisceau des fonctions rationnelles sur X_v. Nous avons donc

$$\|f\|_{C \cap X_v} = \|f\|_{\gamma_v}.$$

On en déduit le résultat attendu. □

La description des fonctions au voisinage des couronnes obtenue plus haut permet de préciser ce résultat dans le cas ultramétrique.

Proposition 3.2.23. — *Soit V une partie compacte et connexe de B_{um} et C une couronne compacte au-dessus de V. Notons Γ_V le bord de Shilov du compact V dans B. Pour tout point v de V, notons Γ_v le bord de Shilov du compact $C \cap X_v$ dans X_v. La couronne C possède un bord de Shilov. C'est l'ensemble fini*

$$\Gamma = \bigcup_{v \in \Gamma_V} \gamma_v.$$

Démonstration. — Dans le cas où la couronne est vide, le résultat est immédiat. Dans le cas contraire, il existe deux éléments $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ de $\mathbf{R}_+^n$ vérifiant $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t}$ tels que $C = \overline{C}_V(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. D'après la proposition 3.2.18, le morphisme naturel $\mathscr{O}(V)[\boldsymbol{T}] \to \mathscr{O}(V)[\![\boldsymbol{T}]\!]$ se prolonge en un morphisme injectif

$$\mathscr{O}(C) \hookrightarrow \mathscr{O}(V)\langle \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{T} \leq \boldsymbol{t} \rangle^\dagger.$$

Commençons par montrer que, pour tout élément $f = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$ de $\mathscr{O}(C)$, nous avons

$$\|f\|_C = \max_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n} \left(\|a_{\boldsymbol{k}}\|_V \, \mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) \right).$$

Puisque la couronne C est compacte, il existe un élément z de C en lequel nous avons l'égalité

$$\|f\|_C = |f(z)|.$$

Nous avons alors

$$|f(z)| = \|f\|_{C\cap X_{\pi(z)}} = \max_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\Big(|a_{\boldsymbol{k}}(\pi(z))|\,\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})\Big)\,,$$

puisque le point $\pi(z)$ appartient à la partie ultramétrique B_{um} de B. On en déduit l'égalité annoncée.

De cette description explicite de la norme, on déduit que tout élément de $\mathscr{O}(C)$, et donc tout élément de $\mathscr{B}(C)$ atteint son maximum sur Γ, autrement dit que Γ est un bord analytique de C. En outre, pour tout point z de Γ, il existe un élément a de $\mathscr{K}(V)$ (son existence est assurée par la proposition 3.1.26) et un élément $\boldsymbol{k}$ de $\mathbf{Z}^n$ tels que la fonction $a\,\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$ appartienne à $\mathscr{K}(C)$ et atteigne son maximum en valeur absolue au point z et uniquement en ce point. Par conséquent, la partie Γ est le bord de Shilov de la couronne compacte C. □

Pour finir, calculons explicitement ces anneaux globaux dans un cas particulier, celui des couronnes au-dessus de voisinages compacts du point central.

Proposition 3.2.24. — *Soit Σ' une partie finie de Σ contenant Σ_∞. Pour $\sigma\in\Sigma'$, choisissons un élément $\varepsilon_\sigma\in\,]0,1]$. Considérons la partie compacte V de B définie par*

$$V = \left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma'}[a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}]\right)\cup\left(\bigcup_{\sigma\notin\Sigma'}B_\sigma\right).$$

Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^n$. Posons $I=\{i\in[\![1,n]\!]\,|\,s_i>0\}$ et $J=[\![1,n]\!]\setminus I$. L'anneau $\mathscr{O}(V)\langle\boldsymbol{s}\le|\boldsymbol{T}|\le\boldsymbol{t}\rangle^\dagger$ est constitué des séries à coefficients dans K de la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) $\forall\boldsymbol{k}\ge 0,\ a_k\in A\left[\dfrac{1}{\Sigma'}\right]$;

ii) $\forall\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\setminus\left(\prod_{i\in I}\mathbf{R}\times\prod_{i\in J}\mathbf{R}_+\right),\ a_{\boldsymbol{k}}=0$;

iii) $\forall\sigma\in\Sigma',\ \exists\boldsymbol{r}\prec\boldsymbol{s}^{\varepsilon_\sigma},\ \lim\limits_{\boldsymbol{k}\to-\infty}|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma\,\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}}=0$;

iv) $\forall\sigma\in\Sigma',\ \exists\boldsymbol{r}>\boldsymbol{t}^{\varepsilon_\sigma},\ \lim\limits_{\boldsymbol{k}\to+\infty}|a_{\boldsymbol{k}}|_\sigma\,\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}}=0$.

Si $\boldsymbol{t}\ge 1$, pour toute série du type précédent, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^n\,|\,a_{\boldsymbol{k}}\ne 0\}$$

est fini. Si $\boldsymbol{s}\le 1$, pour toute série du type précédent, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\cap\,]-\infty,0]\,|\,a_{\boldsymbol{k}}\ne 0\}$$

est fini. En particulier, si $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ *et* $\boldsymbol{t} \geq 1$*, alors l'anneau* $\mathscr{O}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^{\dagger}$ *n'est autre que l'anneau de polynômes* $A[1/(\Sigma' \cap \Sigma_f)][\boldsymbol{T}]$*.*

Démonstration. — Les résultats démontrés aux numéros 3.1.2.2 et 3.1.2.3 permettent de démontrer que nous avons

$$\mathscr{O}(V) = A\left[\frac{1}{\Sigma' \cap \Sigma_f}\right] \text{ et } \|.\|_V = \max_{\sigma \in \Sigma'}(|.|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}).$$

La première partie du résultat découle alors immédiatement de la définition de l'anneau $\mathscr{O}(V)\langle|\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle^{\dagger}$.

D'après la formule du produit, pour tout élément non nul a de $A[1/\Sigma']$, nous avons $\prod_{\sigma \in \Sigma'} |a|_\sigma \geq 1$ et donc

$$\|a\|_V = \max_{\sigma \in \Sigma'}(|a|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}) \geq 1.$$

On en déduit la seconde partie du résultat. □

3.3. Points rigides des fibres

Soit b un point de B. La proposition 2.4.3 nous permet de décrire un système fondamental de voisinages explicite d'un point x de la fibre X_b défini par des équations du type

$$(T_1 - \alpha_1)(x) = \cdots = (T_n - \alpha_n)(x) = 0,$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathscr{O}_{B,b}$. Remarquons que, lorsque l'espace de base est le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres, tous les points rationnels de la fibre X_b sont de ce type. En effet, d'après le lemme 3.1.22, le morphisme naturel $\mathscr{O}_{B,b} \twoheadrightarrow \mathscr{H}(b)$ est surjectif.

Dans ce numéro, nous montrons qu'il est possible de ramener l'étude de certains points de l'espace X, à savoir les points rigides des fibres, à celle des points rationnels par le biais d'un isomorphisme local (*cf.* proposition 2.5.3).

3.3.1. Isomorphismes locaux

Nous montrons ici que nous nous trouvons bien dans le cadre d'application de la proposition 2.5.3 et en précisons les conclusions. Nous distinguerons selon le type de la fibre dans laquelle se situe le point rigide considéré. Commençons par le cas le plus simple : celui des fibres extrêmes.

Proposition 3.3.1. — *Soient $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f et x un point rigide de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes. Alors, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel*

$$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x.

Démonstration. — L'extension de corps $k_{\mathfrak{m}} \to \mathscr{H}(x)$ est une extension finie et séparable, puisque le corps $k_{\mathfrak{m}}$ est fini. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe un élément $\tilde{\alpha}$ de $\mathscr{H}(x)$ tel que $k_{\mathfrak{m}}[\tilde{\alpha}] = \mathscr{H}(x)$. Notons $\tilde{P}(S) \in k_{\mathfrak{m}}[S]$ le polynôme minimal unitaire de $\tilde{\alpha}$ sur $k_{\mathfrak{m}} = A/\mathfrak{m}$. Choisissons un relevé unitaire $P(S)$ de $\tilde{P}(S)$ dans $A[S]$. Ce polynôme est encore irréductible. Considérons l'extension finie $K' = K[S]/(P(S))$ de K. C'est un corps de nombres dont nous noterons A' l'anneau des entiers.

Posons $V = [a_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. L'anneau de Banach $(\mathscr{B}(V), \|.\|_V)$ n'est autre que l'anneau $(\hat{A}_{\mathfrak{m}}, |.|_{\mathfrak{m}})$. Puisque le polynôme $P(S)$ est irréductible dans $k_{\mathfrak{m}}[S]$, l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est divisé par un unique idéal maximal $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$ de A' et nous disposons d'un isomorphisme

$$u : \hat{A}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S)) \xrightarrow{\sim} \hat{A}'_{\mathfrak{m}'}.$$

Munissons l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S))$ de la norme

$$\|.\|' = |u(.)|_{\mathfrak{m}'}.$$

C'est alors un anneau de Banach muni d'une norme uniforme. Notons W le segment $[a_{\mathfrak{m}'}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}'}]$ de $\mathcal{M}(A')$. L'isomorphisme u identifie alors les algèbres normées $(\mathscr{B}(V)[S]/(P(S)), \|.\|')$ et $(\mathscr{B}(W), \|.\|_W)$.

Puisque le polynôme P est unitaire, le morphisme de $\mathscr{B}(V)$-modules

$$n : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(V)^d & \to & \mathscr{B}(V)[S]/(P(S)) \\ (a_0, \ldots, a_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. Munissons l'algèbre $\mathscr{B}(V)^d$ de la norme $\|.\|_\infty$ donnée par le maximum des normes des coefficients. Nous définissons alors une norme, notée $\|.\|_{V,\mathrm{div}}$, sur $\mathscr{B}(V)[S]/(P(S))$ de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathscr{B}(V)[S]/(P(S)),\ \|f\|_{V,\mathrm{div}} = \|n^{-1}(f)\|_\infty.$$

Pour appliquer la proposition 2.5.3, nous devons démontrer que les normes $\|.\|'$ et $\|.\|_{V,\mathrm{div}}$, définies sur $\mathscr{B}(V)$, sont équivalentes. Tel est bien le cas car ce sont deux normes sur un même $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$-espace vectoriel de dimension finie qui induisent la même valeur absolue sur $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$, à savoir $|.|_{\mathfrak{m}}$.

Notons

$$Y = \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)} \text{ et } Y' = \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(V)[S]/(P(S))}.$$

Notons encore

$$\varphi : Y' \to Y \text{ et } \psi : \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

les morphismes naturels. La partie V est une partie compacte et connexe de $\mathcal{M}(A)$. Notons L_V son image réciproque dans $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$. La partie W est une partie compacte et connexe de $\mathcal{M}(A')$. Notons L'_W son image réciproque dans $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$. Considérons, à présent, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ {\scriptstyle\chi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\chi} \\ \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A} \end{array}.$$

D'après la proposition 3.1.16, les parties compactes V et W sont pro-rationnelles. D'après la proposition 1.2.15, les morphismes χ et χ' sont des isomorphismes d'espaces annelés au-dessus, respectivement, de l'intérieur de L_V et de l'intérieur de L'_W. Remarquons que le point x appartient à la fibre extrême $\pi^{-1}(\tilde{a}_{\mathfrak{m}})$, située à l'intérieur de L_V. En outre, tout antécédent de x par le morphisme ψ appartient à la fibre extrême située au-dessus de $\tilde{a}_{\mathfrak{m}'}$ et donc à l'intérieur de L'_W. Nous noterons encore x l'antécédent du point x par le morphisme χ. Pour conclure, il nous suffit de trouver un point x' de Y', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme φ induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x.

Notons α l'image de S dans l'anneau $\mathscr{B}(V)[S]/(P(S))$. D'après la proposition 2.5.1, il existe une fonction R définie sur un voisinage U de x dans Y telle que $P(R) = 0$ et $R(x) = \tilde{\alpha}$ dans $\mathscr{H}(x)$. Construisons alors une section σ du morphisme φ au-dessus de U, par le procédé décrit immédiatement avant la proposition 2.5.3. Par sa définition même, nous avons

$$S(\sigma(x)) = R(x) \text{ dans } \mathscr{H}(x),$$

autrement dit,

$$R(\sigma(x)) = \alpha \text{ dans } \mathscr{H}(\sigma(x)).$$

Soit b un point de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$. Le corps $\mathscr{H}(b)$ est égal au corps $k_{\mathfrak{m}}$ ou au corps $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$. Dans tous les cas, l'image du polynôme $P(T)$ est irréductible dans $\mathscr{H}(b)[T]$. Puisque le corps $\mathscr{H}(b)$ est parfait, elle est également séparable. Soit c un point de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V)[S]/(P(S)))$ au-dessus du point b. L'élément α de l'anneau $\mathscr{B}(V)[S]/(P(S))$ s'envoie sur une racine du polynôme $P(T)$ dans $\mathscr{H}(c)$. Puisque le polynôme P est séparable, nous avons $P'(\alpha) = 0$.

Pour finir, d'après le corollaire 3.4.4, le point x possède, dans X, et donc dans Y, un système fondamental de voisinages connexes. Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.5.3. Nous obtenons, au voisinage du point x, une section du morphisme φ qui est un isomorphisme local.

Pour conclure, il nous reste à montrer que le point $x' = \sigma(x)$ est rationnel dans sa fibre. Considérons la projection b' de ce point sur $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V)[S]/(P(S)))$. Par définition, le caractère associé est

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{B}(V)[S]/(P(S)) & \to & \mathscr{H}(x) \\ Q(S) & \mapsto & Q(R(x)) = Q(\tilde{\alpha}) \end{array}.$$

L'image de ce morphisme est le corps $k_{\mathfrak{m}}[\tilde{\alpha}] = \mathscr{H}(x) = \mathscr{H}(x')$. On en déduit que le morphisme $\mathscr{H}(b) \to \mathscr{H}(x')$ est un isomorphisme et donc que le point x' est rationnel dans sa fibre. $\square$

Intéressons-nous, à présent, aux fibres internes.

Proposition 3.3.2. — *Soient τ un élément de Σ, ε un élément de $]0, l(\tau)[$ et x un point rigide de la fibre interne $X_{a_\tau^\varepsilon}$. Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Alors, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel*

$$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x.

Démonstration. — L'extension de corps $\hat{K}_\tau \to \mathscr{H}(x)$ est une extension finie et séparable, puisque la caractéristique du corps $\hat{K}_\tau$ est nulle. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe un élément α de $\mathscr{H}(x)$ tel que $\hat{K}_\tau[\alpha] = \mathscr{H}(x)$. Si le corps $\hat{K}_\tau$ est ultramétrique, le lemme de Krasner assure que nous pouvons supposer que l'élément α est algébrique sur le corps K. Si le corps $\hat{K}_\tau$ est archimédien, nous pouvons encore supposer que α est algébrique sur le corps K, et même que c'est une racine carrée de -1. Notons $P(S) \in K[S]$ le polynôme minimal unitaire de α sur K. Ce polynôme est encore irréductible sur le corps $\hat{K}_\tau$. Considérons l'extension finie $K' = K[S]/(P(S))$ de K. C'est un corps de nombres dont nous noterons A' l'anneau des entiers.

Soient $\lambda \in]0, \varepsilon[$ et $\mu \in]\varepsilon, l(\tau)[$. Posons $V = [a_\tau^\lambda, a_\tau^\mu]$. L'anneau de Banach $(\mathscr{B}(V), \|.\|_V)$ n'est autre que l'anneau $(\hat{K}_\tau, \max(|.|_\tau^\lambda, |.|_\tau^\mu))$. Puisque le polynôme $P(S)$ est irréductible dans $\hat{K}_\tau[S]$, la place τ de K se prolonge en une unique place τ' de K' et nous disposons d'un isomorphisme

$$u : \hat{K}_\tau[S]/(P(S)) \xrightarrow{\sim} \hat{K'}_{\tau'}.$$

Munissons l'anneau $\hat{K}_\tau[S]/(P(S))$ de la norme

$$\|.\|' = \max(|u(.)|_{\tau'}^\lambda, |u(.)|_{\tau'}^\mu).$$

C'est alors un anneau de Banach muni d'une norme uniforme. Notons W le segment $[a_{\tau'}^\lambda, a_{\tau'}^\mu]$ de $\mathcal{M}(A')$. L'isomorphisme u identifie alors les algèbres normées $(\mathscr{B}(V)[S]/(P(S)), \|.\|')$ et $(\mathscr{B}(W), \|.\|_W)$.

Introduisons une notation. Soient L une K-algèbre et $\|.\|$ une norme sur L. Puisque le polynôme P est unitaire, le morphisme de L-modules

$$n_L : \begin{array}{ccc} L^d & \to & L[S]/(P(S)) \\ (a_0, \ldots, a_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. Munissons l'algèbre L^d de la norme $\|.\|_\infty$ donnée par le maximum des normes des coefficients. Nous définissons alors une norme, notée $\|.\|_{\mathrm{div}}$, sur $L[S]/(P(S))$ de la façon suivante :

$$\forall f \in L[S]/(P(S)),\ \|f\|_{\mathrm{div}} = \|n_L^{-1}(f)\|_\infty.$$

Pour appliquer la proposition 2.5.3, nous devons démontrer que les normes $\|.\|'$ et $\|.\|_{V,\mathrm{div}}$, définies sur $\mathscr{B}(V)$, sont équivalentes. Or la norme $\|.\|_{V,\mathrm{div}}$ est équivalente à la norme $\max(|.|^\lambda_{\tau,\mathrm{div}}, |.|^\mu_{\tau,\mathrm{div}})$. Il nous suffit, à présent, de remarquer que, quel que soit $\nu \in \{\lambda, \mu\}$, les normes $|.|^n_{\tau,\mathrm{div}} u$ et $|.|^\nu_{\tau'}$ sont équivalentes. En effet, ce sont deux normes sur un même $\hat{K}_\tau$-espace vectoriel de dimension finie qui induisent la même valeur absolue sur $\hat{K}_\tau$, à savoir $|.|^\nu_\tau$.

Le reste du raisonnement se déroule exactement comme dans la preuve précédente. □

Pour terminer, traitons le cas de la fibre centrale.

Proposition 3.3.3. — *Soit x un point rigide de la fibre centrale X_0. Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Alors, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel*

$$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x.

Démonstration. — L'extension de corps $\mathscr{H}(a_0) = K \to \mathscr{H}(x)$ est une extension finie et séparable, puisque la caractéristique du corps K est nulle. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe un élément α de $\mathscr{H}(x)$ tel que $K[\alpha] = \mathscr{H}(x)$. Notons $P(S) \in K[S]$ le polynôme minimal unitaire de α sur K. Il existe un unique isomorphisme

$$K[S]/(P(S)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(x)$$

envoyant S sur α.

Le caractère séparable de l'extension $\mathscr{H}(x)/K$ assure également que l'anneau des entiers A' de $\mathscr{H}(x)$ est un anneau de Dedekind de type fini sur A. Par conséquent, il existe un élément f de K tel que

$$A[f, \alpha] = A'[f].$$

Choisissons un sous-ensemble fini Σ_0 de Σ_f de sorte que la fonction f soit définie et inversible sur l'ouvert de B défini par

$$U = B \setminus \bigcup_{\mathfrak{m}\in\Sigma_0} \{\tilde{a}_{\mathfrak{m}}\}.$$

Quitte à augmenter l'ensemble Σ_0, nous pouvons supposer que les coefficients du polynôme $P(S)$ sont définis en tout point de U et que, quel que soit b dans U, l'image du polynôme $P(S)$ est séparable sur $\mathscr{H}(b)$. Pour $\mathfrak{m}$ dans Σ_f, notons $r(\mathfrak{m})$ l'ensemble des idéaux maximaux de A' divisant l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Pour σ dans Σ_∞, notons $r(\sigma)$ l'ensemble des plongements complexes de $\mathscr{H}(x)$ à conjugaison près qui prolongent σ. Notons

$$\Sigma_0' = \bigcup_{\mathfrak{m}\in\Sigma_0} r(\mathfrak{m}) \text{ et } \Sigma_\infty' = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\infty} .$$

Considérons la partie compacte contenue dans U définie par

$$M = B \setminus \bigcup_{\mathfrak{m}\in\Sigma_0}]a_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}].$$

Considérons l'algèbre de Banach $(\mathscr{B}(M), \|.\|_M)$. Nous avons

$$\mathscr{B}(M) = A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right] = \left\{\frac{a}{b} \in K,\ a, b \in A,\ b \neq 0,\ \exists \mathfrak{m} \in \Sigma_0,\ b \in \mathfrak{m}\right\}$$

et

$$\|.\|_M = \max_{\sigma\in\Sigma_0\cup\Sigma_\infty} (|.|_\sigma).$$

Le compact M étant contenu dans U, l'anneau $\mathscr{A}$ est un localisé de l'anneau $A[u]$. On en déduit que le morphisme

$$A\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right][S]/(P(S)) \xrightarrow{\sim} A'\left[\frac{1}{\Sigma_0'}\right]$$

est un isomorphime. Munissons l'anneau $\mathscr{B}(M)[S]/(P(S))$ de la norme

$$\|.\|' = \max_{\sigma\in\Sigma_0'\cup\Sigma_\infty'} (|.|_\sigma).$$

C'est alors un anneau de Banach muni d'une norme uniforme.

Introduisons une notation. Soient L une K-algèbre et $\|.\|$ une norme sur L. Puisque le polynôme P est unitaire, le morphisme de K-espaces vectoriels

$$n_L : \begin{array}{ccc} L^d & \to & L[S]/(P(S)) \\ (a_0, \ldots, a_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. Munissons l'algèbre L^d de la norme $\|.\|_\infty$ donnée par le maximum des normes des coefficients. Nous définissons alors une norme, notée $\|.\|_{\mathrm{div}}$, sur $L[S]/(P(S))$ de la façon suivante :

$$\forall f \in L[S]/(P(S)),\ \|f\|_{\mathrm{div}} = \|n_L^{-1}(f)\|_\infty.$$

Pour appliquer la proposition 2.5.3, nous devons démontrer que les normes $\|.\|'$ et $\|.\|_{M,\mathrm{div}}$, définies sur $\mathscr{B}(M)$, sont équivalentes. Or la norme $\|.\|_{M,\mathrm{div}}$ est équivalente à la norme

$$\max_{\sigma\in\Sigma_0\cup\Sigma_\infty}(|.|_{\sigma,\mathrm{div}}).$$

Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_0$. Nous disposons alors d'un isomorphisme

$$\hat{K}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S)) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m}'\in r(\mathfrak{m})} \hat{\mathscr{H}}(x)_{\mathfrak{m}'}.$$

On en déduit que les normes $|.|_{\mathfrak{m},\mathrm{div}}$ et $\max_{\mathfrak{m}'\in r(\mathfrak{m})}(|.|_{\mathfrak{m}'})$ sont équivalentes car ce sont deux normes sur un même $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$-espace vectoriel de dimension finie qui induisent la même valeur absolue sur $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$, à savoir $|.|_{\mathfrak{m}}$.

On raisonne de même pour les éléments de Σ_∞ en prenant garde au fait que l'isomorphisme ne vaut que si l'on considère tous les plongements complexes et pas seulement les classes de conjugaison.

Le reste du raisonnement se déroule exactement comme dans la preuve de la première proposition.

□

Pour plus de clarté, nous regroupons les trois résultats obtenus dans la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. — *Soit x un point rigide de l'une des fibres de l'espace X. Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Alors, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel*

$$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x.

3.3.2. Voisinages sur la droite

Pour utiliser la proposition qui précède, il est nécessaire de disposer d'un résultat de connexité locale. Nous consacrons donc une section à l'étude de la

topologie au voisinage des points rigides des fibres dans le cas le plus simple : celui de la droite. Dans les propositions qui suivent, nous supposerons donc que $n = 1$ et que $X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$.

Proposition 3.3.5. — *Soient b un point de B et $P(T)$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$ dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est irréductible. Soit x le point de la fibre X_b défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. Soient B_0 un voisinage de b dans B sur lequel les coefficients du polynôme P sont définis.*

Soit U un voisinage du point x dans X. Il existe un voisinage V du point b dans B_0 et un nombre réel $t > 0$ tels que l'on ait l'inclusion

$$\left\{y \in X_V \,\middle|\, |P(T)(y)| < t\right\} \subset U.$$

Démonstration. — D'après le corollaire 1.1.12, pour toute partie compacte V de B_0 et tout élément s de $\mathbf{R}_+$, la partie de X définie par

$$\{y \in X_V \mid |P(T)(y)| \leq s\}$$

est compacte. Le résultat découle alors du lemme 2.4.1. □

Nous souhaitons, à présent, montrer que les voisinages qui figurent dans l'énoncé de la proposition sont connexes par arcs lorsque leur projection sur la base l'est. À cet effet, nous commencerons par démontrer quelques résultats sur la topologie des fibres.

Lemme 3.3.6. — *Soit $(k, |.|)$ un corps valué, ultramétrique, maximalement complet et algébriquement clos. Soient $d \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in k$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. Posons*

$$P(T) = \prod_{i=1}^{d} (T - \alpha_i)$$

et

$$U = \left\{x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \,\middle|\, |P(T)(x)| < t\right\}.$$

Alors, pour tout point y de U, il existe un chemin tracé sur U qui joint le point y à l'un des points α_i, avec $i \in [\![1, d]\!]$.

Démonstration. — Soit y un point de U. Puisque le corps k est maximalement complet, il existe $\beta \in k$ et $r \in \mathbf{R}_+$ tels que $y = \eta_{\beta,r}$ dans $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Supposons, tout d'abord, qu'il existe $i \in [\![1, d]\!]$ tel que $\beta = \alpha_i$. Considérons alors le chemin

$$l : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \\ u & \mapsto & \eta_{\alpha_i,(1-u)r} \end{array}.$$

Il joint le point y au point α_i et tout polynôme décroît le long de ce chemin. En particulier, il est à valeurs dans U.

Revenons, à présent, au cas général. Nous distinguerons deux cas. Dans un premier temps, supposons, qu'il existe $i \in [\![1, d]\!]$ tel que $|\beta - \alpha_i| \leq r$. Alors le point $y = \eta_{\beta,r}$ n'est autre que le point $\eta_{\alpha_i,r}$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Il nous reste à traiter le cas où, quel que soit $i \in [\![1, d]\!]$, nous avons $|\beta - \alpha_i| > r$. Dans ce cas, nous avons

$$|P(T)(\eta_{\beta,r})| = \prod_{i=1}^{d} |(T - \alpha_i)(\eta_{\beta,r})| = \prod_{i=1}^{d} |\beta - \alpha_i|.$$

Notons $s = \min_{1 \leq i \leq d}(|\beta - \alpha_i|)$. Considérons le chemin

$$l' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{A}_s^{1,\mathrm{an}} \\ u & \mapsto & \eta_{\beta,(1-u)r+us} \end{array}.$$

Il joint le point y au point $\eta_{\beta,s}$, qui est du type considéré précédemment. En outre, la fonction P est constante le long du chemin l'. Il est donc bien à valeurs dans U. On en déduit le résultat annoncé. □

Lemme 3.3.7. — *Soient $d \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbf{C}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. Posons*

$$P(T) = \prod_{i=1}^{d} (T - \alpha_i)$$

et

$$U = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |P(z)|_\infty < t \right\}.$$

Alors, pour tout point y de U, il existe un chemin tracé sur U qui joint le point y à l'un des points α_i, avec $i \in [\![1, d]\!]$.

Démonstration. — Considérons l'application continue

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & P(z) \end{array}.$$

C'est un revêtement ramifié. Considérons le chemin tracé sur la base

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{C} \\ u & \mapsto & (1-u)\,P(y) \end{array}.$$

En relevant ce chemin à partir du point y, on obtient un chemin tracé sur U qui aboutit à l'un des racines du polynôme P. □

Corollaire 3.3.8. — *Soit $(k, |.|)$ un corps valué complet. Soient d un entier, $Q_1(T), \ldots, Q_d(T) \in k[T]$ des polynômes irréductibles et $t \in \mathbf{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Pour $i \in [\![1, d]\!]$, notons x_i le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par l'équation $Q_i(T)(x_i) = 0$. Posons*

$$P(T) = \prod_{i=1}^{d} Q_i$$

et

$$U = \left\{ x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \,\middle|\, |P(T)(x)| < t \right\}.$$

Alors, pour tout point y de U, il existe un chemin tracé sur U qui joint le point y à l'un des points x_i, avec $i \in [\![1, d]\!]$.

En particulier, si le polynôme $P(T)$ est une puissance d'un polynôme irréductible, alors la partie U est connexe par arcs.

Démonstration. — Soit $(L, |.|)$ une extension du corps valué $(k, |.|)$. Le morphisme induit

$$\mathbf{A}_L^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$$

est continu et surjectif. On en déduit qu'il suffit de démontrer le résultat pour une extension de k. Nous pouvons donc utiliser nous ramener à la situation du lemme 3.3.6, si la valeur absolue $|.|$ est ultramétrique, ou du lemme 3.3.7, si elle est archimédienne. □

Revenons, à présent, aux voisinages des points rigides dans l'espace total.

Proposition 3.3.9. — *Soient b un point de B et V un voisinage connexe par arcs de b dans B. Soit $P(T) \in \mathscr{O}(V)[T]$ un polynôme unitaire dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est irréductible. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Alors, la partie U de $X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ définie par*

$$U = \left\{ y \in X \,\middle|\, \pi(y) \in V,\ |P(T)(y)| < t \right\}$$

est connexe par arcs.

Démonstration. — Nous noterons x l'unique point de la fibre X_b qui vérifie

$$P(T)(x) = 0.$$

Nous allons montrer que tout point de U peut être joint au point x par un chemin tracé sur U. Nous allons distinguer plusieurs cas selon le type du point b.

Supposons, tout d'abord, que le point b est le point central a_0 de B. Soit y un point de U. Posons $c = \pi(y)$. Décomposons le polynôme $P(T)$ en produit de facteurs irréductibles et unitaires dans $\mathscr{H}(c)[T]$: il existe $d \in \mathbf{N}^*$, $Q_1(T), \ldots, Q_d(T)$ des polynômes irréductibles distincts et $n_1, \ldots, n_d \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$P(T) = \prod_{i=1}^{d} Q_i(T)^{n_i} \text{ dans } \mathscr{H}(c)[T].$$

Quel que soit $i \in [\![1, d]\!]$, notons y_i le point de la fibre X_c défini par l'équation $Q_i(T)(y_i) = 0$. D'après le lemme 3.3.8, il existe un indice $i \in [\![1, d]\!]$ et un chemin

tracé sur $X_c \cap U$ qui joint le point y au point y_i. Il nous reste à montrer que l'on peut joindre le point y_i au point x par un chemin tracé sur U. Si le point c est le point a_0, c'est évident.

Supposons, que le point c est un point interne de B. Il existe alors $\sigma \in \Sigma$ et $\varepsilon > 0$ tels que $c = a_\sigma^\varepsilon$. Puisque la partie V est supposée connexe par arcs, elle contient le segment $W = [a_0, a_\sigma^\varepsilon]$. Remarquons que, quel que soit $\lambda \in]0, \varepsilon]$, le polynôme $Q_i(T)$ est encore irréductible dans $\mathscr{H}(a_\sigma^\lambda)[T]$. Définissons une section φ de π au-dessus de W de la façon suivante : au point a_σ^λ, avec $\lambda \in]0, \varepsilon]$, nous associons le point $\varphi(a_\sigma^\lambda)$ de la fibre $X_{a_\sigma^\lambda}$ défini par l'équation $Q_i(T)(\varphi(a_\sigma^\lambda)) = 0$ et au point a_0, nous associons le point $\varphi(a_0) = x$. L'application φ est une section continue de π au-dessus de W à valeurs dans U et son image est un chemin joignant le point y_i au point x.

Pour finir, supposons que point c est un point extrême de B. Il existe alors $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $c = \tilde{a}_\mathfrak{m}$. La décomposition $P(T) = \prod_{i=1}^d Q_i(T)^{n_i}$ vaut donc dans l'anneau de polynômes $k_\mathfrak{m}[T]$. Le lemme de Hensel nous assure qu'il existe des polynômes $R_1(T), \ldots, R_d(T) \in \hat{A}_\mathfrak{m}$ unitaires tels que l'on ait la décomposition

$$P(T) = \prod_{i=1}^d R_i(T) \text{ dans } \hat{A}_\mathfrak{m}[T]$$

et, quel que soit $i \in [\![1, d]\!]$,

$$R_i(T) = Q_i(T)^{n_i} \mod \mathfrak{m}.$$

Choisissons un facteur irréductible $S_i(T)$ du polynôme $R_i(T)$ dans $\hat{A}_\mathfrak{m}[T]$. Puisque la partie V est supposée connexe par arcs, elle contient le segment $W = [a_0, \tilde{a}_\mathfrak{m}]$. Nous définissons alors une section φ de π au-dessus de W de la façon suivante : au point $a_\mathfrak{m}^\lambda$, avec $\lambda \in]0, \infty[$, nous associons le point $\varphi(a_\sigma^\lambda)$ de la fibre $X_{a_\sigma^\lambda}$ défini par l'équation $S_i(T)(\varphi(a_\sigma^\lambda)) = 0$, au point a_0 nous associons le point $\varphi(a_0) = x$ et au point $\tilde{a}_\mathfrak{m}$, nous associons le point y_i. Comme précédemment, l'application φ est une section continue de π au-dessus de W à valeurs dans U et son image est un chemin joignant le point y_i au point x.

Supposons, à présent, que le point b est un point extrême de B. Il existe alors $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $b = \tilde{a}_\mathfrak{m}$. Supposons, dans un premier temps que $a_0 \in V$. Alors le polynôme $P(T)$ est à coefficients dans $A_\mathfrak{m}$ et il est irréductible dans $A_\mathfrak{m}[T]$ puisqu'il est unitaire et que sa réduction modulo $\mathfrak{m}$ est irréductible. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Supposons, à présent, que le point central a_0 n'appartient pas à V. Si la partie V est réduite au point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$, le résultat provient directement

du lemme 3.3.8. Dans les autres cas, la partie V est un intervalle contenu dans $]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Le polynôme $P(T)$ est alors à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$. Puisqu'il est unitaire et que son image modulo $\mathfrak{m}$ est irréductible, il est irréductible dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$ et donc dans $\hat{K}_{\mathfrak{m}}[T]$. Soit y un point de U. Il existe alors $\varepsilon \in]0, +\infty]$ tel que $\pi(y) = a^{\varepsilon}_{\mathfrak{m}}$. D'après le lemme 3.3.8, il existe un chemin tracé sur $X_{a^{\varepsilon}_{\mathfrak{m}}} \cap U$ joignant le point y au point z défini par l'équation $P(T)(z) = 0$. Il nous suffit, à présent, de montrer que l'on peut joindre le point z au point x par un chemin tracé sur U. Puisque la partie V est supposée connexe par arcs, elle contient le segment $W = [a^{\varepsilon}_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Définissons une section φ de π au-dessus de W de la façon suivante : à tout point c de W nous associons le point $\varphi(c)$ de la fibre X_c défini par l'équation $P(T)(\varphi(c)) = 0$. L'application φ est une section continue de π au-dessus de W à valeurs dans U et son image est un chemin joignant le point z au point x.

Il nous reste à traiter le cas où le point b est un point interne de B : il existe $\sigma \in \Sigma$ et $\varepsilon > 0$ tel que $b = a^{\varepsilon}_{\sigma}$. Si la partie V contient un point extrême ou le point central de B, nous sommes ramenés à l'un des cas précédents. Nous supposerons donc que la partie V est contenue dans B'_{σ}. Dans ce cas, pour tout point c de V, le corps $\mathscr{H}(c)$ est isomorphe au corps $\hat{K}_{\sigma}$ et le polynôme $P(T)$ est irréductible dans $\mathscr{H}(c)[T]$. Soit y un point de U. D'après le lemme 3.3.8, il existe un chemin tracé sur $X_{\pi(y)} \cap U$ joignant le point y au point z défini par l'équation $P(T)(z) = 0$. Il nous suffit, à présent, de montrer que l'on peut joindre le point z au point x par un chemin tracé sur U. Définissons une section φ de π au-dessus de V de la façon suivante : à tout point c de V nous associons le point $\varphi(c)$ de la fibre X_c défini par l'équation $P(T)(\varphi(c)) = 0$. L'application φ est une section continue de π au-dessus de V à valeurs dans U et son image est un chemin passant par les points z et x. □

Corollaire 3.3.10. — *Soient b un point de B et x un point rigide de la fibre X_b. Alors, le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.22, le morphisme naturel $\mathscr{O}_{B,b} \to \mathscr{H}(b)$ est surjectif. Nous pouvons donc supposer que le polynôme $P(T)$ définissant le point x est à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$. Il nous suffit alors d'appliquer les propositions 3.3.5 et 3.3.9. □

3.3.3. Étude topologique locale

Revenons, à présent, au cas d'un espace affine de dimension quelconque : $X = \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, avec $n \in \mathbf{N}$. Les résultats obtenus sur la topologie de la droite nous permettent de mettre en œuvre un raisonnement par récurrence.

Proposition 3.3.11. — *Soit b un point de B. Soit x un point rigide de la fibre X_b. Alors, le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le résultat attendu par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}$. Le cas $n = 0$ est immédiat.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour $n - 1$. Notons

$$\varphi_1 : \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$$

le morphisme induit par l'injection $i_1 : A[T_1] \to A[T_1, \ldots, T_n]$ et

$$\varphi_0 : \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}} \to \mathcal{M}(A)$$

celui induit par l'injection $i_0 : A \to A[T_1]$. Posons $y = \varphi_1(x)$.

D'après la proposition 3.3.10, le point y de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Nous pouvons donc appliquer la proposition 3.3.4. Elle assure qu'il existe une extension finie K' de K, un point y' de $\mathbf{A}_{A'}^{1,\mathrm{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel

$$\alpha : \mathbf{A}_{A'}^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$$

envoie le point y' sur le point y et induise un isomorphisme

$$\beta : U' \to U$$

d'un voisinage U' de y' dans $\mathbf{A}_{A'}^{1,\mathrm{an}}$ sur un voisinage U de y dans $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_{A'}^{n,\mathrm{an}} \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\varphi_1'"] & \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}} \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathbf{A}_{A'}^{1,\mathrm{an}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_0'"] & \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}} \arrow[d, "\varphi_0"] \\
\mathcal{M}(A') \arrow[r, "\alpha_0"] & \mathcal{M}(A)
\end{tikzcd} .$$

Quitte à restreindre le voisinage U de y, nous pouvons supposer qu'il est compact et rationnel. Le voisinage U' l'est alors également. Nous pouvons donc

appliquer le théorème 1.2.11 et la proposition 1.2.15. On en déduit un isomorphisme

$$\gamma : \mathcal{M}(\mathscr{B}(U')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathscr{B}(U))$$

qui coïncide avec β en tant qu'application et même en tant que morphisme d'espace annelés si l'on se restreint à l'intérieur des espaces considérés. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(U')} \arrow[r, "\delta", "\sim"'] \arrow[d, "\psi'"] & \mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(U)} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{M}(\mathscr{B}(U')) \arrow[r, "\gamma", "\sim"'] & \mathcal{M}(\mathscr{B}(U)) \end{tikzcd} .$$

En tant que morphisme d'espaces topologiques, le morphisme ψ n'est autre que le morphisme φ_1 restreint à $\varphi_1^{-1}(U)$ à la source et U au but. De même, le morphisme ψ' coïncide avec le morphisme φ'_1 restreint à ${\varphi'_1}^{-1}(U')$ à la source et U' au but. Par conséquent, il suffit de montrer que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans $\mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(U)}$. Puisque δ est un homéomorphisme, il suffit de montrer que le point $\delta^{-1}(x)$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans $\mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_{\mathscr{B}(U')}$. Or le point $\delta^{-1}(x)$ est envoyé sur le point $\gamma^{-1}(y) = y'$ dans $\mathcal{M}(\mathscr{B}(U'))$. Ce dernier point est rationnel dans sa fibre ${\varphi'_0}^{-1}(\varphi'_0(y'))$. Par conséquent, quitte à changer x en $\delta^{-1}(x)$, nous pouvons supposer que le point y est rationnel dans sa fibre, autrement dit que le morphisme

$$\mathscr{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(y)$$

est un isomorphisme.

Notons

$$\lambda_{n-1} : \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_A \to \mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_A$$

le morphisme induit par l'injection $j_{n-1} : A[T_2, \ldots, T_n] \to A[T_1, \ldots, T_n]$ et

$$\lambda_0 : \mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_A \to \mathcal{M}(A)$$

celui induit par l'injection $j_0 : A \to A[T_2, \ldots, T_{n-1}]$. Posons $z = \lambda_{n-1}(x)$. De l'isomorphisme $\mathscr{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(y)$, on déduit un isomorphisme

$$\mathscr{H}(z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(x).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le point z de $\mathbf{A}^{n-1,\mathrm{an}}_A$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Nous pouvons donc appliquer la proposition 3.3.4. Par le même raisonnement que précédemment, nous en déduisons

que nous pouvons supposer que le point z est rationnel dans la fibre ${\lambda_0}^{-1}(b)$. Autrement dit, le morphisme

$$\mathscr{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(z)$$

est un isomorphisme. Nous nous sommes finalement ramenés au cas d'un point x rationnel dans sa fibre X_b, puisque le morphisme $\mathscr{H}(b) \to \mathscr{H}(x)$ est un isomorphisme. Or d'après le lemme 3.1.22, le morphisme canonique $\mathscr{O}_{B,b} \to \mathscr{H}(b)$ est surjectif. Nous pouvons donc appliquer le corollaire 2.4.7. On en déduit le résultat attendu. □

En utilisant cette proposition, nous pouvons relâcher les hypothèses de la proposition 3.3.4.

Proposition 3.3.12. — *Soit x un point rigide de l'une des fibres de l'espace X. Alors, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel*

$$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x.

Corollaire 3.3.13. — *Soit b un point de B. Soit x un point rigide de la fibre X_b. Alors, le morphisme π est ouvert au point x.*

Démonstration. — La proposition 3.3.12 assure qu'il existe une extension finie K' de K, un point x' de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel

$$\alpha : \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme

$$\beta : U' \to U$$

d'un voisinage U' de x' dans $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A'}$ sur un voisinage U de x dans $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{A}$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\beta", "\sim"'] \arrow[d, "\pi'"] & U \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{M}(A') \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{M}(A) \end{tikzcd} .$$

Soit V un voisinage du point x dans X. Nous pouvons supposer qu'il est contenu dans U. Nous avons alors

$$\pi(V) = \gamma(\pi'(\beta^{-1}(V))).$$

Le morphisme β^{-1} étant un homéomorphisme, il envoie le voisinage V du point x sur un voisinage $\beta^{-1}(V)$ du point x'. Puisque le point x' est rationnel dans sa fibre, le corollaire 2.4.6 nous assure que la partie $\pi'(\beta^{-1}(V))$ est un voisinage du point $\pi'(x')$ dans $\mathcal{M}(A')$. D'après le théorème 3.1.15, le morphisme γ est ouvert. On en déduit que la partie $\pi(V) = \gamma(\pi'(\beta^{-1}(V)))$ est un voisinage du point $b = \gamma(\pi'(\beta^{-1}(x)))$ dans $\mathcal{M}(A)$. □

3.3.4. Étude algébrique locale

Nous disposons dorénavant de la connexité locale au voisinage des points rigides des fibres et pouvons donc appliquer le résultat d'isomorphie locale que nous avons démontré dans la proposition 3.3.12. Cela va nous permettre d'étudier les anneaux locaux en ces points. Commençons par le cas des fibres extrêmes.

Théorème 3.3.14. — *Soient $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f et x un point rigide de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Alors, l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau local noethérien complet et régulier, de dimension $n+1$. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est complet, et donc isomorphe à $\mathscr{H}(x)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.11, le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Nous pouvons donc utiliser la proposition 3.3.12 et nous ramener au cas d'un point x rationnel. Il existe alors des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $k_{\mathfrak{m}}$ tels que le point x soit l'unique point de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ vérifiant

$$(T_1 - \alpha_1)(x) = \cdots = (T_n - \alpha_n)(x) = 0.$$

Bien entendu, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, l'élément α_i de $k_{\mathfrak{m}}$ se relève en un élément de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ et donc en un élément de $\mathscr{O}_{B,b}$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.4.8. Il assure qu'il existe un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{X,x} \simeq \varinjlim_{V,\boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle,$$

où V décrit l'ensemble des voisinages compacts du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ de B et $\boldsymbol{t}$ l'ensemble $(\mathbf{R}_+^*)^n$.

Or nous connaissons un système fondamental de voisinages compacts explicite du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ de B : il s'agit de l'ensemble des intervalles $[a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$, avec $\varepsilon > 0$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'algèbre $\mathscr{B}([a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}])$ n'est autre que l'algèbre $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$; elle est munie de la norme $\|.\|_{[a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]} = |.|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}$. On en déduit un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{X,x} \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}}[\![\boldsymbol{T}]\!],$$

ce qui permet de conclure.

□

Passons maintenant aux points rigides des fibres internes et centrale.

Théorème 3.3.15. — *Soit x un point rigide d'une fibre interne ou centrale de l'espace X. Alors, l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau local noethérien, régulier, de dimension n. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est complet, et donc isomorphe à $\mathscr{H}(x)$.*

Démonstration. — Soient b un point interne ou central de B et x un point rigide de la fibre X_b. En raisonnant comme dans la preuve précédente, on se ramène au cas où le point rigide x est un point rationnel de la fibre et on montre qu'il existe un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{X,x} \simeq \varinjlim_{V,\boldsymbol{t}} \mathscr{B}(V)\langle |\boldsymbol{T}| \leq \boldsymbol{t}\rangle,$$

où V décrit l'ensemble des voisinages compacts du point b de B et $\boldsymbol{t}$ l'ensemble $(\mathbf{R}_+^*)^n$.

On applique alors les théorèmes 2.2.8 et 2.2.14 pour démontrer la première partie du théorème. La seconde découle du lemme 2.2.2 et de la description des corps résiduels aux points de l'espace B. □

3.4. Fibres internes

Nous étudions ici les points des fibres internes de l'espace X, en utilisant les propriétés du flot. Nous retrouverons, en particulier, par ce biais, les résultats sur les points rigides des fibres internes obtenus à la section précédente.

Nous reprenons, ici, les notations du paragraphe 1.3, consacré au flot. Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Rappelons que la fibre $X_{a_\mathfrak{m}}$ est l'espace affine de dimension n au-dessus du corps $\hat{K}_\mathfrak{m}$. D'après le lemme 3.1.4, l'application

$$\psi_\mathfrak{m} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & B'_\mathfrak{m} \\ \varepsilon & \mapsto & a_\mathfrak{m}^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme. L'intervalle de définition de la trajectoire de tout point de la fibre $X_{a_\mathfrak{m}}$ est $]0,+\infty[$. Par conséquent, nous disposons d'une application

$$\varphi_\mathfrak{m} : \begin{array}{ccc} X_{a_\mathfrak{m}} \times]0,+\infty[& \to & X'_\mathfrak{m} \\ (x,\varepsilon) & \mapsto & x^\varepsilon \end{array}.$$

Notons $p_2 : X_{a_\mathfrak{m}} \times]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ l'application de projection sur le second facteur. Ces différentes applications s'inscrivent dans le diagramme commutatif qui suit :

$$\begin{array}{ccc} X_{a_\mathfrak{m}} \times]0,+\infty[& \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} & X'_\mathfrak{m} \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ ]0,+\infty[& \xrightarrow{\psi_\mathfrak{m}} & B'_\mathfrak{m} \end{array}.$$

Proposition 3.4.1. — *L'application $\varphi_\mathfrak{m}$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. — Pour $x \in X'_\mathfrak{m}$, notons

$$\lambda(x) = \frac{\log(|\psi_\mathfrak{m}^{-1}(\pi(x))|)}{\log(|\pi_\mathfrak{m}|_\mathfrak{m})}.$$

L'application λ est continue et, quel que soit $x \in X'_\mathfrak{m}$, nous avons

$$\pi(x) = a_\mathfrak{m}^{\lambda(x)}.$$

Il est clair que l'application $\varphi_\mathfrak{m}$ est bijective d'inverse

$$\varphi_\mathfrak{m}^{-1} : \begin{array}{ccc} X'_\mathfrak{m} & \to & X_{a_\mathfrak{m}} \times]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \left(x^{1/\lambda(x)}, \psi_\mathfrak{m}^{-1}(\pi(x))\right) \end{array}.$$

Montrons que l'application $\varphi_\mathfrak{m}$ est un homéomorphisme. Rappelons que la topologie de $X'_\mathfrak{m}$ est, par définition, la topologie la plus grossière qui rend continues

les applications de la forme

$$|P| : \begin{array}{ccc} X'_{\mathfrak{m}} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |P(x)| \end{array},$$

avec $P \in A[\boldsymbol{T}]$. Pour montrer que l'application $\varphi_{\mathfrak{m}}$ est continue, il suffit donc de montrer que, quel que soit $P \in A[\boldsymbol{T}]$, l'application

$$|P| \circ \varphi_{\mathfrak{m}} : \begin{array}{ccc} X_{a_{\mathfrak{m}}} \times]0, +\infty[& \to & \mathbf{R}_+ \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & |P(x^{\varepsilon})| = |P(x)|^{\varepsilon} \end{array}$$

est continue. Cette propriété est bien vérifiée.

De même, la topologie sur $X_{a_{\mathfrak{m}}} \times]0, +\infty[$ est, par définition, la topologie la plus grossière qui rend continues la projection p_1 vers $X_{a_{\mathfrak{m}}}$ et la projection p_2 vers $]0, +\infty[$. Il nous suffit donc de montrer la composée de $\varphi_{\mathfrak{m}}^{-1}$ avec chacune de ces deux applications est continue. C'est immédiat pour l'application

$$p_2 \circ \varphi_{\mathfrak{m}}^{-1} = \psi_{\mathfrak{m}}^{-1} \circ \pi.$$

Considérons donc l'application

$$p_1 \circ \varphi_{\mathfrak{m}}^{-1} : \begin{array}{ccc} X'_{\mathfrak{m}} & \to & X_{a_{\mathfrak{m}}} \\ x & \mapsto & x^{1/\lambda(x)} \end{array}.$$

Pour montrer que cette application est continue, il suffit de montrer que, quel que soit $P \in \hat{K}_{\mathfrak{m}}[\boldsymbol{T}]$, l'application

$$|P| \circ p_1 \circ \varphi_{\mathfrak{m}}^{-1} : \begin{array}{ccc} X'_{\mathfrak{m}} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & \left|P(x^{1/\lambda(x)})\right| = |P(x)|^{1/\lambda(x)} \end{array}$$

est continue. Puisqu'une fonction qui est limite uniforme, sur tout compact, d'applications continues est encore continue, il suffit de montrer que les applications de la forme $|P| \circ p_1 \circ \varphi_{\mathfrak{m}}^{-1}$, avec $P \in A[\boldsymbol{T}]$ sont continues. Cela découle alors directement de la définition de la topologie de $X'_{\mathfrak{m}}$ et de la continuité de la projection. □

Un résultat similaire est valable pour la partie archimédienne de l'espace X. La preuve en est complètement analogue et nous ne la détaillerons pas. Soit $\sigma \in \Sigma_{\infty}$. Rappelons que la fibre X_{a_σ} est isomorphe à l'espace $\mathbf{C}^n$ si $\hat{K}_\sigma = \mathbf{C}$ et à son quotient par la conjugaison complexe si $\hat{K}_\sigma = \mathbf{R}$. D'après le lemme 3.1.4, l'application

$$\psi_\sigma : \begin{array}{ccc}]0, 1] & \to & B'_\sigma \\ \varepsilon & \mapsto & a_\sigma^{\varepsilon} \end{array}$$

est un homéomorphisme. L'intervalle de définition de la trajectoire de tout point de la fibre X_{a_σ} est $]0,1]$. Par conséquent, nous disposons d'une application

$$\varphi_\sigma : \begin{array}{ccc} X_{a_\sigma} \times]0,1] & \to & X'_\sigma \\ (x,\varepsilon) & \mapsto & x^\varepsilon \end{array} .$$

Notons $p_2 : X_{a_\sigma} \times]0,1] \to]0,1]$ l'application de projection sur le second facteur. Ces différentes applications s'inscrivent dans le diagramme commutatif qui suit :

$$\begin{tikzcd} X_{a_\sigma} \times]0,1] \arrow[r, "\varphi_\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X'_{\mathfrak{m}} \arrow[d, "\pi"'] \\ ]0,1] \arrow[r, "\psi_\sigma"] & B'_\sigma \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.4.2. — *L'application φ_σ est un homéomorphisme.*

Nous déduisons de ces résultats deux corollaires topologiques.

Corollaire 3.4.3. — *Le morphisme π est ouvert en tout point d'une fibre interne de X.*

Corollaire 3.4.4. — *Tout point d'une fibre interne de l'espace X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 3.4.5. — *Tout point interne de X possède des voisinages flottants, au sens de la définition 1.3.6.*

Démonstration. — Soient $\sigma \in \Sigma$ et x un point de X'_σ. Reprenons les notations du paragraphe 1.3. Nous avons $D = X'_\sigma$ et la structure de produit dont les propositions précédentes démontrent l'existence assurent que le flot est une application ouverte. □

Proposition 3.4.6. — *Soit b un point interne de B. Alors l'inclusion*

$$j_b : X_b \hookrightarrow X$$

de la fibre dans l'espace total induit un isomorphisme entre les espaces annelés

$$(X_b, j_b^{-1}\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} (X_b, \mathscr{O}_{X_b}).$$

Démonstration. — Signalons tout d'abord qu'en dépit de ce que les notations utilisées peuvent laisser penser les espaces topologiques sous-jacents sont, *a priori*, différents. En effet, sur l'un ce sont les valeurs absolues de polynômes à coefficients dans A qui doivent être continues, et, sur l'autre, ce sont celles des polynômes à coefficients dans $\hat{K}_\sigma$. Cependant, la continuité étant une propriété stable par limite uniforme sur tout compact, les topologies sont bien identiques. L'application identité définit donc bien un homéomorphisme.

Intéressons-nous, à présent, aux faisceaux structuraux. Soit $x \in X_b$. Il nous suffit de montrer que le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X_b,x}$$

est un isomorphisme. Commençons par montrer qu'il est injectif. Soit f un élément de $\mathscr{O}_{X,x}$ nul dans $\mathscr{O}_{X_b,x}$. Il existe un voisinage V de x dans X_b sur lequel la fonction f est nulle. D'après les propositions 3.4.1 et 3.4.2, la fonction f est définie sur un voisinage U de x dans X de la forme

$$U = \{y^\varepsilon,\, y \in W,\, \alpha < \varepsilon < \beta\},$$

où W est un voisinage de x dans V, α un élément de $]0,1[$ et β un élément de $]1,+\infty[$. Soit $z \in U$. Il existe un élément y de W et un nombre réel $\varepsilon \in]\alpha,\beta[$ tels que $z = y^\varepsilon$. D'après le corollaire 3.4.5, le point y possède des voisinages flottants. D'après la proposition 1.3.10, nous avons donc

$$|f(z)| = |f(y)|^\varepsilon = 0.$$

On en déduit que la fonction f est nulle sur U et donc dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.

Montrons, à présent, que le morphisme entre les anneaux locaux est surjectif. Soit $f \in \mathscr{O}_{X_b,s}$. Il existe un voisinage compact V de x dans X_b et une suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\hat{K}_\sigma(\boldsymbol{T})$, sans pôles sur V, qui converge vers la fonction f sur V. Soit $k \in \mathbf{N}$. Il existe un élément S_k de $\mathrm{Frac}(A[\boldsymbol{T}])$ sans pôles sur V qui vérifie

$$\|S_k - R_k\|_V \leq 2^{-k}.$$

Considérons le voisinage U du point x de X défini par

$$U = \left\{y^\varepsilon,\, y \in V,\, \frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

Quel que soit $k \in \mathbf{N}$, la fonction S_k n'a pas de pôles sur la partie compacte U.

Soit $\eta > 0$. Il existe un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que, quels que soient $k, l \geq p$, nous ayons

$$\|R_k - R_l\|_V \leq \eta.$$

Quitte à augmenter p, nous pouvons supposer que $2^{-p} \leq \eta$. Soit $z \in U$. Il existe un élément y de V et un nombre réel $\varepsilon \in [1/2, 3/2]$ tels que $z = y^\varepsilon$. Quel que soient $k, l \geq p$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
|(S_k - S_l)(y)| &= |(S_k - S_l)|^\varepsilon \\
&\leq \left(\|R_k - R_l\|_V + 2^{-k} + 2^{-l}\right)^\varepsilon \\
&\leq (3\eta)^\varepsilon \\
&\leq \max\left((3\eta)^{1/2}, (3\eta)^{3/2}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur U vers un élément g de $\mathscr{B}(U)$ et donc de $\mathscr{O}_{X,x}$. L'image de cet élément dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X_b,x}$ n'est autre que l'élément f. □

Théorème 3.4.7. — *Soit x un point interne de X. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est hensélien, noethérien, régulier, excellent et de dimension inférieure à n. Le corps $\kappa(x)$ est hensélien.*

Démonstration. — La proposition qui précède nous permet de nous ramener au cas où l'espace de base est le spectre d'un corps, cadre dans lequel ces résultats sont connus. □

Pour finir, démontrons des résultats indiquant que l'on peut contrôler le bord de Shilov des voisinages de certains points. Commençons par rappeler quelques propriétés du le bord de Shilov dans le cadre des espaces analytiques sur un corps ultramétrique complet.

Proposition 3.4.8 (V. Berkovich). — *Soient $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet et $(\mathscr{A}, \|.\|)$ une algèbre k-affinoïde. L'anneau de Banach $(\mathscr{A}, \|.\|)$ possède un bord de Shilov Γ. C'est un ensemble fini.*

Soient $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet et m un entier positif. Le bord de Shilov de tout domaine affinoïde de $\mathbf{A}_k^{m,\mathrm{an}}$ est contenu dans son bord topologique.

Démonstration. — La première partie de la proposition provient du corollaire 2.4.5 de [**2**]. La seconde provient du corollaire 2.5.13 (ii) et de la proposition 2.5.20 (que l'on applique, par exemple, en prenant comme espace affinoïde X un disque de rayon assez grand et comme domaine affinoïde V le domaine affinoïde en question). □

Apportons une précision grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.4.9. — *Soient $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet et m un entier positif. Soit V un domaine strictement affinoïde irréductible de l'espace affine $Y = \mathbf{A}_k^{m,\mathrm{an}}$. Notons Γ son bord de Shilov. En tout point γ de Γ, le corps résiduel $\widetilde{\mathscr{H}(\gamma)}$ du corps résiduel complété $\mathscr{H}(\gamma)$ est de degré de transcendance m. En particulier, en tout point γ de Γ, l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,\gamma}$ est un corps.*

Démonstration. — La première partie de la proposition découle de la proposition 2.4.4. (ii) de [**2**]. Puisque le corps $\widetilde{\mathscr{H}(\gamma)}$ a pour degré de transcendance m, le point γ ne peut se trouver localement sur aucun fermé de Zariski de dimension

strictement inférieure à m. L'espace Y étant réduit, on en déduit que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,\gamma}$ est un corps. □

Remarque 3.4.10. — Ainsi que nous l'a fait remarquer A. Ducros, le résultat précédent vaut pour tout domaine affinoïde de tout espace de Berkovich bon et réduit.

Corollaire 3.4.11. — *Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et $b \in B'_{\mathfrak{m}}$. Soit V une partie compacte et spectralement convexe de X contenue dans la fibre X_b qui est un domaine strictement affinoïde irréductible de cette fibre, vue comme espace analytique sur $\mathscr{H}(b)$. Alors la partie V possède un bord analytique fini et algébriquement trivial.*

Démonstration. — Le bord de Shilov Γ de l'affinoïde V est un bord analytique de V dans X. En effet, l'algèbre affinoïde de V contient $\mathscr{B}(V)$. Il suffit ensuite de combiner les deux propositions précédentes avec la proposition 3.4.6. □

Lemme 3.4.12. — *Soit $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet dont la valuation n'est pas triviale. Soient $m \in \mathbf{N}$, y un point de l'espace $Y = \mathbf{A}_k^{m,\mathrm{an}}$ et U un voisinage de ce point. Il existe $r \in \mathbf{N}$ et $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_r \in k[\boldsymbol{T}]$ tels que la partie de Y définie par*

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{ z \in Y \,\middle|\, |P_i(z)| \leq |Q_i(z)| \right\}$$

soit un voisinage strictement affinoïde irréductible du point y dans U.

Démonstration. — Soit $\alpha \in k$ tel que $|\alpha| \in]0, 1[$. L'ensemble

$$E = \left\{ |\alpha|^{\frac{p}{q}},\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^* \right\}$$

est alors dense dans $\mathbf{R}_+$. Par définition de la topologie, il existe $r, s \in \mathbf{N}$, $G_1, \ldots, G_r, H_1, \ldots, H_s \in k[\boldsymbol{T}]$, $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ tels que la partie

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{ z \in Y \,\middle|\, |G_i(z)| \leq u_i \right\} \cap \bigcap_{1 \leq i \leq s} \left\{ z \in Y \,\middle|\, |H_i(z)| \geq v_i \right\}$$

soit un voisinage compact du point y dans U.

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Il existe $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $u_i = |\alpha|^{p/q}$. Remarquons que

$$\left\{ z \in Y \,\middle|\, |G_i(z)| \leq u_i \right\} = \left\{ z \in Y \,\middle|\, |(\alpha^{-p} G_i^q)(z)| \leq 1 \right\}.$$

Par conséquent, nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in [\![1, r]\!]$, nous avons $u_i = 1$. De même, nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in [\![1, s]\!]$, nous avons $v_i = 1$.

Considérons un disque compact D de Y qui contient le compact V. Notons $\mathscr{A}_D$ l'algèbre k-affinoïde associée. La partie V est un domaine rationnel de D. Notons $\mathscr{A}_V$ l'algèbre k-affinoïde associée. Considérons la composante connexe W de V qui contient le point x. Il existe un élément f de $\mathscr{A}_V$ qui est nul sur W et vaut identiquement 1 sur la réunion R des autres composantes connexes de V. Puisque V est un domaine rationnel de D, il existe des éléments g et h de $\mathscr{A}_D$ tels que la fonction h ne s'annule pas sur V et tels que l'on ait

$$\left\{z \in V \;\middle|\; \left|\frac{g}{h}(z)\right| < |\alpha|\right\} = W \text{ et } \left\{z \in V \;\middle|\; \left|\frac{g}{h}(z)\right| > |\alpha|\right\} = R.$$

Puisque D est un disque, les polynômes sont denses dans $\mathscr{A}_D$. Il existe donc des éléments G et H de $k[\boldsymbol{T}]$ tels que la fonction H ne s'annule pas sur V et tels que l'on ait

$$\left\{z \in V \;\middle|\; \left|\frac{G}{H}(z)\right| \leq |\alpha|\right\} = W.$$

Pour conclure, il suffit d'écrire le voisinage compact et connexe W du point y dans U sous la forme

$$W = V \cap \left\{z \in Y \;\middle|\; |G(z)| \leq |\alpha H(z)|\right\}.$$

C'est bien un domaine strictement affinoïde de Y. Il est irréductible puisqu'il est connexe et que l'espace analytique Y est normal. □

Proposition 3.4.13. — *Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Tout point de $X'_{\mathfrak{m}}$ possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord analytique fini et algébriquement trivial.*

Démonstration. — Soient b un point de $B'_{\mathfrak{m}}$ et x un point de la fibre X_b. Soit U un voisinage du point x dans X. D'après le lemme précédent, il existe $r \in \mathbf{N}$ et $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_r \in \hat{K}_{\mathfrak{m}}[\boldsymbol{T}]$ tels que la partie de Y définie par

$$V_1 = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{z \in Y \;\middle|\; |P_i(z)| \leq |Q_i(z)|\right\}$$

soit un voisinage strictement affinoïde irréductible du point y contenu dans l'intérieur de $U \cap X_b$ dans X_b.

D'après la proposition 3.4.1, il existe $\alpha, \beta \in I_x$ vérifiant $0 < \alpha < 1 < \beta$ et tels que la partie

$$V = \{y^{\varepsilon},\, y \in V_1, \varepsilon \in [\alpha, \beta]\}$$

soit un voisinage compact et connexe du point x dans U. Remarquons que

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{z \in \pi^{-1}([b^{\alpha}, b^{\beta}]) \;\middle|\; |P_i(z)| \leq |Q_i(z)|\right\}.$$

On déduit alors du théorème 1.2.11 et des propositions 3.1.16 et 1.2.16 que le compact V est spectralement convexe.

Notons Γ_1 le bord analytique fini et algébriquement trivial du compact V_1 dont l'existence nous est assurée par le corollaire 3.4.11. Posons

$$\Gamma = \{x^\alpha,\, x \in \Gamma_1\} \cup \{x^\beta,\, x \in \Gamma_1\}.$$

On déduit du corollaire 3.4.5 et de la proposition 1.3.10 que, pour tout élément f de $\mathscr{O}(V)$, nous avons

$$\|f\|_V = \|f\|_\Gamma$$

et que la partie Γ est encore finie et algébriquement triviale. La partie Γ est donc un bord analytique du compact V qui satisfait les propriétés voulues. □

Proposition 3.4.14. — *Soient σ un élément de Σ_f et b un point de $B_\sigma \setminus \{a_0\}$. Tout point rigide de la fibre X_b possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord de Shilov fini et algébriquement trivial.*

Démonstration. — Soit x un point rigide de la fibre X_b. D'après la proposition 3.3.12 et le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que le point x est le point 0 de la fibre X_b. La proposition 2.4.3 assure alors que ce point possède un sytème fondamental de voisinages qui sont des disques compacts au-dessus de parties compactes et connexes de $B_\sigma \setminus \{a_0\}$. La discussion menée au numéro 3.1.2.3 et la proposition 3.2.23 montrent qu'une telle partie possède un bord de Shilov et en fournissent une description explicite. C'est en particulier un ensemble fini composé de points internes. On déduit de la proposition 3.4.6 qu'il est algébriquement trivial. □

Proposition 3.4.15. — *Soient σ un élément de Σ_f et b un point de $B_\sigma \setminus \{a_0\}$. Tout point déployé de la fibre X_b possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord de Shilov fini et algébriquement trivial.*

Démonstration. — La proposition 2.4.3 assure qu'un point déployé possède un sytème fondamental de voisinages qui sont des couronnes compactes au-dessus de parties compactes et connexes de $B_\sigma \setminus \{a_0\}$. On conclut alors comme dans la preuve précédente. □

3.5. Dimension topologique

Nous consacrons cette partie à l'étude de la dimension topologique de l'espace affine analytique $X = \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ défini au-dessus de l'anneau d'entiers de corps de nombres A. La notion de dimension topologique n'est agréable que lorsque l'espace considéré est métrisable. Dans ce cas, la dimension de recouvrement (*cf.* [**25**], définition I.4) et la dimension inductive forte (*cf.* [**25**], définition I.5) coïncident (*cf.* [**25**], théorème II.7). Commençons par vérifier que nous nous trouvons bien dans cette situation.

Théorème 3.5.1. — *L'espace analytique $X = \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ est métrisable.*

Démonstration. — Soient x un point de X et U un voisinage du point x dans X. Par définition de la topologie, il existe $r \in \mathbf{N}$, $P_1, \ldots, P_r \in A[T_1, \ldots, T_n]$ et $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r \in \mathbf{R}$ tels que la partie

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{y \in X \mid u_i < |P_i(y)| < v_i\}$$

soit un voisinage du point x contenu dans U. Nous pouvons supposer que les nombres $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r$ sont rationnels. Puisque l'ensemble A est dénombrable, l'ensemble des voisinages de la forme précédente est alors dénombrable. On en déduit que l'espace X est séparable.

D'après le théorème 1.1.13, l'espace X est localement compact et donc régulier. Le théorème d'Urysohn (*cf.* [**25**], corollaire du théorème I.3) assure alors qu'il est métrisable. □

Nous pouvons, à présent, calculer la dimension topologique de l'espace $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$. Commençons par l'espace de base $B = \mathcal{M}(A)$.

Proposition 3.5.2. — *La dimension topologique de l'espace B est égale à* 1.

Démonstration. — Soit $\sigma \in \Sigma$. La branche σ-adique B_σ est homéomorphe au segment $[0, 1]$. Elle est donc de dimension 1. D'après [**25**], théorème II.3, nous avons donc

$$\dim(B) \geq 1.$$

En outre, nous avons

$$B = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma$$

et ce recouvrement est dénombrable. D'après [**25**], théorème II.1, nous avons donc

$$\dim(B) \leq 1.$$

On en déduit le résultat voulu. □

Traitons, maintenant, le cas général.

Proposition 3.5.3. — *La dimension topologique de l'espace* $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ *est égale à* $2n+1$.

Démonstration. — Commençons par minorer la dimension. Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. D'après la proposition 3.4.2, la partie X'_σ de X est homéomorphe à $X_{a_\sigma} \times]0,1]$. Si σ est un plongement réel, la fibre X_{a_σ} est homéomorphe au quotient de l'espace $\mathbf{C}^n$ par l'action de la conjugaison complexe. Elle est donc de dimension égale à $2n$. Si σ est un plongement complexe non réel, la fibre X_{a_σ} est homéomorphe à l'espace $\mathbf{C}^n$ lui-même et est donc encore de dimension égale à $2n$. Dans tous les cas, la dimension de X'_σ est égale à $2n+1$. D'après [**25**], théorème II.3, nous avons donc

$$\dim(X) \geq 2n+1.$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Considérons le disque de centre 0 et de rayon k de X :

$$D(k) = \left\{ x \in X \,\middle|\, |T(x)| \leq k \right\}.$$

C'est une partie compacte de X. L'application de projection

$$\pi_k : D(k) \to B$$

est continue et fermée. Soit b un point de B. Si la valeur absolue sur le corps résiduel complété $\mathscr{H}(b)$ est archimédienne, la dimension de la fibre $\pi_k^{-1}(b)$ est égale à $2n$. Si elle est ultramétrique, la fibre $\pi_k^{-1}(b)$ est le disque de centre 0 et de rayon k de l'espace affine de Berkovich de dimension n au-dessus du corps $\mathscr{H}(b)$. D'après [**3**], proposition 1.2.18, sa dimension est inférieure à n. D'après [**25**], théorème III.6, nous avons

$$\dim(D(k)) \leq \dim(B) + 2n \leq 2n+1.$$

Bien entendu, nous avons

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} D(k).$$

D'après [**25**], théorème II.1, nous avons donc

$$\dim(X) \leq 2n+1.$$

On en déduit le résultat annoncé. □

3.6. Prolongement analytique

Intéressons-nous, à présent, au problème du prolongement analytique. Commençons par préciser ce que nous entendons par ce terme.

Définition 3.6.1. — *Soit $(S, \mathscr{O}_S)$ un espace localement annelé. On dit que* **le principe du prolongement analytique vaut sur l'espace** $(S, \mathscr{O}_S)$ *si, pour tout point s de S, le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}_S(S) \to \mathscr{O}_{S,s}$$

est injectif.

Soit T une partie de l'espace topologique S. Notons $j_T : T \hookrightarrow S$ le morphisme d'inclusion. On dit que **le principe du prolongement analytique vaut sur la partie T de l'espace** S *s'il vaut sur l'espace $(T, j_T^{-1}\mathscr{O}_S)$.*

Introduisons également une version locale.

Définition 3.6.2. — *Soit $(S, \mathscr{O}_S)$ un espace localement annelé. Soit s un point de S. On dit que* **le principe du prolongement analytique vaut au voisinage du point** s *si, pour tout voisinage U du point s dans S et tout élément f de $\mathscr{O}_S(U)$ dont l'image n'est pas nulle dans $\mathscr{O}_{S,s}$, il existe un voisinage V de s dans U tel que l'image de la fonction f ne soit nulle dans aucun des anneaux locaux $\mathscr{O}_{S,t}$, pour t appartenant à V.*

Donnons un exemple de point vérifiant cette propriété.

Lemme 3.6.3. — *Soit $(S, \mathscr{O}_S)$ un espace analytique (au sens de la définition 1.1.27). Soit s un point de S en lequel l'anneau local est un corps. Alors le principe du prolongement analytique vaut au voisinage du point s.*

Le lemme qui suit, de démonstration immédiate, relie les définitions locale et globale de prolongement analytique.

Lemme 3.6.4. — *Soit $(S, \mathscr{O}_S)$ un espace localement annelé. Soit T une partie connexe de l'espace topologique S. Supposons que le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point de T. Alors, il vaut sur T.*

Soit s un point de S. Supposons que le point s possède un système fondamental de voisinages sur lesquels vaut le principe du prolongement analytique. Alors il vaut au voisinage du point s.

Commençons par nous intéresser au cas de l'espace de base B.

Proposition 3.6.5. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point b de B. En particulier, il vaut sur tout ouvert connexe de l'espace B.*

Considérons, à présent, le cas de l'espace affine de dimension n, $X = \mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$. Commençons par nous intéresser aux points internes de cet espace. L'utilisation du flot permet d'obtenir facilement des résultats.

Proposition 3.6.6. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point interne de l'espace X. En particulier, pour tout élément σ de Σ, le principe du prolongement analytique vaut sur tout ouvert connexe de l'espace X'_σ.*

Démonstration. — Soient b un point interne de l'espace B et x un point de la fibre X_b. Soient U un voisinage du point x dans X et f un élément de $\mathscr{O}_X(U)$ dont l'image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est pas nulle. La proposition 3.4.6 nous assure que l'image de f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X_b,x}$ diffère encore de 0. Soit V_0 un voisinage connexe du point x dans la fibre X_b. C'est un espace analytique normal et connexe défini sur un corps valué complet. Le principe du prolongement analytique y vaut donc. Par conséquent, pour tout élément y de V_0, l'image de la fonction f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X_b,y}$, et donc dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$, diffère de 0. Les propositions 3.4.1 et 3.4.2 assurent que le point x possède un voisinage V dans U formé de trajectoires d'éléments de V_0. Le corollaire 3.4.5 et la proposition 1.3.10 assurent alors que, pour tout point y de V, l'image de la fonction f diffère de 0 dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$. □

Nous n'irons, pour le moment, guère plus loin dans cette direction. Mentionnons cependant quelques résultats partiels.

Lemme 3.6.7. — *Soient V une partie ouverte de l'espace B et Y une couronne ouverte au-dessus de V. Soit f un élément de $\mathscr{O}_X(Y)$. Notons C l'ensemble des points de V qui possèdent un voisinage W vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall y \in X_W \cap Y,\ f(y) = 0.$$

La partie C est ouverte et fermée dans V.

Démonstration. — Par définition, la partie C est ouverte dans V. Il nous reste à montrer qu'elle est fermée dans V.

Soit c un point de $V \setminus C$. Soit y un point déployé (*cf.* définition 2.4.2) contenu dans $X_c \cap Y$. Supposons, par l'absurde, que l'image de f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ soit nulle. D'après la proposition 2.4.3, il existe un voisinage W de c dans V tel que, pour tout point d de W, la fonction f est nulle sur une partie ouverte de

la fibre $X_d \cap Y$. Soit d un point de W. Puisque l'espace analytique $X_d \cap Y$ est normal et connexe, la fonction f y est identiquement nulle. On en déduit que le point c appartient à C, ce qui contredit l'hypothèse.

Nous avons donc montré que l'image de f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ n'est pas nulle. Supposons, tout d'abord, que le point c est un point interne ou central. La description explicite de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ nous permet d'affirmer que le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_{X,y} \to \mathscr{O}_{X_c,y}$$

est injectif. Par conséquent, l'image de f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X_c,y}$ n'est pas nulle. Puisque l'espace analytique $X_c \cap Y$ est normal et connexe, il possède un point z en lequel nous avons $|f(z)| > 0$. En outre, nous pouvons supposer que le point z est déployé, car l'ensemble de ces points est dense. D'après le corollaire 2.4.6, le morphisme π est ouvert au voisinage du point z. En outre, il existe un voisinage du point z dans Y sur lequel la fonction f ne s'annule pas. On en déduit que la partie $V \setminus C$ est un voisinage du point c dans V.

Supposons, à présent, que le point c est un point extrême : il existe un élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f tel que $c = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Il existe alors un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$ soit contenu dans V. Notons

$$U = \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \cap Y.$$

D'après la proposition 2.4.3, il existe un point de U au voisinage duquel la fonction f n'est pas nulle. Puisque l'ouvert U est connexe, la proposition 3.6.6 nous assure que, pour tout point z de U, l'image de la fonction f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,z}$ n'est pas nulle. On en déduit que, pour tout élément δ de $]\varepsilon, +\infty[$, il existe un point de $X_{a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}} \cap Y$ en lequel la fonction f n'est pas nulle. En particulier, l'intervalle $]a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$ est contenu dans $V \setminus C$. On en déduit que la partie $V \setminus C$ est un voisinage du point c dans V. □

Corollaire 3.6.8. — *Soient V une partie ouverte et connexe de l'espace B et Y une couronne ouverte au-dessus de V. Soit x un point de Y en lequel le morphisme π est ouvert. Alors le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}_X(Y) \to \mathscr{O}_{X,x}$$

est injectif.

Démonstration. — Soit f un élément de $\mathscr{O}_X(Y)$ dont l'image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est nulle. Puisque le morphisme π est ouvert en x, il existe un voisinage W de $\pi(x)$ dans V tel que, pour tout point b de W, la fonction f est nulle

sur une partie ouverte de la fibre $X_b \cap Y$. Soit b un point de W. Puisque l'espace analytique $X_b \cap Y$ est normal et connexe, la fonction f y est identiquement nulle.

Définissons la partie C de V de la même façon que dans le lemme qui précède. Nous venons de montrer qu'elle n'est pas vide. Puisque la partie V est supposée connexe, nous avons nécessairement l'égalité $C = V$. En d'autres termes, la fonction f est nulle en tout point de la couronne Y et donc dans $\mathscr{O}_X(Y)$. $\square$

CHAPITRE 4

DROITE AFFINE ANALYTIQUE AU-DESSUS D'UN ANNEAU D'ENTIERS DE CORPS DE NOMBRES

Dans le chapitre précédent, nous sommes parvenu à exhiber des systèmes fondamentaux de voisinages pour certains points de l'espace affine au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres et à établir certaines propriétés des anneaux locaux en ces points. Cette étude est cependant restée incomplète ; dans ce chapitre, nous la menons à terme dans le cadre de la droite affine.

Nous commençons, au numéro 4.1, par rappeler les résultats dont nous disposons déjà et les appliquer au cas de la droite. Nous observerons notamment que, dans ce cadre, n'échappent à notre étude que certains points des fibres centrale et extrêmes, à savoir les points de type 3 et 2, auxquels nous consacrerons respectivement les numéros 4.2 et 4.3.

Nous regroupons au numéro 4.4 les résultats démontrés jusqu'alors et prouvons, en outre, la validité du principe du prolongement analytique.

Finalement, nous montrons au numéro 4.5 que le faisceau structural sur la droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres est cohérent. L'on sait l'importance que revêt cette propriété en géométrie algébrique et en géométrie analytique complexe. Elle se révélera, pour nous, capitale au chapitre 7, puisqu'elle nous permettra d'utiliser les résultats sur les espaces de Stein démontrés au chapitre 6.

Dans ce chapitre, comme dans le précédent, nous fixons un corps de nombres K et notons A l'anneau de ses entiers. Nous posons

$$B = \mathcal{M}(A).$$

Puisque nous nous intéressons ici à la droite affine analytique, nous posons

$$X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}.$$

Les faisceaux structuraux sur ces espaces seront respectivement notés $\mathscr{O}_B$ et $\mathscr{O}_X$, ou simplement $\mathscr{O}$ si aucune confusion ne peut en découler.

Nous noterons T la variable sur l'espace X et désignerons par

$$\pi : X \to B$$

le morphisme de projection induit par le morphisme naturel $A \to A[T]$. Pour toute partie V de B, nous noterons

$$X_V = \pi^{-1}(V)$$

et, pour tout point b de B,

$$X_b = \pi^{-1}(b).$$

4.1. Récapitulatif

Commençons par appliquer au cas de la droite les résultats que nous avons démontrés pour les espaces affines. Commençons par les points rigides des fibres.

Théorème 4.1.1. — *Soient b un point de l'espace B et x un point rigide de la fibre X_b. Le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans X et le morphisme de projection π est ouvert au point x.*

Démonstration. — Ce résultat est une conséquence des propositions 3.3.11 et 3.3.13. □

En ce qui concerne les propriétés de l'anneau local, nous distinguerons deux cas.

Théorème 4.1.2. — *Soient b un point de l'espace B qui n'est pas un point extrême et x un point rigide de la fibre X_b. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète hensélien. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est complet, et donc isomorphe à $\mathscr{H}(x)$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps. D'après la proposition 3.3.12, nous pouvons supposer que le point x est rationnel dans sa fibre. D'après le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que c'est le point 0 de cette fibre. Le théorème 2.4.8 permet alors de ramener l'étude à celle de l'anneau local L_b. D'après les théorèmes 2.2.8 et 2.2.13, ce dernier anneau est noethérien et factoriel. D'après le lemme 2.2.2, son idéal maximal est engendré par l'élément T, qui n'est pas nilpotent. La proposition 2 de [**29**] assure alors que l'anneau L_b est de valuation discrète. Le caractère hensélien découle de la proposition 2.5.1 et le résultat concernant le corps résiduel $\kappa(x)$ du théorème 3.3.15. □

Théorème 4.1.3. — *Soient b un point extrême de l'espace B et x un point rigide de la fibre X_b. L'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau local noethérien complet et régulier de dimension 2. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est complet, et donc isomorphe à $\mathscr{H}(x)$.*

Démonstration. — Ce résultat découle de la proposition 2.5.1 et du théorème 3.3.14. □

Pour les points internes, nous disposons de résultats complets.

Théorème 4.1.4. — *Soient b un point interne de l'espace B et x un point de la fibre X_b qui n'est pas un point rigide. Le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans X et le morphisme de projection π est ouvert au point x. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est isomorphe au corps $\kappa(x)$, lequel est hensélien.*

Démonstration. — La première partie du résultat découle directement des corollaires 3.4.3 et 3.4.4. La seconde découle de la proposition 3.4.6 et du résultat correspondant pour la droite analytique sur un corps valué complet (qui est alors nécessairement ultramétrique). □

Il nous reste donc à étudier les points des fibres extrêmes et centrale qui ne sont pas rigides. Rappelons que nous avons également démontré des résultats pour certains points de type 3 de ces fibres.

Théorème 4.1.5. — *Soient b un point extrême ou central de l'espace B, α un élément de $\mathscr{H}(b)$ et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Notons x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre X_b. Le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans X et le morphisme de projection π est ouvert au point x.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que l'élément α est nul. Le résultat découle alors des corollaires 2.4.6 et 2.4.7. □

Pour décrire les propriétés de l'anneau local, nous distinguerons deux cas.

Théorème 4.1.6. — *Soient α un élément de K et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Notons x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre centrale X_0. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est isomorphe au corps $\kappa(x)$, lequel est hensélien.*

Démonstration. — Le résultat découle du corollaire 3.2.8.

□

Théorème 4.1.7. — *Soient $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f, α un élément de $\tilde{k}_{\mathfrak{m}}$ et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Notons x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $\pi_{\mathfrak{m}}$. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est complet, et donc isomorphe à $\mathscr{H}(x)$.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que l'élément α est nul. Quitte à changer T en T^{-1}, nous pouvons supposer que $r < 1$. Le résultat découle alors du corollaire 3.2.6.

□

Lorsque les anneaux locaux sont des anneaux de valuation discrète, nous pouvons obtenir des informations supplémentaires. À cet effet, nous introduisons une nouvelle définition.

Définition 4.1.8. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique et y un point de Y. Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un anneau de valuation discrète. Soit V un voisinage du point y dans Y et π un élément de $\mathscr{O}_Y(V)$. On dit que la fonction π est une* **uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur** *V s'il existe un nombre réel C vérifiant la propriété suivante : pour tout élément f de $\mathscr{O}_Y(V)$ dont l'image $f(y)$ dans $\mathscr{H}(y)$ est nulle, il existe un élément g de $\mathscr{O}_Y(V)$ tel que*

i) $f = \pi g$ dans $\mathscr{O}_Y(V)$;
ii) $\|g\|_V \leq C \, \|f\|_V$.

Remarque 4.1.9. — L'image dans l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{Y,y}$ d'une uniformisante forte est une uniformisante.

Lemme 4.1.10. — *Soit b un point de l'espace B tel que l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ soit un anneau de valuation discrète. Soit π une uniformisante de l'anneau $\mathscr{O}_{B,b}$ et U un voisinage du point b dans B sur lequel elle est définie. Alors il existe un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts et connexes du point b dans U tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$, la fonction π est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{B,b}$ sur V.*

Démonstration. — Il existe un élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f tel que le point b soit le point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Les descriptions explicites du numéro 3.1.2.2 permettent de montrer que, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, la fonction $\pi_{\mathfrak{m}}$ est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{B,\tilde{a}_{\mathfrak{m}}} \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}}$ sur $[a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Le résultat pour toute autre uniformisante s'en déduit. □

Proposition 4.1.11. — *Soit b un point de B qui n'est pas un point extrême. Notons x le point 0 de la fibre X_b. Soit V un voisinage compact et connexe du point b dans B dont le bord ne contient pas le point central a_0. Soit t un nombre réel strictement positif. La fonction T est une uniformisante forte de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{X,x}$ sur le disque $\overline{D}_V(t)$.*

Démonstration. — Soit f un élément de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ dont l'image dans $\mathscr{H}(x)$ est nulle. D'après la proposition 3.2.14, il existe un nombre réel $r > t$ et une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{O}(V)$ vérifiant la condition $\lim_{k\to+\infty} \|f_k\|_V \, r^k = 0$ tels que l'on ait l'égalité

$$f = \sum_{k\geq 0} f_k T^k.$$

Par hypothèse, nous avons $f(x) = 0$ et donc $f_0(x) = f_0(b) = 0$. Puisque le point b n'est pas extrême, l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est un corps. Par conséquent, la fonction f_0 est nulle au voisinage du point b dans V. D'après le principe du prolongement analytique, elle est nulle dans $\mathscr{O}(V)$. Maintenant, le théorème 3.2.16 assure que la série

$$g = \sum_{k \geq 0} f_{k+1} T^k$$

définit un élément de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$. Par conséquent, nous avons l'égalité

$$f = Tg \text{ dans } \mathscr{O}(\overline{D}_V(t)).$$

D'après le lemme 3.2.22, le disque $\overline{D}_V(t)$ possède un bord analytique Γ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall y \in \Gamma,\ |T(y)| = t.$$

Soit y un point de Γ en lequel la fonction g atteint son maximum. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|g\|_{\overline{D}_V(t)} &= |g(y)| \\ &= |T(y)|^{-1} |f(y)| \\ &\leq t^{-1} \|f\|_{\overline{D}_V(t)}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.12. — *Soient b un point de B qui n'est pas un point extrême et x un point rigide de la fibre X_b. Soient π une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{X,x}$ et U un voisinage du point x dans X sur lequel elle est définie. Alors il existe un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts et connexes du point x dans U tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$, la fonction π est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ sur V.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.12, nous pouvons supposer que le point x est rationnel dans sa fibre. D'après le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que c'est le point 0 de cette fibre. La proposition précédente jointe à la proposition 2.4.3 nous permet alors de conclure lorsque l'uniformisante considérée est T. Le résultat pour toute autre uniformisante s'en déduit.

□

Proposition 4.1.13. — *Soient $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soient s et t deux éléments de $\mathbf{R}_+^*$ qui vérifient $s < r < t$. Notons x le point η_r de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Considérons la couronne*

$$C = \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, s < |T(y)| < t \right\}.$$

La fonction $\pi_{\mathfrak{m}}$ est une uniformisante forte de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{X,x}$ sur la couronne C.

Démonstration. — Soit f un élément de $\mathscr{O}(C)$ dont l'image dans $\mathscr{H}(x)$ est nulle. Remarquons que l'anneau normé $(\mathscr{O}(V), \|.\|_V)$ n'est autre que l'anneau $(\hat{A}_{\mathfrak{m}}, |.|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon})$. D'après la proposition 3.2.18, il existe deux nombres réels s_0 et t_0 vérifiant $0 < s_0 < s < t < t_0$ et une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ vérifiant la condition $\lim_{k\to+\infty} |f_k|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon} r^k = 0$ tels que l'on ait l'égalité

$$f = \sum_{k\geq 0} f_k T^k.$$

Par hypothèse, nous avons $f(x) = 0$ et donc

$$\forall k \in \mathbf{N}, f_k(x) = f_k(\tilde{a}_{\mathfrak{m}}) = 0.$$

On en déduit que, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, il existe un élément g_k de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ tel que l'on ait l'égalité

$$f_k = \pi_{\mathfrak{m}}\, g_k.$$

En outre, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, nous avons

$$|g_k|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon} = |\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{-\varepsilon}\, |f_k|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}.$$

Par conséquent, la série

$$g = \sum_{k\geq 0} g_k T^k$$

définit un élément de l'anneau $\mathscr{O}(V)\langle s \leq |T| \leq t\rangle^{\dagger}$ et donc de l'anneau $\mathscr{O}(C)$, d'après le théorème 3.2.19. Nous avons alors l'égalité

$$f = \pi_{\mathfrak{m}}\, g \text{ dans } \mathscr{O}(C).$$

D'après le lemme 3.2.23, la couronne C possède un bord analytique Γ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall y \in \Gamma,\ |\pi_{\mathfrak{m}}(y)| = |\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}.$$

Soit y un point de Γ en lequel la fonction g atteint son maximum. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|g\|_C &= |g(y)| \\ &= |\pi_{\mathfrak{m}}(y)|^{-1}\, |f(y)| \\ &\leq |\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{-\varepsilon}\, \|f\|_C. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.14. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Soient α un élément de $\tilde{k}_{\mathfrak{m}}$ et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Notons x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Soient π une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{X,x}$ et U un voisinage du point x dans X sur lequel elle est définie. Il existe un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts et connexes du point x dans U tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$, la fonction π est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ sur V.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que le point x est le point η_r de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. La proposition précédente jointe à la proposition 2.4.3 nous permet alors de conclure lorsque l'uniformisante considérée est $\pi_{\mathfrak{m}}$. Le résultat pour toute autre uniformisante s'en déduit immédiatement. □

Intéressons-nous, maintenant, au bord analytique de voisinages des points. Nous nous contentons de rappeler ici les résultats des propositions 3.4.13, 3.4.14 et 3.4.15.

Proposition 4.1.15. — *Soit $\sigma \in \Sigma_f$. Tout point de X'_σ possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord analytique fini et algébriquement trivial.*

Proposition 4.1.16. — *Soit b un point de $B_{um} \setminus \{a_0\}$. Tout point rigide de la fibre X_b possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord de Shilov fini et algébriquement trivial.*

Proposition 4.1.17. — *Soit b un point de $B_{um} \setminus \{a_0\}$. Tout point de type 3 déployé de la fibre X_b possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord de Shilov fini et algébriquement trivial.*

Pour finir, intéressons-nous au principe du prolongement analytique.

Proposition 4.1.18. — *Soit b un point de l'espace B. Soit V un voisinage ouvert et connexe du point b dans B. Soit r un élément de l'intervalle $]0,1[$. Le principe du prolongement analytique vaut sur le disque $\mathring{D}_V(r)$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 3.6.8, il suffit de montrer que le morphisme de projection π est ouvert au voisinage de tout point du disque $\mathring{D}_V(r)$. Ce résultat découle des théorèmes 4.1.1, 4.1.4 et 4.1.5. □

Corollaire 4.1.19. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage des points rigides des fibres de l'espace X.*

Démonstration. — Soient b un point de l'espace B et x un point rigide de la fibre X_b. D'après la proposition 3.3.12 et le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que le point x est le point 0 de la fibre X_b. D'après la proposition 2.4.3, la famille des disques ouverts $\mathring{D}_V(r)$, où V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts et connexes de b dans B et r l'intervalle $]0,1[$, est un système fondamental de voisinages du point x dans X. Nous concluons alors en utilisant le lemme 3.6.4 et la proposition précédente. □

Proposition 4.1.20. — *Soit b un point de l'espace B. Soit V un voisinage ouvert et connexe du point b dans B. Soient s et t deux nombres réels qui vérifient la condition $0 < s < t < 1$. Le principe du prolongement analytique vaut sur la couronne $\mathring{C}_V(s,t)$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 3.6.8, il suffit de montrer que le morphisme de projection π est ouvert au voisinage de tout point de la couronne ouverte $\mathring{C}_V(s,t)$. Ce résultat découle des théorèmes 4.1.4 et 4.1.5. □

Corollaire 4.1.21. — *Soient b un point extrême ou central de l'espace B, α un élément de $\mathscr{H}(b)$ et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Notons x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre X_b. Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage du point x de l'espace X.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.22, nous pouvons supposer que l'élément α de $\mathscr{H}(b)$ est nul. Quitte à changer T en T^{-1}, nous pouvons supposer que l'élément r appartient à l'intervalle $]0,1[$. D'après la proposition 2.4.3, la famille des couronnes ouvertes $\mathring{C}_V(s,t)$, où V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts et connexes de b dans B, s l'intervalle $]0,r[$ et t l'intervalle $]r,1[$, est un système fondamental de voisinages du point x dans X. Nous concluons alors en utilisant le lemme 3.6.4 et la proposition précédente. □

Concluons en rappelant le résultat de la proposition 3.6.6.

Proposition 4.1.22. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage des points internes de l'espace X.*

4.2. Points de type 3

Nous nous intéressons ici aux points de type 3 des fibres extrêmes et centrale. Un changement de base va nous permettre de nous ramener au cas de points de type 3 déployés. À cet effet, nous allons étendre le résultat des propositions 3.3.1 et 3.3.3.

4.2.1. Fibres extrêmes

Traitons, tout d'abord, le cas des fibres extrêmes. Nous commencerons par montrer que l'on peut préciser le résultat de changement de base obtenu à la proposition 3.3.1. Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Soit $P(T)$ un polynôme irréductible à coefficients dans $k_\mathfrak{m}$. Rappelons que, quel que soit $r \in [0,1]$, nous notons $\eta_{P,r}$ le point de la fibre $\tilde{X}_\mathfrak{m}$ associé à la valeur absolue

$$\begin{array}{ccc} A[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ F(T) & \mapsto & r^{v_{P(T)}(F(T))} \end{array},$$

où $v_{P(T)}$ désigne la valuation $P(T)$-adique de $k_\mathfrak{m}[T]$. Pour $\alpha \in k_\mathfrak{m}$ et $r \in [0,1]$, nous notons

$$\eta_{\alpha,r} = \eta_{T-\alpha,r}.$$

Pour $r \in [0,1]$, nous notons encore.

$$\eta_r = \eta_{0,r} = \eta_{T,r}.$$

Finalement, pour $r \in [1,+\infty[$, nous notons η_r le point de la fibre $\tilde{X}_\mathfrak{m}$ associé à la valeur absolue

$$\begin{array}{ccc} A[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ F(T) & \mapsto & r^{-\deg(\tilde{F}(T))} \end{array},$$

où $\tilde{F}(T)$ désigne l'image du polynôme $F(T)$ dans $k_\mathfrak{m}[T]$. Nous avons ainsi décrit tous les points de la fibre extrême $\tilde{X}_\mathfrak{m}$ (*cf.* 1.1.2.2 pour la classification, avec démonstration, des points de la droite analytique sur un corps trivialement valué quelconque). Les points de type 3 sont ceux pour lesquels le nombre réel r est différent de 0 et de 1.

Nous noterons $x = \eta_{P,0}$ le point rigide de la fibre $\tilde{X}_\mathfrak{m}$ défini par l'équation

$$P(T)(x) = 0.$$

D'après la proposition 3.3.1, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $X' = \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre,

tel que le morphisme naturel

$$\varphi : \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x. Notons $\mathfrak{m}'$ l'idéal maximal de A' correspondant au point $\pi(x')$ et α l'élément de $k_{\mathfrak{m}'}$ qui correspond au point x'. Un calcul direct utilisant la séparabilité du polynôme $P(T)$ montre que, pour tout élément r de l'intervalle $[0,1]$, nous avons

$$\varphi(\eta_{\alpha,r}) = \eta_{P,r}.$$

Nous devons reprendre et préciser ici les arguments de la proposition 3.3.1. Nous aurons besoin d'utiliser certaines propriétés du flot et commençons donc par montrer l'existence de voisinages flottants. Posons

$$Y_{\mathfrak{m}} = X_{\mathfrak{m}} \setminus X_0 = \pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]).$$

Lemme 4.2.1. — *Soient $x \in Y_{\mathfrak{m}}$ et $\varepsilon \in I_{Y_{\mathfrak{m}}}(x)$. Alors, la partie $D_{Y_{\mathfrak{m}}}$ est un voisinage de (x,ε) dans $Y_{\mathfrak{m}} \times \mathbf{R}_+^*$.*

En particulier, tous les points de $Y_{\mathfrak{m}}$ ont des voisinages flottants dans $Y_{\mathfrak{m}}$.

Démonstration. — Ce résultat découle directement de l'égalité

$$D_{Y_{\mathfrak{m}}} = Y_{\mathfrak{m}} \times \mathbf{R}_+.$$

La conséquence suit, par le lemme 1.3.8. □

Proposition 4.2.2. — *Le morphisme φ induit un isomorphisme d'espaces annelés d'un voisinage de*

$$\{\eta_{\alpha,r},\ r \in [0,1[\} \text{ dans } X'$$

sur un voisinage de

$$\{\eta_{P,r},\ r \in [0,1[\} \text{ dans } X.$$

Démonstration. — Considérons le voisinage U de x dans X, la fonction R définie sur U vérifiant $P(R) = 0$ et la section σ du morphisme φ au-dessus de U considérés dans la preuve de la proposition 3.3.1. Soit V un voisinage du point x dans X vérifiant les propriétés suivantes :

i) V est connexe ;
ii) la fonction R se prolonge à V et la fonction $P(R)$ est nulle sur V ;
iii) la fonction $P'(\alpha)$ est inversible sur $\varphi^{-1}(V)$.

D'après la proposition 2.5.3, la section σ se prolonge alors à V et induit un isomorphisme d'espaces annelés sur son image. Il nous suffit donc de montrer qu'il existe un voisinage V de la partie $\{\eta_{P,r},\, r \in [0,1[\}$ dans X qui vérifie les propriétés demandées.

Commençons par la dernière propriété. Quel que soit $b \in B_{\mathfrak{m}} \setminus X_0$, le polynôme $P(T)$ est irréductible et séparable sur le corps $\mathscr{H}(b)$. Par conséquent, tout voisinage V contenu dans $B_{\mathfrak{m}} \setminus X_0$ satisfait cette propriété.

Passons aux deux propriétés suivantes. Il existe $r_0 \in]0,1[$ tel que le point η_{P,r_0} appartienne à U. En utilisant l'isomorphisme σ et le corollaire 2.4.7, on montre que le point $\eta_{P,r_0} = \sigma^{-1}(\eta_{\alpha,r_0})$ de X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Le lemme 4.2.1 assure que nous sommes dans les conditions d'utilisation de la proposition 1.3.10 et du lemme 1.3.11. On en déduit que la fonction R se prolonge sur un voisinage connexe V de l'ensemble

$$T_{Y_{\mathfrak{m}}}(\eta_{P,r_0}) = \{\eta^{\varepsilon}_{P,r_0},\, \varepsilon \in]0,+\infty[\} = \{\eta_{P,r},\, r \in]0,1[\}.$$

En outre, nous avons encore $P(R) = 0$ sur V, toujours d'après la proposition 1.3.10. On en déduit le résultat annoncé. □

Cet énoncé nous permet de ramener l'étude des points de type 3 de la fibre extrême à celle des points de type 3 déployés. Nous en tirons plusieurs conséquences.

Corollaire 4.2.3. — *Tout point de type* 3 *d'une fibre extrême possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et x un point de type 3 de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Supposons, tout d'abord, qu'il existe un élément $r > 1$ tel que le point x soit le point η_r. Le résultat découle alors du corollaire 2.4.7.

Dans les autres cas, il existe un polynôme irréductible P à coefficients dans $k_{\mathfrak{m}}$ et un élément r de l'intervalle $]0,1[$ tel que le point x soit le point $\eta_{P,r}$. Dans ce cas, la proposition 4.2.2 nous montre que, quitte à remplacer l'anneau A par l'anneau des entiers d'une extension du corps K, nous pouvons supposer que le polynôme P est de degré 1. Le résultat découle alors du corollaire 2.4.7. □

De même, en utilisant le corollaire 2.4.6, on démontre le résultat suivant.

Corollaire 4.2.4. — *Le morphisme π est ouvert en tout point de type* 3 *d'une fibre extrême.*

Venons-en, à présent, aux propriétés des anneaux locaux.

Corollaire 4.2.5. — *Soient $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f et x un point de type* 3 *de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète*

d'idéal maximal $\mathfrak{m}\,\mathscr{O}_{X,x}$. *Son corps résiduel* $\kappa(x)$ *est complet, et donc isomorphe à* $\mathscr{H}(x)$.

Démonstration. — Supposons, tout d'abord, qu'il existe un élément $r > 1$ tel que le point x soit le point η_r.

Dans les autres cas, il existe un un polynôme irréductible P à coefficients dans $k_{\mathfrak{m}}$ et un élément r de l'intervalle $]0,1[$ tels que le point x soit le point $\eta_{P,r}$. La proposition 4.2.2 assure que, quitte à remplacer l'anneau A par l'anneau des entiers d'une extension du corps K, nous pouvons supposer que le polynôme P est de degré 1. La conclusion découle alors du théorème 4.1.7. □

En procédant de même, nous pouvons étendre les résultats dont nous disposons concernant les uniformisantes fortes, le bord analytique des voisinages ou le prolongement analytique. Ces résultats découlent du corollaire 4.1.14, de la proposition 4.1.17 et du corollaire 4.1.21.

Corollaire 4.2.6. — *Soient* $\mathfrak{m}$ *un élément de* Σ_f *et* x *un point de type* 3 *de la fibre extrême* $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. *Soient* π *une uniformisante de l'anneau de valuation discrète* $\mathscr{O}_{X,x}$ *et* U *un voisinage du point* x *dans* X *sur lequel elle est définie. Il existe un système fondamental* $\mathscr{V}$ *de voisinages compacts et connexes du point* x *dans* U *tel que, pour tout élément* V *de* $\mathscr{V}$, *la fonction* π *est une uniformisante forte de l'anneau* $\mathscr{O}_{X,x}$ *sur* V.

Corollaire 4.2.7. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un élément de* Σ_f. *Tout point de type* 3 *de la fibre extrême* $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ *possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord de Shilov fini et algébriquement trivial.*

Corollaire 4.2.8. — *Soient* $\mathfrak{m}$ *un élément de* Σ_f. *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point de type* 3 *de la fibre extrême* $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$.

4.2.2. Fibre centrale

Étudions, maintenant, les points de type 3 de la fibre centrale. Nous mènerons le raisonnement en suivant les mêmes étapes que dans le cas des fibres extrêmes. Nous commencerons donc par préciser le résultat de changement de bases obtenu à la proposition 3.3.3. Soit $Q(T)$ un polynôme irréductible de $K[T]$. Quel que soit $r \in [0,1]$, notons $\eta_{Q,r}$ le point de la fibre X_0 associé à la valeur absolue

$$\begin{array}{ccc} A[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ F(T) & \mapsto & r^{v_{Q(T)}(F(T))} \end{array},$$

où $v_{Q(T)}$ désigne la valuation $Q(T)$-adique de $K[T]$. Pour $\alpha \in K$ et $r \in [0,1]$, nous notons

$$\eta_{\alpha,r} = \eta_{T-\alpha,r}.$$

Pour $r \in [0,1]$, nous notons encore.

$$\eta_r = \eta_{0,r} = \eta_{T,r}.$$

Finalement, pour $r \in [1,+\infty[$, nous notons η_r le point de la fibre X_0 associé à la valeur absolue

$$\begin{array}{ccc} A[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ F(T) & \mapsto & r^{-\deg(F(T))} \end{array}.$$

Nous avons ainsi décrit tous les points de la fibre extrême X_0 (*cf.* 1.1.2.2 pour la classification, avec démonstration, des points de la droite analytique sur un corps trivialement valué quelconque). Les points de type 3 sont ceux pour lesquels le nombre réel r est différent de 0 et de 1.

Nous noterons $x = \eta_{Q,0}$ le point rigide de la fibre X_0 défini par l'équation

$$Q(T)(x) = 0.$$

D'après la proposition 3.3.3, il existe une extension finie K' de K, un point x' de $X' = \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{A'}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K', rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme

$$\psi : \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{A'} \to \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{A}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x. Notons β l'élément de K' qui correspond au point x'. Remarquons que, pour tout élément r de l'intervalle $[0,1]$, nous avons

$$\psi(\eta_{\beta,r}) = \eta_{Q,r}.$$

Comme précédemment, énonçons un résultat assurant l'existence de voisinages flottants. Considérons la partie ouverte Y de X obtenue en enlevant les extrémités des branches archimédiennes :

$$Y = X \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_\infty} X_{a_\sigma} \right).$$

Lemme 4.2.9. — *Soient $x \in Y$ et $\varepsilon \in I_Y(x)$. Alors, la partie D_Y est un voisinage de (x,ε) dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$.*

En particulier, tous les points de Y ont des voisinages flottants dans Y.

Démonstration. — Puisque $\varepsilon \in I_Y(x)$, le point x^ε est un élément de Y. Nous avons donc $|2(x)|^\varepsilon < 2$. Il existe $\lambda > \varepsilon$ tel que l'on ait $|2(x)|^\varepsilon < |2(x)|^\lambda < 2$. La partie

$$\{y \in Y \mid |2(y)| < 2^{1/\lambda}\} \times]0, \lambda[$$

est alors un voisinage de (x, ε) dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$. □

Nous tirons de ce résultat les mêmes conséquences que dans le cas des fibres extrêmes. Les preuves étant similaires, nous ne les détaillerons pas.

Proposition 4.2.10. — *Le morphisme ψ induit un isomorphisme d'un voisinage de*

$$\{\eta_{\beta,r},\ r \in [0,1[\} \text{ dans } X'$$

sur un voisinage de

$$\{\eta_{Q,r},\ r \in [0,1[\} \text{ dans } X.$$

Corollaire 4.2.11. — *Tout point de type* 3 *de la fibre centrale possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 4.2.12. — *Le morphisme π est ouvert en tout point de type* 3 *de la fibre centrale.*

Corollaire 4.2.13. — *Soit x un point de type* 3 *de la fibre centrale. En ce point, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ coïncide avec le corps $\kappa(x)$, lequel est hensélien.*

Corollaire 4.2.14. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point de type* 3 *de la fibre centrale de l'espace X.*

4.3. Points de type 2

Pour compléter notre étude de la droite analytique sur un corps de nombres, il nous reste à étudier les points de type 2 des fibres centrale et extrêmes. Sur ces fibres, et, de façon générale, sur la droite analytique au-dessus de tout corps trivialement valué, il n'existe qu'un point de type 2 : le point de Gauß.

4.3.1. Fibres extrêmes

Commençons notre étude par les fibres extrêmes. Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Notons x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Nous nous intéressons, tout d'abord, aux voisinages du point x. Nous notons $\hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$.

Lemme 4.3.1. — *Soit U un voisinage de x dans X. Alors, il existe un entier $d \in \mathbf{N}$, des polynômes $P_1, \ldots, P_d \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$ et deux nombres réels $\alpha, \varepsilon > 0$ tels que l'on ait*

$$U \supset \bigcap_{1 \leq i \leq d} \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, 1 - \varepsilon < |P_i(y)| < 1 + \varepsilon \right\}.$$

Démonstration. — Remarquons que si le résultat vaut pour un nombre fini de voisinages, il vaut encore pour leur intersection. Par conséquent, nous pouvons supposer que le voisinage U est de la forme

$$U = \left\{ y \in X \,\middle|\, s < |P(y)| < t \right\},$$

avec $P \in A[T]$ et $s, t \in \mathbf{R}$. En effet, par définition de la topologie, tout voisinage du point x contient une intersection finie de voisinages de cette forme.

Supposons, tout d'abord, que $P \neq 0 \mod \mathfrak{m}$. Il existe alors $Q \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, $R \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$, avec $R \neq 0 \mod \mathfrak{m}$, et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$P = Q + \pi_{\mathfrak{m}}^{p} R.$$

Puisque le point x appartient à U et que $P(x) = 1$, nous avons $s < 1 < t$. Par conséquent, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $s < 1 - \varepsilon$ et $t > 1 + \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$ tel que

$$2|\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{p\alpha} \leq 1 - \varepsilon.$$

Nous avons alors

$$U \supset \left\{ y \in X \,\middle|\, 1 - \varepsilon < |Q(y)| < 1 + \varepsilon \right\} \cap \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, 0 < |R(y)| < 2 \right\}.$$

Supposons, à présent, que $P = 0 \mod \mathfrak{m}$. Il existe alors un polynôme Q de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$, avec $Q \neq 0 \mod \mathfrak{m}$, et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$P = \pi_{\mathfrak{m}}^p Q.$$

Puisque le point x appartient à U et que $P(x) = 0$, nous avons $s < 0 < t$ et donc

$$U = \left\{ y \in X \,\middle|\, |P(y)| < t \right\}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $2|\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{p\alpha} \leq t$. Nous avons alors

$$U \supset \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, 0 < |Q(y)| < 2 \right\}.$$

On démontre finalement le résultat à l'aide d'une récurrence sur le nombre de coefficients non nuls du polynôme P et en utilisant, à chaque étape, l'un ou l'autre des résultats précédents. □

Lemme 4.3.2. — *Soit U un voisinage de x dans X. Alors, il existe deux entiers $d, e \in \mathbf{N}$, des polynômes $P_1, \ldots, P_d$ de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, deux à deux distincts, unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible, des polynômes $Q_1, \ldots, Q_e$ de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, deux à deux distincts, unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible et deux nombres réels $\alpha, \varepsilon > 0$ tels que l'on ait*

$$\begin{aligned} U \quad \supset \quad & \bigcap_{1 \leq i \leq d} \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P_i(y)| < 1 + \varepsilon \right\} \\ \cap \quad & \bigcap_{1 \leq j \leq e} \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |Q_j(y)| > 1 - \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme précédemment, si le résultat vaut pour un nombre fini de voisinages, il vaut encore pour leur intersection. D'après le lemme précédent, nous pouvons donc supposer que le voisinage U est de la forme

$$U = \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P(y)| < 1 + \varepsilon \right\}$$

ou

$$U = \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P(y)| > 1 - \varepsilon \right\},$$

où P est un polynôme unitaire à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ et α et ε deux nombres réels strictement positifs. Nous supposerons que nous nous trouvons dans le premier cas. Le second se traite de même. Écrivons le polynôme P sous la forme

$$P = P_1 \cdots P_d,$$

où $d \in \mathbf{N}$ et $P_1, \ldots, P_d$ sont des polynômes à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible. La factorialité de l'anneau $\hat{K}_{\mathfrak{m}}[T]$ et le lemme de Hensel assurent l'existence d'une telle décomposition existe. Soit $i \in [\![1, d]\!]$. Puisque le polynôme P_i est unitaire, il vérifie $|P_i(x)| = 1$. Par conséquent, la partie

$$U_i = \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P_i(y)| < (1+\varepsilon)^{1/d} \right\}$$

est un voisinage du point x dans X. L'intersection

$$\bigcap_{1 \leq i \leq d} U_i$$

est alors un voisinage de x dans U de la forme voulue. □

Proposition 4.3.3. — *Soit U un voisinage du point x dans X. Alors il existe un voisinage ouvert W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :*

i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage connexe par arcs de $\pi(x) = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B ;
ii) la section de Gauß σ_G restreinte à $\pi(W)$ prend ses valeurs dans W ;
iii) pour tout point b de $\pi(W)$, la trace de la fibre X_b sur W est connexe par arcs.

Démonstration. — Appliquons le lemme précédent. Le voisinage W que l'on obtient vérifie les propriétés demandées. Les deux premières sont immédiates. Intéressons-nous à la troisième. Nous conservons les notations du lemme précédent. Soit β un élément de $]\alpha, +\infty]$. Nous voulons montrer que la trace de la fibre $X_{a_{\mathfrak{m}}^{\beta}}$ sur W est connexe par arcs. Soit $i \in [\![1, d]\!]$. Par définition, le polynôme P_i est une puissance d'un polynôme irréductible dans $\mathscr{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})[T]$. On en déduit que la partie

$$\left\{ y \in X_{a_{\mathfrak{m}}^{\beta}} \,\middle|\, |P_i(y)| < 1 + \varepsilon \right\}$$

est connexe par arcs. On l'obtient en effet à partir de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})}$ en coupant l'une des branches partant du point de Gauß. De même, quel que soit $j \in [\![1, e]\!]$, la partie

$$\left\{ y \in X_{a_{\mathfrak{m}}^{\beta}} \,\middle|\, |P_j(y)| > 1 - \varepsilon \right\}$$

est connexe par arcs. Puisque la droite analytique $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})}$ a une structure d'arbre, une intersection de parties connexes par arcs l'est encore. On en déduit que la partie $W \cap X_{a_{\mathfrak{m}}^{\beta}}$ est connexe par arcs. □

Quatre corollaires suivent.

Corollaire 4.3.4. — *Le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 4.3.5. — *Le morphisme π est ouvert au voisinage du point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$.*

Corollaire 4.3.6. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage du point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$.*

Démonstration. — Soient U un voisinage du point x dans X et f un élément de $\mathscr{O}(U)$ dont l'image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est pas nulle. Considérons alors un voisinage ouvert W du point x contenu dans $U \cap \pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}])$ et vérifiant les propriétés de la proposition 4.3.3.

Posons $W_+ = W \cap \pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}[)$. Puisque le morphisme π est ouvert au voisinage du point x, il existe un point interne y de W_+ tel que l'image de la fonction f n'est pas nulle dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$. Par choix de W, l'ouvert W_+ est connexe et le principe du prolongement analytique y vaut donc, d'après la proposition 3.6.6. On en déduit que, pour tout point z de W_+, l'image de la fonction f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,z}$ n'est pas nulle.

Posons $W_0 = W \cap \tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Soit z un point de $W_0 \setminus \{x\}$. D'après le théorème 4.1.1 et le corollaire 4.2.4, le morphisme π est ouvert au voisinage du point z. Par conséquent, tout voisinage du point z contient un élément de W_+ et l'image de la fonction f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,z}$ ne peut pas être nulle. Ceci conclut la preuve. □

Corollaire 4.3.7. — *Le principe du prolongement analytique vaut sur tout ouvert connexe de l'espace $\pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}])$.*

Démonstration. — Ce résultat découle des corollaires 4.1.19 et 4.2.8, de la proposition 4.1.22 et du lemme 3.6.4. □

Intéressons-nous, à présent, à l'anneau local.

Proposition 4.3.8. — *Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Notons x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathscr{O}_{X,x}$. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est complet, et donc isomorphe à $\mathscr{H}(x) = \tilde{k}_{\mathfrak{m}}(T)$.*

Démonstration. — Nous allons définir une valuation discrète v sur l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$. Soit f un élément de $\mathscr{O}_{X,x}$. Il existe un voisinage U de x dans X sur lequel la fonction f est définie. Pour $r \in [0,1]$, nous noterons simplement η_r le point η_r de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. La trace de la partie U sur la fibre

extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ est un voisinage du point $x = \eta_1$ dans cette fibre. Par conséquent, il existe $R \in]0,1[$ tel que, quel que soit $r \in [R,1]$, on ait $\eta_r \in U$. D'après la proposition 4.2.5, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,\eta_R}$ est un anneau de valuation discrète. Notons v_R la valuation sur cet anneau. Nous posons alors

$$v(f) = v_R(f) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}.$$

La proposition 1.3.10 nous assure que cette quantité ne dépend pas du nombre réel R choisi.

Les deux propriétés suivantes sont immédiates : quels que soient f et g dans $\mathscr{O}_{X,x}$, nous avons

1. $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$;
2. $v(fg) = v(f) + v(g)$.

Nous avons également $v(0) = +\infty$. Montrons que seule la fonction nulle satisfait cette égalité. Soit $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ telle que $v(f) = +\infty$. Soit U un voisinage ouvert de x dans X sur lequel la fonction f est définie. D'après la proposition 4.3.3, quitte à restreindre U, nous pouvons supposer qu'il vérifie les propriétés suivantes :

i) la projection $\pi(U)$ est un voisinage connexe par arcs de $\pi(x) = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B ;
ii) la section de Gauß σ_G restreinte à $\pi(U)$ prend ses valeurs dans U ;
iii) pour tout point b de $\pi(U)$, la trace de la fibre X_b sur U est connexe par arcs.

Soit $R \in]0,1[$ tel que, quel que soit $r \in [R,1]$, on ait $\eta_r \in U$. Par définition de v, nous avons $v_R(f) = +\infty$. Par conséquent, l'image de la fonction f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,\eta_R}$ est nulle. Il existe donc un voisinage ouvert V du point η_R dans U tel que la fonction f soit nulle sur V. D'après le corollaire 4.2.4, la partie $V_0 = \pi(V)$ est un voisinage du point extrême $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B. Soit $c \in V_0$. La fonction f est nulle sur un l'ouvert $X_c \cap V$ de $X_c \cap U$. Comme ce dernier espace est normal et connexe, la fonction f y est identiquement nulle. Finalement, la fonction f est nulle sur $U \cap X_{V_0}$ et donc dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.

La propriété que nous venons de démontrer jointe à la propriété 2 impose à l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ d'être intègre. Considérons son corps des fractions L. L'application v se prolonge alors en une valuation discrète sur le corps L. Pour parvenir à nos fins, il nous reste à montrer les deux égalités

$$\mathscr{O}_{X,x} = \{f \in L \mid v(f) \geq 0\}$$

et

$$\mathfrak{m}\,\mathscr{O}_{X,x} = \{f \in L \mid v(f) > 0\}.$$

Remarquons que la seconde égalité découle de la première et du fait que le générateur $\pi_{\mathfrak{m}}$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A a pour valuation $v(\pi_{\mathfrak{m}}) = 1$. D'autre part, pour démontrer la première égalité, il nous suffit de montrer que tout élément f de $\mathscr{O}_{X,x}$ vérifiant $v(f) = 0$ est inversible dans l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$. Ce résultat se démontre facilement en utilisant les propriétés du flot (*cf.* proposition 1.3.10). En effet, soit f un élément de $\mathscr{O}_{X,x}$ vérifiant $v(f) = 0$. Il existe un nombre réel $R \in]0,1[$ vérifiant les propriétés habituelles tel que l'on ait $v_R(f) = 0$. On en déduit que la fonction f est inversible dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,\eta_R}$ et donc que $|f(\eta_R)| \neq 0$. La proposition 1.3.10 nous assure alors que l'on a

$$|f(x)| = |f(\eta_R)|^0 = 1.$$

On en déduit que la fonction f est inversible dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.

Le corps valué $\mathscr{H}(x)$ est isomorphe au corps $\tilde{k}_m(T)$ muni de la valuation triviale. Le corps valué $\kappa(x)$ qui en est un sous-corps est donc complet. □

Lemme 4.3.9. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Soient $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $P(T)$ un polynôme unitaire, non constant, à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, posons*

$$W_\varepsilon = \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P(T)(y)| = r \right\}.$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, le compact rationnel W_ε possède un bord analytique fini, algébriquement trivial et contenu dans la fibre $X_{a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon}$.

Démonstration. — Soient K' une extension finie de K, A' l'anneau de ses entiers et $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de A' divisant l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. En utilisant la surjectivité du morphisme $\mathbf{A}_{A'}^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, on montre facilement que si le résultat énoncé vaut en remplaçant A par A' et $\mathfrak{m}$ par $\mathfrak{m}'$, alors il vaut sous sa forme originale. Par conséquent, quitte à remplacer K par une extension finie K' bien choisie, nous pouvons supposer que le polynôme $P(T)$ est scindé dans $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$. Puisqu'il est unitaire et à coefficients entiers, ses racines sont entières et il existe donc $t \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}$ tels que

$$P(T) = \prod_{i=1}^{t} (T - \alpha_i).$$

Remarquons également qu'il suffit de montrer que le compact rationnel W_ε possède un bord analytique qui est contenu dans la fibre $X_{a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon}$. Les autres conditions découlent alors du corollaire 3.4.11.

Supposons, tout d'abord, que $r > 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit y un point de W_ε. Puisque $|P(T)(y) = r$, il existe un élément i de $[\![1, t]\!]$ tel que $|(T - \alpha_i)(y)| \geq u$. Quel que soit $j \neq i$, nous avons $|(\alpha_i - \alpha_j)(y)| \leq 1 < u$ et donc $|(T - \alpha_j)(y)| = u$. Par conséquent, nous avons également

$$|(T - \alpha_i)(y)| = u.$$

Réciproquement, l'on montre que

$$W_\varepsilon = \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |(T - \alpha_i)(y)| = u \right\}.$$

Le résultat découle alors de la proposition 3.2.23 et des descriptions explicites établies au numéro 3.1.2.3.

Supposons, à présent, que $r < 1$. Posons

$$D = \left\{ (i, j) \in [\![1, t]\!]^2 \,\middle|\, |\alpha_i - \alpha_j|_{\mathfrak{m}} < 1 \right\}.$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout couple (i, j) de D, nous ayons

$$|\alpha_i - \alpha_j|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon_0} < r.$$

Soit $\varepsilon \geq \varepsilon_0$. Soit y un point de W_ε. Puisque $|P(T)(y) = r < 1$, il existe un élément i de $[\![1, t]\!]$ tel que $|(T - \alpha_i)(y)| < 1$. Posons

$$g_i = \left\{ j \neq i \,\middle|\, |\alpha_i - \alpha_j|_{\mathfrak{m}} = 1 \right\}$$

et

$$p_i = \left\{ j \neq i \,\middle|\, |\alpha_i - \alpha_j|_{\mathfrak{m}} < 1 \right\}.$$

Remarquons que, par définition de ε_0, pour tout élément i de p_i, nous avons

$$|\alpha_i - \alpha_j|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon} < r.$$

Supposons, par l'absurde, que $|(T - \alpha_i)(y)| < r$. Alors, quel que soit $j \in g_i$, nous avons $|(T - \alpha_j)(y)| = 1$ et, quel que soit $j \in p_i$, nous avons $|(T - \alpha_j)(y)| < r$. On en déduit que

$$|P(T)(y)| < r^{\sharp g_i + 1} < r,$$

ce qui est impossible.

Par conséquent, nous avons $|(T - \alpha_i)(y)| \geq r$. On en déduit que, quel que soit $j \in g_i$, nous avons $|(T - \alpha_j)(y)| = 1$ et, quel que soit $j \in p_i$, $|(T - \alpha_j)(y)| = |(T - \alpha_i)(y)|$. Par conséquent, nous avons

$$|(T - \alpha_i)(y)| = r^{1/(\sharp g_i + 1)} \in [r, 1[.$$

Réciproquement, l'on montre que, si y est un point de $\pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}])$ tel que $|(T - \alpha_i)(y)| = r^{1/(\sharp g_i + 1)}$, alors y appartient à W_ε.

Finalement, nous avons montré que

$$W_\varepsilon = \bigcup_{1\leq i\leq t} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |(T-\alpha_i)(y)| = r^{1/(\sharp g_i+1)} \right\}.$$

Le résultat découle alors de la proposition 3.2.23 et des descriptions explicites établies au numéro 3.1.2.3. □

Corollaire 4.3.10. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord analytique fini et algébriquement trivial.*

Démonstration. — Notons x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Soit U un voisinage du point x dans X. D'après le lemme 4.3.2, il existe deux entiers $d, e \in \mathbf{N}$, des polynômes $P_1, \ldots, P_d$ de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, deux à deux distincts, unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible, des polynômes $Q_1, \ldots, Q_e$ de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, deux à deux distincts, unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible et deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$ tels que le voisinage du point x défini par

$$\begin{aligned} V \quad = \quad & \bigcap_{1\leq i\leq d} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P_i(y)| \leq 1+\varepsilon \right\} \\ \cap \quad & \bigcap_{1\leq j\leq e} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |Q_j(y)| \geq 1-\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

soit contenu dans U. Le voisinage V est compact, connexe (par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 4.3.3) et spectralement convexe (d'après la proposition 1.2.16). Notons

$$\begin{aligned} W \quad = \quad & \bigcap_{1\leq i\leq d} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P_i(y)| = 1+\varepsilon \right\} \\ \cap \quad & \bigcap_{1\leq j\leq e} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |Q_j(y)| = 1-\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.4.8, cette partie compacte contient le bord de Shilov de l'intersection de V avec chaque fibre au-dessus de $[a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. C'est donc un bord analytique de V. Quitte à augmenter α, d'après le lemme 4.3.9, le compact rationnel V possède un bord analytique fini et algébriquement trivial. □

Corollaire 4.3.11. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Notons x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Soient π une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{X,x}$ et U un voisinage du point x dans X sur lequel elle est définie. Il*

existe un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts et connexes du point x dans U tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$, la fonction π est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ sur V.

Démonstration. — Soient $d, e \in \mathbf{N}$, $P_1, \ldots, P_d \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, deux à deux distincts, unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible, $Q_1, \ldots, Q_e \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, deux à deux distincts, unitaires, irréductibles et dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}[T]$ est une puissance d'un polynôme irréductible, $\alpha > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Définissons un voisinage du point x dans X par

$$\begin{aligned} V \quad = \quad & \bigcap_{1 \leq i \leq d} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |P_i(y)| \leq 1 + \varepsilon \right\} \\ \cap \quad & \bigcap_{1 \leq j \leq e} \left\{ y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |Q_j(y)| \geq 1 - \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons montré dans le corollaire précédent que, si α est assez grand, ce que nous supposerons désormais, la partie V est compacte et connexe et possède un bord analytique Γ fini et algébriquement trivial. D'après le lemme 4.3.2, il suffit de montrer que la fonction $\pi_{\mathfrak{m}}$ est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ sur V. Remarquons que la fonction $\pi_{\mathfrak{m}}$ ne s'annule pas sur l'ensemble Γ. Posons

$$C = \|\pi_{\mathfrak{m}}^{-1}\|_{\Gamma}.$$

Soit f un élément de $\mathscr{O}(V)$ dont l'image dans $\mathscr{H}(x)$ est nulle. Puisque l'espace analytique $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ est normal, que la partie $V \cap \tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ est connexe et que l'anneau local $\mathscr{O}_{\tilde{X}_{\mathfrak{m}},x}$ est un corps, nous avons

$$\forall y \in V \cap \tilde{X}_{\mathfrak{m}},\ f(y) = 0.$$

D'après la proposition 4.3.8, la fonction f est multiple de $\pi_{\mathfrak{m}}$ au voisinage du point x. D'après le corollaire 4.2.5, elle l'est également au voisinage de tout point de type 3 de $V \cap \tilde{X}_{\mathfrak{m}}$.

Soit y un point de $V \cap \tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ qui n'est pas de type 2 ou 3. C'est alors un point rigide de $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. La proposition 3.3.12 nous permet de supposer que c'est un point rationnel. En utilisant le développement en série de la fonction f donné par le corollaire 3.2.5 et le résultat concernant les points de type 3 voisins, l'on montre que la fonction f est multiple de $\pi_{\mathfrak{m}}$ au voisinage du point y.

Soit y un point de V qui n'appartient pas à la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. La fonction f est multiple de $\pi_{\mathfrak{m}}$ au voisinage du point y, puisque la fonction $\pi_{\mathfrak{m}}$ est inversible au voisinage de ce point.

La connexité de V et le principe du prolongement analytique (*cf.* corollaire 4.3.7) assurent qu'il existe un élément g de $\mathscr{O}(V)$ tel que l'on ait l'égalité

$$f = \pi_{\mathfrak{m}}\, g \text{ dans } \mathscr{O}(V).$$

En outre, nous avons

$$\|g\|_V = \|g\|_\Gamma = \max_{\gamma\in\Gamma}(|(\pi_{\mathfrak{m}}^{-1} f)(\gamma)|) \leq C\, \|f\|_V.$$

□

4.3.2. Fibre centrale

Intéressons-nous, à présent, au point de Gauß de la fibre centrale. Comme précédemment, nous commençons par étudier ses voisinages. C'est un problème bien plus délicat que pour les fibres extrêmes.

Lemme 4.3.12. — *Soit $(k, |.|)$ un corps ultramétrique complet. Soit un polynôme $P(T) = \sum_{i=0}^{d} a_i\, T^i \in k[T]$, avec $d \in \mathbf{N}^*$, quel que soit $i \in [\![0, d-1]\!]$, $a_i \in k$ et $a_d \in k^*$. Posons*

$$\rho = \max_{0\leq i\leq d-1}\left(\left|\frac{a_i}{a_d}\right|^{\frac{1}{d-i}}\right).$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ vérifiant la condition $\mu > |a_d|\, \rho^d$. Alors la partie de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ définie par

$$U = \left\{x \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \,\middle|\, \lambda < |P(x)| < \mu\right\}$$

est connexe par arcs.

Démonstration. — Soit k' un corps algébriquement clos et maximalement complet contenant k. Puisque le morphisme de changement de bases $\mathbf{A}_{k'}^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est continu et surjectif, quitte à remplacer k par k', nous pouvons supposer que le corps k est algébriquement clos et maximalement complet. Il existe alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in k$ tels que

$$P(T) = a_d \prod_{i=1}^{d}(T - \alpha_i).$$

D'après [**5**], proposition 3.1.2.1, quel que soit $i \in [\![1, d]\!]$, nous avons

$$|\alpha_i| \leq \rho.$$

Soit $r \geq \rho$ vérifiant la condition $\lambda < |a_d|\, r^d < \mu$. Alors, nous avons

$$|P(\eta_r)| = |a_d| \prod_{i=1}^{d} |(T - \alpha_i)(\eta_r)| = |a_d|\, r^d.$$

Par conséquent, le point η_r appartient à U.

Soit x un point de U. Puisque k est maximalement complet, il existe $\beta \in k$ et $s \in \mathbf{R}_+$ tels que $x = \eta_{\beta,s}$. Soit $i \in [\![1, d]\!]$. Nous avons $T - \alpha_i = (T - \beta) + (\beta - \alpha_i)$ et donc

$$|(T - \alpha_i)(\eta_{\beta,s})| = \max(s, |\beta - \alpha_i|).$$

Supposons que $|\beta| \leq r$. Considérons le chemin injectif l tracé sur $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \\ t & \mapsto & \eta_{\beta,tr+(1-t)s} \end{array}.$$

Il joint le point $\eta_{\beta,s}$ au point $\eta_{\beta,r} = \eta_r$. Si s est inférieur à r, alors, lorsque l'on parcourt l, la fonction $|P|$ croît de $|P(\eta_{\beta,s})|$ à $|P(\eta_r)|$. En particulier, le chemin reste dans U. Il en est de même si $s > r$.

Supposons, à présent, que $|\beta| > r$. Si $s \geq |\beta|$, alors $\eta_{\beta,s} = \eta_{0,s}$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Supposons donc que $s < |\beta|$. Quel que soit $i \in [\![1, d]\!]$, nous avons

$$|(T - \alpha_i)(\eta_{\beta,s})| = \max(s, |\beta - \alpha_i|) = \max(s, |\beta|) = |\beta|.$$

Le long du chemin l', joignant le point $\eta_{\beta,s}$ au point $\eta_{\beta,|\beta|}$, défini par

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \\ t & \mapsto & \eta_{\beta,t|\beta|+(1-t)s} \end{array},$$

la fonction $|P|$ est constante. Le chemin l' est donc tracé sur U. Nous sommes donc ramenés au cas du point $\eta_{\beta,|\beta|} = \eta_{0,|\beta|}$ que nous avons traité précédemment. Nous pouvons donc joindre le point $\eta_{\beta,s}$ au point η_r par un chemin tracé sur U.

□

Lemme 4.3.13. — *Soit $(k, |.|)$ un corps archimédien complet. Soient $d \in \mathbf{N}$ et $P_1, \ldots, P_d$ des polynômes à coefficients dans k. Alors, il existe $S, T \in \mathbf{R}$ tels que, quels que soient $s_1, \ldots, s_d \in [0, S[$ et $t_1, \ldots, t_d \in]T, +\infty[$, la partie de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ définie par*

$$\bigcap_{1 \leq j \leq d} \left\{ z \in \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}} \,\middle|\, s_j < |P_j(z)| < t_j \right\}$$

est connexe par arcs.

Démonstration. — Considérons un plongement du corps k dans le corps $\mathbf{C}$. Nous munissons $\mathbf{C}$ de l'unique valeur absolue qui étend celle de k. Le morphisme $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{1,\mathrm{an}} \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ induit par le plongement précédent étant continu et surjectif, nous pouvons supposer que $k = \mathbf{C}$.

Nous pouvons supposer qu'aucun des polynômes P_i, avec $i \in [\![1, d]\!]$, n'est nul. Notons E l'ensemble des éléments $(x, y, s_1, \ldots, s_d, t_1, \ldots, t_d)$ de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^{2d}$ qui vérifient la condition suivante :

$$\forall j \in [\![1, d]\!],\ s_j < |P_j(x + iy)|^2 < t_j.$$

C'est un ensemble semi-algébrique réel. Considérons également l'application

$$p : E \to [0, 1]^{2d}$$

qui à tout élément $u = (x, y, s_1, \ldots, s_d, t_1, \ldots, t_d)$ de E associe

$$p(u) = \left(s_1, \ldots, s_d, \frac{t_1}{1 + t_1}, \ldots, \frac{t_d}{1 + t_d}\right).$$

Cette application est semi-algébrique réelle et continue. D'après le théorème de Hardt (*cf.*[**4**], théorème 9.3.1), il existe une partition $(T_1, \ldots, T_r)$, avec $r \in \mathbf{N}$, de $[0, 1]^{2d}$ en parties semi-algébrique telle que, quel que soit $k \in [\![1, r]\!]$, il existe un ensemble semi-algébrique F_k et un homéomorphisme semi-algébrique

$$\theta_k : T_k \times F_k \xrightarrow{\sim} p^{-1}(T_k)$$

tel que l'application $p \circ \theta_j$ soit la projection $T_k \times F_k \to T_k$. Notons v le point $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ de $[0, 1]^{2d}$. Pour parvenir au résulat souhaité, il suffit de montrer que le point v possède un voisinage dans $[0, 1]^{2d}$ au-dessus duquel les fibres de l'application p sont connexes. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tout indice $k \in [\![1, r]\!]$ tel que le point v soit adhérent à la partie T_k, la partie F_k est connexe.

Soit $k \in [\![1, r]\!]$ tel que le point v soit adhérent à la partie T_k. D'après le lemme de sélection des courbes (*cf.* [**4**], théorème 2.5.5), il existe une fonction semi-algébrique continue

$$f : [0, 1] \to T_k$$

telle que $f([0, 1[) \subset T_k$ et $f(1) = v$. Puisque la fonction f est semi-algébrique, quitte à restreindre son intervalle de définition puis effectuer un changement d'échelle pour se ramener à $[0, 1]$, nous pouvons supposer que les d premières fonctions coordonnées de f sont décroissantes et que les d dernières sont croissantes. Soit (x, y) un point de $\mathbf{R}^2$ tel que $(x, y, f(0)) \in E$. Quel que soit $u \in [0, 1[$, nous avons alors encore $(x, y, f(u)) \in E$.

Soient z_1, z_2 des éléments de $\mathbf{R}^2$ tels que $(z_1, f(0))$ et $(z_2, f(0))$ appartiennent à E. Quand les nombres $s_1, \ldots, s_d$ sont assez petits et les nombres $t_1, \ldots, t_d$ assez grands, les points z_1 et z_2 appartiennent à la même composante connexe

de

$$\bigcap_{1\leq j\leq d} \left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, s_j < |P_j(x+iy)|^2 < t_j\right\}.$$

On en déduit qu'il existe $u \in [0,1[$ tels que les points $(z_1, f(u))$ et $(z_2, f(u))$ appartiennent à la même composante connexe de $p^{-1}(f(u))$. Le morphisme p étant semi-algébriquement trivial au-dessus de T_k, les points $(z_1, f(0))$ et $(z_2, f(0))$ doivent également appartenir à la même composante connexe de $p^{-1}(f(0))$. On en déduit que la partie F_k est connexe, ce qui conclut la preuve. □

Proposition 4.3.14. — *Notons x le point de Gauß de la fibre centrale. Soit U un voisinage de x dans X. Alors il existe un voisinage ouvert W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :*

i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage ouvert et connexe par arcs de $\pi(x) = a_0$ dans B ;
ii) il existe une section topologique de π au-dessus de $\pi(W)$ à valeurs dans W ;
iii) pour tout point b de $\pi(W)$, la trace de la fibre X_b sur W est connexe par arcs ;
iv) quels que soient $x \in W$ et $\varepsilon \in [0,1]$, le point x^ε appartient à W.

Démonstration. — Par définition de la topologie de X, il existe un entier $r \in \mathbf{N}^*$, des polynômes $f_1, \ldots, f_r \in A[T]$ et un nombre réel $\lambda > 0$ tels que U contienne une partie de la forme

$$V = \bigcap_{1\leq i\leq r} \left\{y \in X \,\middle|\, |f_i(x)| - \lambda < |f_i(y)| < |f_i(x)| + \lambda\right\}.$$

Nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in [\![1,d]\!]$, nous avons $f_i \neq 0$. Alors

$$V = \bigcap_{1\leq i\leq r} \left\{y \in X \,\middle|\, 1 - \lambda < |f_i(y)| < 1 + \lambda\right\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage E de a_0 dans B tel que le voisinage $W = V \cap X_E$ de x dans X vérifie les propriétés requises. Nous allons procéder en plusieurs étapes en prouvant tout d'abord le résultat au-dessus de la partie ultramétrique de B, puis au-dessus de chacune des branches archimédiennes. Le résultat global en découlera pourvu que les sections que nous aurons alors construites se recollent sur la fibre centrale. De façon à en être certain, nous imposerons à toutes les sections d'envoyer le point central a_0 sur le point de Gauß η_1 de la fibre centrale.

Notons

$$B_{um} = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \Sigma_f} B_{\mathfrak{m}}$$

la partie ultramétrique de B. On définit une section topologique σ_G de la projection π au-dessus de B_{um} en associant à tout point b de B_{um} le point de Gauß de la fibre X_b.

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Notons

$$V_i = \left\{ y \in X \,\middle|\, 1 - \lambda < |f_i(y)| < 1 + \lambda \right\}.$$

Remarquons que, quels que soient $x \in V_i$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, nous avons $x^\varepsilon \in V_i$.

Il existe $d_i \in \mathbf{N}^*$ et $f_{i,0}, \ldots, f_{i,d_i} \in A$, avec $f_{i,d_i} \neq 0$, tels que

$$f_i(T) = \sum_{j=0}^{d_i} f_{i,j}\, T^j.$$

Posons

$$C_i = \bigcap_{0 \leq j \leq d_i} \left\{ b \in B_{um} \,\middle|\, |f_{i,j}(a_0)| - \lambda < |f_{i,j}(b)| < |f_{i,j}(a_0)| + \lambda \right\}.$$

C'est un voisinage du point central a_0 de B_{um}. La section topologique σ_G de π restreinte à C_i prend ses valeurs dans V_i.

Notons D_i l'ensemble des points de B_{um} où la fonction f_{i,d_i} est inversible. Définissons alors une fonction continue ρ_i de D_i dans $\mathbf{R}_+$ en associant à tout point b de D_i le nombre réel

$$\rho_i(b) = \max_{0 \leq j \leq d_i - 1} \left(\left| \frac{f_{i,j}(b)}{f_{i,d_i}(b)} \right|^{\frac{1}{d_i - j}} \right).$$

Notons D_i' le voisinage ouvert de a_0 dans D_i défini par

$$D_i' = \left\{ b \in D_i \,\middle|\, |\rho_i(b)| < 1 + \lambda \right\}.$$

Finalement, choisissons E_i un voisinage ouvert et connexe par arcs de a_0 dans $C_i \cap D_i'$. Quels que soient $x \in E_i$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, nous avons alors $x^\varepsilon \in E_i$.

Posons

$$E = \bigcap_{1 \leq i \leq r} E_i$$

et

$$W = V \cap X_E.$$

Les première, troisième et quatrième propriétés de l'énoncé sont alors clairement vérifiées. Soit $b \in E = \pi(W)$. Quel que soit $i \in [\![1, r]\!]$, d'après le lemme 4.3.12 et puisque $b \in D_i'$, la partie $V_i \cap X_b$ est connexe par arcs. Puisque la fibre X_b

est un arbre, l'intersection $V \cap X_b$ de toutes ces parties est donc connexe par arcs.

Passons maintenant aux branches archimédiennes de B. Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. Nous avons

$$\lim_{\varepsilon \underset{>}{\to} 0} (1-\lambda)^{1/\varepsilon} = 0 \text{ et } \lim_{\varepsilon \underset{>}{\to} 0} (1+\lambda)^{1/\varepsilon} = +\infty.$$

Par conséquent, d'après le lemme 4.3.13, il existe $\eta > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in]0, \eta[$, la partie

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{ y \in \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\hat{K}_\sigma} \mid (1-\lambda)^{1/\varepsilon} < |f_i(y)|_\sigma < (1+\lambda)^{1/\varepsilon} \right\}$$

est connexe par arcs. En d'autres termes, quel que soit $\varepsilon \in]0, \eta[$, la trace de la fibre $X_{a_\sigma^\varepsilon}$ sur V est connexe par arcs. Le lemme 4.3.12 nous montre que la trace de la fibre centrale $X_0 = X_{a_\sigma^0}$ sur V est également connexe par arcs.

Soit α un nombre réel transcendant. Considérons l'application σ_G qui au point a_σ^ε de B'_σ, avec $\varepsilon \in]0, 1]$, associe le point de X associé à la semi-norme multiplicative sur $A[T]$, bornée sur A, définie par

$$\begin{array}{ccc} A[T] & \to & \mathbf{R}_+ \\ P(T) & \mapsto & |P(\alpha)|_\infty^\varepsilon \end{array}$$

et au point a_0 associe le point de Gauß η_1 de la fibre centrale X_0. Cette application σ_G définit une section topologique continue de la projection π au-dessus de B_σ.

Soit $i \in [\![1, d]\!]$. Puisque α est transcendant, nous avons $f_i(\alpha) \neq 0$ dans $\hat{K}_\sigma$. Par conséquent, il existe $\eta_i > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in]0, \eta_i[$, on ait

$$(1-\lambda)^{1/\varepsilon} < |f_i(\alpha)|_\sigma < (1+\lambda)^{1/\varepsilon}.$$

Posons $\zeta = \min_{1 \leq i \leq d}(\eta_i)$. Au-dessus du voisinage $[a_0, a_\sigma^\zeta[$ de a_0 dans B_σ, la restriction de la section σ_G est à valeurs dans V. On en déduit le résultat annoncé. □

Nous obtenons immédiatement les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.3.15. — *Le point de Gauß de la fibre centrale possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 4.3.16. — *Le morphisme π est ouvert au voisinage du point de Gauß de la fibre centrale.*

Intéressons-nous, à présent, à l'anneau local.

Proposition 4.3.17. — *Notons x le point de Gauß de la fibre centrale. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps, canoniquement isomorphe au corps $K(T)$. Il est*

complet pour la valeur absolue associée au point x, qui n'est autre que la valeur absolue triviale.

Démonstration. — Commençons par prouver que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps. Il suffit de montrer que son idéal maximal est réduit à (0). Soit f une fonction définie sur un voisinage U de x dans X et s'annulant en x. Nous voulons montrer que f s'annule encore au voisinage de x dans X.

D'après la proposition 4.3.14, il existe un voisinage ouvert W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :

i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage ouvert connexe par arcs de $\pi(x) = a_0$ dans B ;

ii) il existe une section topologique de π au-dessus de $\pi(W)$ à valeurs dans W ;

iii) pour tout point b de $\pi(W)$, la trace de la fibre X_b sur W est connexe par arcs ;

iv) quel que soient $x \in W$ et $\varepsilon \in [0,1]$, le point x^ε appartient à W.

Soit $\sigma \in \Sigma$. Notons $W'_\sigma = W \cap X'_\sigma$. C'est la trace de W sur la branche σ-adique ouverte. Soit $b \in \pi(W'_\sigma)$. Soit u un point rigide de $W \cap X_b$ tel que l'extension $\hat{K}_\sigma = \mathscr{H}(b) \to \mathscr{H}(u)$ soit transcendante. Considérons l'application suivante, induite par le flot :

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & X \\ \theta & \mapsto & u^{1-\theta} \end{array}.$$

Son image définit un chemin continu tracé sur W et joignant le point u au point u^0 de la fibre centrale. Puisque l'extension $\hat{K}_\sigma = \mathscr{H}(b) \to \mathscr{H}(u)$ est transcendante, le point u^0 n'est autre que le point x, le point de Gauß de la fibre centrale. D'après le lemme 4.2.9 et la proposition 1.3.10, quel que soit $\theta \in [0,1]$, nous avons

$$|f(\eta_1)| = |f(u^0)| = |f(u^\theta)|^0.$$

On en déduit que $|f(u)| = 0$. La fonction f s'annule donc sur tous les points transcendants de $W \cap X_b$. Puisque $W \cap X_b$ est normal et connexe, la fonction f y est identiquement nulle. Nous avons donc montré que la fonction f est identiquement nulle sur W'_σ. La continuité de f nous permet de montrer qu'elle est encore nulle sur $W \cap X_\sigma$. On en déduit finalement que la fonction f est nulle sur W.

Démontrons, à présent, la dernière partie de la proposition. Puisque l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps, le morphisme $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{H}(x)$ est injectif. L'égalité $\mathscr{H}(x) = K(T)$ nous montre qu'il est également surjectif. □

Corollaire 4.3.18. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage du point de Gauß de la fibre centrale de l'espace X.*

4.4. Résumé

Dans cette partie, nous regroupons les résultats que nous avons obtenu concernant la droite affine analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Rappelons que A désigne un anneau d'entiers de corps de nombres, $B = \mathcal{M}(A)$ son spectre analytique, $X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ la droite affine analytique au-dessus de A et $\pi : X \to B$ le morphisme de projection.

Théorème 4.4.1. — *i) L'espace X est localement compact, métrisable et de dimension topologique* 3.

ii) L'espace X est localement connexe par arcs.

iii) Le morphisme de projection $\pi : X \to B$ est ouvert.

iv) En tout point x de X, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est hensélien, noethérien, régulier, excellent, de dimension inférieure à 2 *et le corps résiduel $\kappa(x)$ est hensélien.*

Démonstration. — Le point *i)* provient des théorèmes 1.1.13 et 3.5.3. Le point *ii)* est obtenu en regroupant les résultats des théorèmes 4.1.1 et 4.1.4 et des corollaires 4.2.3, 4.2.11, 4.3.4 et 4.3.15. Le point *iii)* est obtenu en regroupant les résultats des théorèmes 4.1.1 et 4.1.4 et des corollaires 4.2.4, 4.2.12, 4.3.5 et 4.3.16. Le point *iv)* est obtenu en regroupant les résultats des théorèmes 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4, des corollaires 4.2.5 et 4.2.13 et des propositions 4.3.17 et 4.3.8. Le caractère excellent est immédiat compte tenu du fait que les anneaux locaux sont soit des corps, soit des anneaux de valuation discrète dont le corps des fractions est de caractéristique nulle, soit des anneaux locaux noethériens complets.

□

Théorème 4.4.2. — *Le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point de l'espace X. Par conséquent, il vaut sur tout ouvert connexe de l'espace X.*

Démonstration. — Il suffit de regrouper les résultats de la proposition 3.6.6, des corollaires 4.1.19, 4.2.8, 4.2.14, 4.3.6 et 4.3.18. La deuxième partie provient du lemme 3.6.4. □

De ce théorème découlent plusieurs résultats concernant les anneaux globaux de fonctions holomorphes et méromorphes sur les parties connexes de la droite analytique X.

Définition 4.4.3. — *On appelle* **faisceau des fonctions méromorphes** *et on note $\mathscr{M}$ le faisceau associé au préfaisceau qui envoie tout ouvert U de X sur l'anneau total des fractions de l'anneau $\mathscr{O}(U)$.*

Corollaire 4.4.4. — *Soient U une partie connexe de X et x un point de U. Le morphisme de restriction*

$$\mathscr{M}(U) \to \mathscr{M}_x$$

est injectif.

Démonstration. — Soit s un élément de $\mathscr{M}(U)$ dont l'image dans $\mathscr{M}_x$ est nulle. Notons

$$V = \{y \in U \mid s_y = 0 \text{ dans } \mathscr{M}_y\}.$$

C'est une partie non vide et ouverte de U.

Soit y un point de $U \setminus V$. Il existe un voisinage W du point y dans U et deux éléments f et g de $\mathscr{O}(W)$, g ne divisant pas 0, tels que

$$s = \frac{f}{g} \text{ dans } \mathscr{M}(W).$$

Par hypothèse, le germe s_y n'est pas nul dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$. D'après le théorème 4.4.2, il existe un voisinage W' du point y dans W tel que l'image de la fonction f ne soit nulle dans aucun des anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,z}$, pour z appartenant à W'. Soit z un élément de W'. D'après le théorème 4.4.1, *iv*), l'anneau local $\mathscr{O}_{X,z}$ est intègre. L'élément s_z de $\mathscr{M}_z = \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,z})$ n'est donc pas nul. On en déduit que le voisinage W' du point y est contenu dans $U \setminus V$. Par conséquent, la partie V est fermée dans U. La connexité de U assure qu'elle est égale à la partie U tout entière. □

Corollaire 4.4.5. — *Soit U une partie connexe de l'espace X. L'anneau $\mathscr{O}(U)$ est intègre et l'anneau $\mathscr{M}(U)$ est un corps.*

Démonstration. — Soit x un point de U. D'après le théorème 4.4.2, le morphisme naturel

$$\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}_{X,x}$$

est injectif. D'après le théorème 4.4.1, *iv*), l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est régulier et donc intègre. On en déduit que l'anneau $\mathscr{O}(U)$ est intègre.

Soit s un élément non nul de $\mathscr{M}(U)$. D'après le corollaire 4.4.4, en tout point x de U l'élément s_x de $\mathscr{M}_x = \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,x})$ est non nul et donc inversible. On en déduit que l'élément s lui-même est inversible et donc que l'anneau $\mathscr{M}(U)$ est un corps. □

Corollaire 4.4.6. — *Soit U une partie connexe de l'espace X contenant le point de Gauß de la fibre centrale. Alors l'anneau des fonctions méromorphes sur U est l'anneau des fractions rationnelles $K(T)$.*

Démonstration. — Notons x le point de Gauß de la fibre centrale. D'après la proposition 4.3.17, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est canoniquement isomorphe au corps $K(T)$. D'après le corollaire 4.4.4, le morphisme de restriction

$$\mathscr{M}(U) \to \mathscr{O}_{X,x} = K(T)$$

est injectif. Il est évident qu'il est également surjectif, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 4.4.7. — *Soit x un point de l'espace X en lequel l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. Soient π une uniformisante de $\mathscr{O}_{X,x}$ et U un voisinage du point x dans X sur lequel elle est définie. Alors il existe un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts et connexes du point x dans U tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$, la fonction π est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ sur V.*

Démonstration. — Nous pouvons décrire exactement l'ensemble des points en lequel l'anneau local est un anneau de valuation discrète : il s'agit des points rigides des fibres internes et centrale et des points de type 2 et 3 des fibres extrêmes. Le résultat attendu se déduit alors des corollaires 4.1.12, 4.2.6 et 4.3.11. □

Théorème 4.4.8. — *Tout point de $X_{um} \setminus X_0$ possède un système fondamental de voisinages compacts, connexes et spectralement convexes qui possèdent un bord analytique fini et algébriquement trivial.*

Démonstration. — On regroupe les résultats des propositions 4.1.15 et 4.1.16 et des corollaires 4.2.7 et 4.3.10. □

4.5. Cohérence

Dans cette partie, nous montrons que le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ de la droite analytique X est cohérent. Rappelons, auparavant, quelques définitions et notations. Fixons un espace localement annelé $(Y, \mathscr{O}_Y)$.

Définition 4.5.1. — *Un faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathscr{F}$ est dit* **de type fini** *si, pour tout point y de Y, il existe un voisinage V de y dans Y, un entier p et des éléments $F_1, \ldots, F_p$ de $\mathscr{F}(V)$ tels que, pour tout point z de V, le $\mathscr{O}_{Y,z}$-module $\mathscr{F}_z$ soit engendré par les germes $(F_1)_z, \ldots, (F_p)_z$.*

Définition 4.5.2. — *Soient V une partie ouverte de Y, $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules, $q \in \mathbf{N}$ et $F_1, \ldots, F_q \in \mathscr{F}(V)$. On appelle* **faisceau des relations** *entre $F_1, \ldots, F_q$, et on note $\mathscr{R}(F_1, \ldots, F_q)$, le noyau du morphisme de faisceau suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_V^q & \to & \mathscr{F}_V \\ (a_1, \ldots, a_q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_i\, F_i \end{array}.$$

Définition 4.5.3. — *Un faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathscr{F}$ est dit* **cohérent** *s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

i) le faisceau $\mathscr{F}$ est localement de type fini ;

ii) quels que soient l'ouvert V de Y, l'entier q et les éléments $F_1, \ldots, F_q$ de $\mathscr{F}(V)$, le faisceau $\mathscr{R}(F_1, \ldots, F_q)$ des relations entre $F_1, \ldots, F_q$ est localement de type fini.

Venons-en, à présent, à la preuve de la cohérence du faisceau $\mathscr{O}_X$. Il est évidemment localement de type fini. Il nous reste à étudier les faisceaux de relations. Commençons par un lemme.

Lemme 4.5.4. — *Soit x un point de X. Soient U un voisinage ouvert de x dans X, $p \in \mathbf{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_p \in \mathscr{O}(U)$. Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathscr{O}_X^p$. Supposons qu'il existe $l \in [\![1, p]\!]$ tel que $f_l \neq 0$ dans $\mathscr{O}_{X,x}$. Si l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète ou un corps, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que, quel que soit $y \in V$, la famille*

$$(f_j e_i - f_i e_j)_{1 \leq i < j \leq p}$$

de $\mathscr{O}_{X,y}^p$ engendre le germe $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)_y$.

Démonstration. — Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. Choisissons-en une uniformisante τ. Quitte à restreindre U, nous

pouvons supposer que τ est définie sur U. Notons m le minimum des valuations des éléments $f_1, \ldots, f_p$ de $\mathscr{O}_{X,x}$. Puisque l'un de ces éléments n'est pas nul, nous avons $m \in \mathbf{N}$. Remarquons que, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, nous avons $\tau^{-m} f_i \in \mathscr{O}_{X,x}$. Par choix de m, il existe $j \in [\![1, p]\!]$ tel que la fonction $\tau^{-m} f_j$ soit inversible dans $\mathscr{O}_{X,x}$. Il existe donc un voisinage ouvert V de x dans U sur lequel les fonctions $\tau^{-m} f_1, \ldots, \tau^{-m} f_p$ sont définies et la fonction $\tau^{-m} f_j$ inversible. D'après le théorème 4.4.1, nous pouvons supposer que la partie V est connexe.

Nous disposons de l'inclusion suivante entre faisceaux de $\mathscr{O}_V$-modules :

$$\mathscr{R}(\tau^{-m} f_1, \ldots, \tau^{-m} f_p) \subset \mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p).$$

Montrons que c'est une égalité. Il suffit pour cela de montrer que l'inclusion induit une égalité entre les germes. Soit y un point de V. Remarquons tout d'abord que l'image de τ dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ n'est pas nulle. Dans le cas contraire, le principe du prolongement analytique (*cf.* théorème 4.4.2) imposerait en effet à la fonction τ d'être nulle sur l'ouvert connexe V tout entier, mais nous savons qu'elle n'est pas nulle au voisinage du point x. Soit $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)_y$. Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^{p} a_i f_i = \tau^m \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \tau^{-m} f_i \right) = 0 \text{ dans } \mathscr{O}_{X,y}.$$

D'après le théorème 4.4.1, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ est intègre. On en déduit que

$$(a_1, \ldots, a_p) \in \mathscr{R}(\tau^{-m} f_1, \ldots, \tau^{-m} f_p)_y.$$

Par conséquent, nous pouvons supposer qu'il existe $j \in [\![1, p]\!]$ tel que la fonction f_j est inversible sur V. Soient $y \in V$ et $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)_y$. Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^{p} a_i f_i = 0 \text{ dans } \mathscr{O}_{X,y}.$$

Pour conclure, il nous suffit de remarquer que, dans $\mathscr{O}_{X,y}^p$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} a_i f_j^{-1} (f_j e_i - f_i e_j) &= \sum_{i \neq j} a_i e_i - \left(\sum_{i \neq j} a_i f_i \right) f_j^{-1} e_j \\
&= \sum_{i \neq j} a_i e_i - (-a_j f_j) f_j^{-1} e_j \\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i e_i.
\end{aligned}$$

On démontre le résultat par la même méthode lorsque l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps. Dans ce cas, les réductions préliminaires sont inutiles et l'on peut passer directement à la dernière étape. □

Démontrons, finalement, le résultat attendu.

Théorème 4.5.5. — *Le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est cohérent.*

Démonstration. — Soit x un point de X. Soient U un voisinage ouvert de x dans X, $p \in \mathbf{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_p \in \mathscr{O}(U)$. Il nous suffit de montrer que le faisceau des relations $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)$ est de type fini au voisinage du point x.

Si les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont nulles dans $\mathscr{O}_{X,x}$, alors, par le principe du prolongement analytique, elles sont nulles au voisinage du point x et le résultat est immédiat. Par conséquent, nous pouvons supposer qu'il existe $l \in [\![1, p]\!]$ tel que $f_l \neq 0$ dans $\mathscr{O}_{X,x}$.

Si l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète ou un corps, alors le lemme précédent nous permet de conclure.

Il nous reste, à présent, à traiter le cas où l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est ni un anneau de valuation discrète, ni un corps. Cela impose au point x d'être un point rigide d'une fibre extrême.

D'après le théorème 3.3.14, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est noethérien. Par conséquent, le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)_x$ est de type fini. Il existe donc un entier $q \in \mathbf{N}^*$, un voisinage ouvert V de x et des fonctions $g_1, \ldots, g_q \in \mathscr{O}(V)^p$ tels que le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)_x$ soit engendré par $((g_1)_x, \ldots, (g_q)_x)$.

Puisque les fibres extrêmes sont des droites analytiques sur des corps trivialement valués, l'ensemble de leurs points rigides est discret. Par conséquent, l'ensemble des points de X en lequel l'anneau local est de dimension 2 forme une partie discrète de l'espace X. Quitte à restreindre V, nous pouvons donc supposer que x est le seul point de V en lequel l'anneau local n'est ni un anneau de valuation discrète, ni un corps. Alors, d'après le lemme précédent, quel que soit $y \in V \setminus \{x\}$, le $\mathscr{O}_{X,y}$-module $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)_y$ est engendré par la famille $(f_j e_i - f_i e_j)_{1 \leq i < j \leq p}$ de $\mathscr{O}_{X,y}^p$. Par conséquent, le faisceau $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)$ est de type fini au voisinage du point x. □

CHAPITRE 5

MORPHISMES FINIS

Nous étudions, dans ce chapitre, quelques cas particuliers de morphismes finis entre espaces analytiques au sens de V. Berkovich. Exception faite du dernier numéro, nous quittons ici les espaces analytiques au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres pour revenir au cadre général, celui des espaces au-dessus d'un anneau de Banach muni d'une norme uniforme.

Le numéro 5.1 est consacré aux morphismes finis au sens topologique. Nous nous contentons d'y rappeler les résultats classiques dont nous aurons besoin par la suite.

Au numéro 5.2, nous démontrons un théorème de division de Weierstraß que nous qualifions de global. Il permet en effet de diviser une fonction définie sur un disque de dimension 1 par un polynôme donné, pourvu que le rayon du disque soit assez grand. Nous l'utiliserons pour étendre une norme uniforme sur un anneau (supposé de Banach pour ladite norme) en une norme uniforme sur certaines de ses extensions finies.

Au numéro 5.3, nous nous intéressons à un cas particulier de morphisme fini. Un anneau de Banach $(\mathscr{A}, \|.\|)$ muni d'une norme uniforme étant fixé, nous considérons un morphisme d'une hypersurface de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ au-dessus de $\mathscr{A}$ vers le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ de $\mathscr{A}$. Nous accordons une attention particulière à l'image directe du faisceau structural de cette hypersurface : nous décrivons ses fibres et indiquons des conditions qui assurent sa cohérence.

Le numéro 5.4 est, lui aussi, consacré à la démonstration d'un théorème de division de Weierstraß. Il s'agit, cette fois-ci, d'un théorème de nature locale qui permet d'effectuer une division au voisinage de tous les points rigides des fibres et non plus des seuls points rationnels. À l'aide de ce résultat, nous étudions, au numéro 5.5, les endomorphismes polynomiaux de la droite au-dessus d'un

anneau de Banach muni d'une norme uniforme. Là encore, nous nous intéressons particulièrement à l'image directe du faisceau structural par un tel morphisme.

À ce stade du chapitre, nous aurons introduit plusieurs conditions assurant que les morphismes étudiés jouissent de bonnes propriétés. Dans le numéro 5.6, nous montrons qu'elles sont satisfaites lorsque l'anneau de Banach considéré est un anneau d'entiers de corps de nombres.

Signalons, pour finir, que nous sommes convaincu que les techniques introduites ici permettent de ramener l'étude des courbes analytiques au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres à celle de la droite, au moins lorsque les courbes en question proviennent de courbes algébriques.

5.1. Morphismes topologiques finis

Avant d'étudier les morphismes d'un point de vue algébrique, nous les considérons d'un point de vue topologique. Nous obtenons déjà ainsi plusieurs résultats dignes d'intérêt. Nous les énonçons sans démonstration et renvoyons le lecteur intéressé à [**14**], I, §1. Indiquons néanmoins que ces preuves que nous omettons sont toutes courtes et simples (la dernière est peut-être un peu plus difficile : elle utilise l'existence d'une résolution flasque et le fait que l'image d'un faisceau flasque par une application continue reste flasque).

Dans toute cette section, nous fixons deux espaces topologiques séparés X et Y et une application $\varphi : X \to Y$.

Définition 5.1.1. — *On dit que l'application $\varphi : X \to Y$ est un* **morphisme topologique fini** *si elle est continue, fermée et à fibres finies.*

La propriété suivante des applications fermées est immédiate. Elle nous sera utile à de nombreuses reprises.

Lemme 5.1.2. — *Supposons que l'application φ est fermée. Alors, pour toute partie V de Y, l'ensemble*

$$\{\varphi^{-1}(W),\ W \text{ voisinage de } V \text{ dans } Y\}$$

est un système fondamental de voisinages de $\varphi^{-1}(V)$ dans X.

Corollaire 5.1.3. — *Soit V une partie de Y. Notons*

$$\varphi_V : \varphi^{-1}(V) \to V$$

le morphisme déduit de φ par restriction et corestriction. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. Si l'application φ est fermée, alors le morphisme naturel

$$(\varphi_*\mathscr{F})_V \to (\varphi_V)_*\mathscr{F}_{\varphi^{-1}(V)}$$

est un isomorphisme.

Venons-en, maintenant, aux propriétés des morphismes topologiques finis.

Théorème 5.1.4. — *Supposons que l'application φ est un morphisme topologique fini. Soient y un point de Y et $x_1, \ldots, x_r$, avec $r \in \mathbf{N}^*$, ses antécédents par le morphisme φ. Soit $\mathscr{S}$ un faisceau en groupes abéliens sur X. Alors le morphisme naturel*

$$(\varphi_*\mathscr{S})_y \to \prod_{i=1}^{r} \mathscr{S}_{x_i}$$

est un isomorphisme.

En outre, si $\mathscr{S}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules, alors le morphisme précédent est un isomorphisme de $\mathscr{O}_{Y,y}$-modules.

Théorème 5.1.5. — *Supposons que l'application φ est un morphisme topologique fini. Soit $\mathscr{S}' \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}''$ une suite exacte de faisceaux en groupes abéliens sur X. Alors la suite des images directes*

$$\varphi_*\mathscr{S}' \to \varphi_*\mathscr{S} \to \varphi_*\mathscr{S}''$$

est encore exacte.

Théorème 5.1.6. — *Supposons que l'application φ est un morphisme topologique fini. Soit $\mathscr{S}$ un faisceau en groupes abéliens sur X. Alors, quel que soit $q \in \mathbf{N}$, il existe un isomorphisme de groupes naturel*

$$H^q(X, \mathscr{S}) \simeq H^q(Y, \varphi_*\mathscr{S}).$$

5.2. Théorème de division de Weierstraß global

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach uniforme. Nous noterons $B = \mathcal{M}(\mathscr{A})$. Soient b un point de B, U un voisinage compact de b dans B et R un nombre réel strictement positif. Le théorème de Weierstraß classique permet, sous certaines conditions, de diviser une série à coefficients dans $\mathscr{B}(U)$ de rayon de convergence supérieur à R par une autre. Pour pouvoir effectuer cette division, il est cependant nécessaire, en général, d'autoriser le voisinage U de b et de le rayon de convergence R à diminuer. Dans le théorème qui suit, nous montrons que si le diviseur est un polynôme unitaire et que le nombre réel R est assez grand, ces restrictions sont inutiles.

Théorème 5.2.1 (Théorème de division de Weierstraß global)
Soient $p \in \mathbf{N}$ et $G \in \mathscr{A}[T]$ un polynôme unitaire de degré p. Alors il existe un nombre réel $v > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute partie compacte U de B, tout nombre réel $w \geq v$ et tout élément F de $\mathscr{B}(U)\langle |T| \leq w\rangle$, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathscr{B}(U)\langle |T| \leq w\rangle)^2$ tel que

i) R soit un polynôme de degré strictement inférieur à p ;
ii) $F = QG + R$.

En outre, il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+^*$, indépendante de U, w et F, telle que l'on ait les inégalités

$$\begin{cases} \|Q\|_{U,w} & \leq & C\,\|F\|_{U,w}\ ; \\ \|R\|_{U,w} & \leq & C\,\|F\|_{U,w}. \end{cases}$$

Démonstration. — Notons

$$G = T^p + \sum_{k=0}^{p-1} g_k\, T^k$$

où, quel que soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, $g_k \in \mathscr{A}$. Soit U une partie compacte de B. Soit $u > 0$. Tout élément φ de $\mathscr{B}(U)\langle |T| \leq u\rangle$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \alpha(\varphi)\, T^p + \beta(\varphi),$$

où $\alpha(\varphi)$ désigne un élément de $\mathscr{B}(U)\langle |T| \leq u\rangle$ et $\beta(\varphi)$ un élément de $\mathscr{B}(U)[T]$ de degré strictement inférieur à p. Remarquons, dès à présent, que, quel que soit $\varphi \in \mathscr{B}(U)\langle |T| \leq u\rangle$, nous avons

$$\|\varphi\|_{U,u} = \|\alpha(\varphi)\|_{U,u}\, u^p + \|\beta(\varphi)\|_{U,u}.$$

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$A_{U,u} : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(U)\langle |T| \leq u\rangle & \to & \mathscr{B}(U)\langle |T| \leq u\rangle \\ \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi)\, G + \beta(\varphi) \end{array}.$$

Remarquons que, quel que soit $\varphi \in \mathscr{B}(U)\langle |T| \leq u\rangle$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \|A_{U,u}(\varphi) - \varphi\|_{U,u} & = & \|\alpha(\varphi)\,(G - T^p)\|_{U,u} \\ & \leq & \|\alpha(\varphi)\|_{U,u}\, \|G - T^p\|_{U,u} \\ & \leq & u^{-p}\, \|\varphi\|_{U,u}\, \|G - T^p\|_{U,u} \\ & \leq & u^{-p}\, \|\varphi\|_{U,u} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k\|_U\, u^k\right) \\ & \leq & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k\|_B\, u^{k-p}\right) \|\varphi\|_{U,u} \end{array}$$

Il existe $v > 0$ tel que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k\|_B\, v^{k-p} \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $w \geq v$. On dispose alors de l'inégalité

$$\|A_{U,w} - I\|_{U,w} \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'endomorphisme $A_{U,w} = I + (A_{U,w} - I)$ est inversible.

Soit $F \in \mathscr{B}(U)\langle |\boldsymbol{T}| \leq w\rangle$. Il existe un unique couple (Q, R), avec $Q \in \mathscr{B}(U)\langle |T| \leq w\rangle$ et $R \in \mathscr{B}(U)[T]$ de degré strictement inférieur à p, tel que

$$F = QG + R.$$

Avec les notations précédentes, nous avons $Q = \alpha(A_{U,w}^{-1}(F))$ et $R = \beta(A_{U,w}^{-1}(F))$. Puisque $\|A_{U,w} - I\|_{U,w} \leq 1/2$, nous avons

$$\|A_{U,w}^{-1}\|_{U,w} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} = 2.$$

On en déduit que

$$\|Q\|_{U,w} \leq 2v^{-p}\, \|F\|_{U,w}$$

et que

$$\|R\|_{U,w} \leq 2\, \|F\|_{U,w}.$$

□

Soit $G(T)$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{A}$. Notons $p \in \mathbf{N}$ son degré. Fixons un nombre réel $w > 0$. Soit U une partie compacte de B. Munissons l'algèbre quotient $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ de la semi-norme résiduelle $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$

induite par la norme $\|.\|_{U,w}$ sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$. Par définition, quel que soit F dans $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$, nous avons

$$\|F\|_{U,w,\text{rés}} = \inf\left\{\left\|\sum_{i\in\mathbf{N}} a_i\,T^i\right\|_{U,w},\ \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i\,T^i = F \mod G\right\}.$$

Notons $v_0 > 0$ le nombre réel dont l'existence nous est assurée par le théorème précédent. Nous noterons C_0 la constante associée.

Lemme 5.2.2. — *Pour tout nombre réel $w \geq v_0$ et toute partie compacte U de B, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i) la semi-norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ définie sur le quotient $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ est une norme ;

ii) l'anneau $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ est complet pour la norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$.

Démonstration. — Soient $w \geq v_0$ et U une partie compacte de B. Le théorème 5.2.1 assure que le morphisme naturel

$$\mathscr{B}(U)[T]/(G(T)) \to \mathscr{B}(U)\langle|T| \leq w\rangle/(G(T))$$

est un isomorphisme. Pour montrer que la semi-norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ est une norme sur le quotient $\mathscr{B}(U)\langle|T| \leq w\rangle/(G(T))$, il suffit de montrer que l'idéal (G) est fermé dans l'anneau $\mathscr{B}(U)\langle|T| \leq w\rangle$ pour la norme $\|.\|_{U,w}$. Soit $(H_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{B}(U)\langle|T| \leq w\rangle$ tel que la suite $(F_n = GH_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément F de $\mathscr{B}(U)\langle|T| \leq w\rangle$. D'après le théorème 5.2.1, quels que soient $n, m \geq 0$, nous avons

$$\|F_n - F_m\|_{U,w} \leq C_0\,\|H_n - H_m\|_{U,w}.$$

En particulier, la suite $(H_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathscr{B}(U)\langle|T| \leq w\rangle$. Cet espace étant complet, elle converge vers un élément H. Nous avons alors

$$F = GH \in (G),$$

ce qui montre que l'idéal (G) est fermé. □

Soit U une partie compacte de B. Puisque le polynôme G est unitaire et de degré p, l'application

$$n : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(U)^p & \to & \mathscr{B}(U)[T]/(G(T)) \\ (a_0, \ldots, a_{p-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i\,T^i \end{array}$$

est bijective. Nous noterons encore $\|.\|_U$ la norme définie sur $\mathscr{B}(U)^d$ en prenant le maximum des normes des coefficients. Nous pouvons alors définir une

norme $\|.\|_{U,\mathrm{div}}$ sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ par la formule

$$\|.\|_{U,\mathrm{div}} = \|n^{-1}(.)\|_U.$$

Lemme 5.2.3. — *Pour tout nombre réel $w \geq v_0$ et toute partie compacte U de B, les normes $\|.\|_{U,div}$ et $\|.\|_{U,w,rés}$ définies sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ sont équivalentes. En particulier, quels que soient $w_1, w_2 \geq v_0$, les normes $\|.\|_{U,w_1,rés}$ et $\|.\|_{U,w_2,rés}$ définies sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Soient $w \geq v_0$ et U une partie compacte de B. Soit F un élément de $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$. Notons $(f_0, \ldots, f_{p-1}) = n^{-1}(f)$ et $F_0 = \sum_{i=0}^{p-1} f_i\, T^i$ dans $\mathscr{B}(U)[T]$. L'image de F_0 dans $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ n'est autre que F. Nous avons donc

$$\|F\|_{U,w,\mathrm{rés}} \leq \|F_0\|_{U,w} \leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} w^i\right) \|F\|_{U,\mathrm{div}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un élément F_1 de $\mathscr{B}(U)[T]$ d'image F dans $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ tel que l'on ait

$$\|F_1\|_{U,w} \leq \|F\|_{U,w,\mathrm{rés}} + \varepsilon.$$

Observons que le reste de la division euclidienne de F_1 par G est égal à F_0. D'après le théorème de division de Weierstraß 5.2.1, nous avons donc

$$\|F_0\|_{U,w} \leq C_0\, \|F_1\|_{U,w} \leq C_0\, (\|F\|_{U,w,\mathrm{rés}} + \varepsilon).$$

On en déduit que

$$\|F\|_{U,\mathrm{div}} \leq \max_{1 \leq i \leq p-1} (r^{-i})\, \|F_0\|_{U,w} \leq \max_{1 \leq i \leq p-1} (r^{-i})\, C_0\, (\|F\|_{U,w,\mathrm{rés}} + \varepsilon).$$

On obtient le résultat souhaité en faisant tendre ε vers 0. □

Il existe des éléments $g_0, \ldots, g_{p-1}$ de $\mathscr{A}$ tels que l'on ait

$$G = T^p + \sum_{k=0}^{p-1} g_k\, T^k \text{ dans } \mathscr{A}[T].$$

Posons

$$v_1 = \max_{1 \leq k \leq d} (\|g_k\|^{1/(d-k)}).$$

Soit b un point de B. Nous noterons $G(b)[T]$ l'image du polynôme $G(T)$ dans l'anneau $\mathscr{H}(b)[T]$. Rappelons que, d'après la proposition 3.1.2.1 de [**5**] l'ensemble des points de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(b)}$ en lesquels le polynôme $G(b)[T]$ s'annule est contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon v_1.

Posons $v = \max(v_0, v_1)$. Soit $w \geq v$. D'après le lemme 5.2.2, la semi-norme $\|.\|_{B,w,\text{rés}}$ définie sur le quotient $\mathscr{Q}_w = \mathscr{A}[T]/(G(T))$ est une norme qui rend cet anneau complet. Sa définition nous assure que le morphisme naturel

$$\mathscr{A} \to \mathscr{Q}_w$$

est borné. Notons

$$\varphi_w : C_w \to B$$

le morphisme induit entre les spectres analytiques. Remarquons que le morphisme surjectif $\mathscr{A}[T] \to \mathscr{Q}_w$ induit un plongement

$$C_w \hookrightarrow \mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}}$$

Nous identifierons dorénavant C_w à son image par ce plongement. Elle est contenue dans le lieu d'annulation du polynôme G sur la droite $\mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}}$. Puisque $w \geq v_1$, nous avons même égalité :

$$C_w = \left\{ x \in \mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}} \;\middle|\; G(x) = 0 \right\}.$$

Soit U une partie compacte de B. Nous noterons $\mathscr{Q}_{U,w}$ l'anneau de Banach $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ muni de la norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$. Le morphisme naturel

$$\mathscr{Q}_w \to \mathscr{Q}_{U,w}$$

est borné et l'image de l'anneau total des fractions de $\mathscr{Q}_w$ est dense dans $\mathscr{Q}_{U,w}$. Le morphisme

$$\mathcal{M}(\mathscr{Q}_{U,w}) \to C_w$$

induit entre les spectres analytiques est donc injectif et nous identifierons dorénavant l'espace $\mathcal{M}(\mathscr{Q}_{U,w})$ à son image dans C_w.

Lemme 5.2.4. — *Soit $w \geq v$. Soit U une partie compacte et spectralement convexe de B. Alors*

$$\mathcal{M}(\mathscr{Q}_{U,w}) = \varphi_w^{-1}(U) = \left\{ x \in \mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}} \;\middle|\; \pi(x) \in U,\, G(x) = 0 \right\},$$

où π désigne la projection naturelle de $\mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}}$ sur B.

Démonstration. — L'inclusion $\mathcal{M}(\mathscr{Q}_{U,w}) \supset \varphi_w^{-1}(U)$ est évidente. Réciproquement, la partie compacte U est supposée spectralement convexe. Par définition, cela signifie que $\mathcal{M}(\mathscr{B}(U)) = U$. On en déduit que $\mathcal{M}(\mathscr{Q}_{U,w})$ est contenu dans $\pi^{-1}(U)$. En outre, en tout point x de $\mathcal{M}(\mathscr{Q}_{U,w})$, nous avons $G(x) = 0$. On en déduit le résultat attendu. □

Nous allons, à présent, démontrer un résultat permettant d'assurer que les normes de la forme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ sont uniformes. À cet effet, nous introduisons une condition technique. Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans un anneau A, nous notons $\text{Rés}(P,Q) \in A$ le résultant des polynômes P et Q.

Définition 5.2.5. — *Soit U une partie compacte de B. On dit que U vérifie la* **condition (R_G)** *si elle est spectralement convexe et s'il existe un sous-ensemble Γ_U de U vérifiant les propriétés suivantes :*

i) tout élément de $\mathscr{B}(U)$ atteint son maximum sur Γ_U ;

ii) la fonction $Rés(G,G')$ est bornée inférieurement sur Γ_U par un nombre réel $m_U > 0$.

En pratique, nous utiliserons cette définition dans les deux cas suivants :

1. la fonction $\text{Rés}(G,G')$ ne s'annule pas sur U ;
2. l'ensemble Γ_U peut être choisi fini et hors du lieu d'annulation de $\text{Rés}(G,G')$.

Lemme 5.2.6. — *Soient $(k,|.|)$ un corps valué complet. Choisissons une clôture algébrique $\bar{k}$ de k et notons encore $|.|$ l'unique valeur absolue sur $\bar{k}$ qui prolonge celle définie sur k. Soit $d \in \mathbf{N}$ un entier, g un polynôme à coefficients dans k, de degré d, unitaire et séparable. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ les racines de g dans $\bar{k}$. Soit un nombre réel r vérifiant*

$$r \geq \max_{1 \leq i \leq d}(|\alpha_i|).$$

Posons

$$D = \frac{d(2r)^{d^2-d}}{|Rés(g,g')|}.$$

Alors, quel que soit $f = \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i$ dans $k[T]$, nous avons

$$\sum_{i=0}^{d-1} |a_i|\, r^i \leq D \max_{1 \leq i \leq d}(|f(\alpha_i)|).$$

Démonstration. — Puisque le polynôme g est séparable, les éléments α_i, avec $i \in [\![1,d]\!]$, sont deux à deux distincts. D'après la formule d'interpolation de Lagrange, dans l'anneau $\bar{k}[T]$, nous avons donc

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{j=1}^{d} f(\alpha_j) \prod_{i \neq j} \frac{T-\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{d} \prod_{i \neq j}(\alpha_j - \alpha_i)} \sum_{j=1}^{d} f(\alpha_j) \left(\prod_{k \neq j} \prod_{l \neq k} (\alpha_k - \alpha_l) \right) \prod_{i \neq j} (T - \alpha_i). \end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé. □

Proposition 5.2.7. — *Pour tout nombre réel $w \geq v$ et toute partie compacte U de B qui vérifie la condition (R_G), la semi-norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ est une norme uniforme sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$.*

Démonstration. — Soit $w \geq v$. Soit U une partie compacte de B qui vérifie la condition (R_G). Nous reprenons les notations de la définition 5.2.5. Le lemme 5.2.2 nous assure que la semi-norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ est une norme sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$. Notons $\|.\|_\infty$ la norme spectrale associée. Le lemme 5.2.4 nous fournit une description explicite de cette norme en termes de norme uniforme sur une partie de la droite $\mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}}$. Pour montrer que les deux normes sont équivalentes, il suffit de montrer qu'il existe une constante $D \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout élément F de $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$, nous avons

$$\|F\|_{U,w,\text{rés}} \leq D\,\|F\|_\infty.$$

Soit F un élément de $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$. Puisque le polynôme G est unitaire et de degré p, l'élément F possède un unique représentant dans $\mathscr{B}(U)[T]$ de la forme

$$F_0(T) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\,T^k,$$

avec $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathscr{B}(U)$.

Soit b un point de Γ_U. Le résultant des polynômes $G(b)(T)$ et $G'(b)(T)$ n'est autre que l'image $\text{Rés}(G, G')(b)$ de $\text{Rés}(G, G')$ dans $\mathscr{H}(b)$. Il suffit, pour s'en convaincre, d'utiliser la définition du résultant comme déterminant de la matrice de Sylvester. Par hypothèse, l'élément $\text{Rés}(G, G')(b)$ de $\mathscr{H}(b)$ n'est pas nul et le polynôme $G(b)(T)$ est donc séparable. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines dans une clôture algébrique de $\mathscr{H}(b)$. Lorsque l'on immerge naturellement la fibre $\varphi^{-1}(b)$ dans la droite analytique $\mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{H}(b)}$, l'image est exactement composée des points rigides qui correspondent aux classes de conjugaison sous l'action du groupe de Galois des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. En particulier, nous avons

$$\max_{1\leq k\leq d}(|F_0(\alpha_j)|) = \max_{x\in\varphi^{-1}(b)}(|F(x)|) \leq \|F\|_\infty.$$

Remarquons, à présent, que, d'après [**5**], proposition 3.1.2.1 , nous avons

$$\max_{1\leq k\leq p}(|\alpha_k|) \leq v_1 \leq w.$$

D'après le lemme 5.2.6, nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} |a_k(b)|\,w^k \leq \frac{p(2w)^{p^2-p}}{|\text{Rés}(G(b), G(b)')|}\,\|F\|_\infty \leq \frac{p(2w)^{p^2-p}}{m_U}\,\|F\|_\infty.$$

Pour tout indice $j \in [\![1, p-1]\!]$, choisissons un point b_j de Γ_U tel que

$$|a_j(b_j)| = \max_{b \in U}(|a_j(b)|).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|F\|_{U,w,\text{rés}} &\leq \|F_0\|_{U,w} \\
&\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|a_k\|_U \, w^k \\
&\leq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(b_j)| \, w^k \\
&\leq \frac{p^2 (2w)^{p^2-p}}{m_U} \, \|F\|_\infty .
\end{aligned}$$

On en déduit que la norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ est uniforme. □

5.3. Un exemple

Gardons les notations de la section précédente. Fixons un nombre réel $w \geq v$. Nous le conserverons tout au long de cette section et nous autoriserons donc à supprimer la lettre w placée en indice, lorsque cela ne prête pas à confusion. Nous nous intéresserons, ici, au morphisme

$$\varphi : C \to B$$

induit par le morphisme

$$\mathscr{A} \to \mathscr{A}[T]/(G(T)) = \mathscr{Q}$$

et, plus particulièrement, au faisceau $\varphi_* \mathscr{O}_C$. Nous montrerons que, sous certaines hypothèses, c'est un faisceau de $\mathscr{O}_B$-modules libre, comme dans le cadre classique.

Commençons par montrer que le morphisme φ est un morphisme topologique fini, au sens de la définition 5.1.1.

Lemme 5.3.1. — *Le morphisme φ est un morphisme topologique fini.*

Démonstration. — Le fait que le morphisme φ soit continu est immédiat. Puisque l'espace C est compact, on en déduit aussitôt que le morphisme φ est également fermé.

Pour finir, montrons que les fibres du morphisme φ sont finies. Soit b un point de B. La fibre $\varphi^{-1}(b)$ est constituée de l'ensemble des éléments du disque de centre 0 et de rayon w de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(b)}$ en lesquels le polynôme $G(b)$ s'annule. Puisque ce polynôme est unitaire, il n'est pas nul et l'ensemble $\varphi^{-1}(b)$ est fini. □

Soit b un point de B. Notons $c_1, \ldots, c_r$, avec $r \in \mathbf{N}^*$, ses antécédents par le morphisme φ. Nous supposerons qu'il existe un sytème fondamental $\mathscr{R}$ de voisinages de b dans B formé de parties compactes qui vérifient la condition (R_G).

Soient U un élément de $\mathscr{R}$. Nous allons construire un morphisme

$$\psi_U : \mathscr{B}(U)[T]/(G(T)) \to \mathscr{B}(\varphi^{-1}(U)).$$

Rappelons que l'anneau $\mathscr{B}(\varphi^{-1}(U))$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathscr{C}(\varphi^{-1}(U))$ des fonctions

$$f : \varphi^{-1}(U) \to \bigsqcup_{x \in \varphi^{-1}(U)} \mathscr{H}(x)$$

qui vérifient $f(x) \in \mathscr{H}(x)$, quel que soit $x \in \varphi^{-1}(U)$. D'après le lemme 5.2.4, nous avons

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))) = \varphi^{-1}(U).$$

Cette remarque nous permet de construire un morphisme

$$\psi_{U,c} : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(U)[T]/(G(T)) & \to & \mathscr{C}(\varphi^{-1}(U)) \\ F & \mapsto & (x \in \varphi^{-1}(U) \mapsto F(x) \in \mathscr{H}(x)) \end{array}.$$

Lemme 5.3.2. — *L'image du morphisme $\psi_{U,c}$ est contenue dans $\mathscr{B}(\varphi^{-1}(U))$.*

Démonstration. — Soit F un élément de $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$. D'après le théorème 5.2.1, il existe un élément

$$F_0 = \sum_{k=0}^{p-1} f_i\, T^k \in \mathscr{B}(U)[T]$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) $F = F_0$ dans $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$;

ii) $\|F_0\|_{U,w} \leq C\, \|F\|_{U,w,\text{rés}}$.

Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Par définition de $\mathscr{B}(U)$, il existe une suite $(p_{k,n})_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ et une suite $(q_{k,n})_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ ne s'annulant pas sur U telles que la suite $(p_{k,n}/q_{k,n})_{n\geq 0}$ converge vers f_k dans $\mathscr{B}(U)$ pour la norme $\|.\|_U$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, posons

$$P_n = \frac{1}{\displaystyle\prod_{0\leq k\leq p-1} q_{k,n}} \sum_{k=0}^{p-1} p_{k,n} \left(\prod_{l\neq k} q_{l,n} \right) T^k \in \mathscr{K}(U)[T].$$

Son image modulo $G(T)$ définit un élément de $\mathscr{K}(\varphi^{-1}(U))$, que nous noterons Q_n. Quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et quel que soit $x \in \varphi^{-1}(U)$, nous avons

$$\begin{aligned} |Q_n(x) - F_x| &= |P_n(x) - F_0(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{p_{k,n}(x)}{q_{k,n}(x)} - f_k(x) \right| |T^k(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \frac{p_{k,n}}{q_{k,n}} - f_k \right\|_U \|T\|^k_{\varphi^{-1}(U)}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{K}(\varphi^{-1}(U))$ converge vers l'élément $\psi_{U,c}(F)$ pour la norme $\|.\|_{\varphi^{-1}(U)}$. Par conséquent, l'élément $\psi_{U,c}(F)$ appartient à $\mathscr{B}(\varphi^{-1}(U))$.

□

Notons

$$\psi_U : \mathscr{B}(U)[T]/(G(T)) \to \mathscr{B}(\varphi^{-1}(U))$$

le morphisme déduit de $\psi_{U,c}$ par corestriction.

Proposition 5.3.3. — *Le morphisme ψ_U est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition 5.2.7, la norme $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$ définie sur $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$ est équivalente à sa norme spectrale et, d'après le lemme 5.2.4, cette norme spectrale n'est autre que la norme uniforme sur $\varphi^{-1}(U)$. Le caractère injectif du morphisme s'en déduit aussitôt.

Soit F un élément de $\mathscr{B}(\varphi^{-1}(U))$. Par définition, il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{Q}$ et une suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{Q}$ ne s'annulant pas sur $\varphi^{-1}(U)$ telles que la suite $(P_n/Q_n)_{n\geq 0}$ converge vers F pour $\|.\|_{U,w,\text{rés}}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $P_{U,n}$ et $Q_{U,n}$ les images respectives de P_n et Q_n dans $\mathscr{Q}_U$. Par hypothèse, l'élément $Q_{U,n}$ ne s'annule pas sur $\varphi^{-1}(U) = \mathcal{M}(\mathscr{Q}_U)$. D'après le corollaire 1.2.4 de [**2**], il est donc inversible dans $\mathscr{Q}_U$. La suite $(P_{U,n}Q_{U,n}^{-1})_{n\geq 0}$ de $\mathscr{Q}_U$ est de Cauchy dans $\mathscr{Q}_U$. Elle converge donc vers un élément de $\mathscr{Q}_U$ dont l'image par le morphisme ψ_U est l'élément F dont nous sommes partis. □

Nous disposons donc, à présent, d'un isomorphisme

$$\psi_b : \varinjlim_{U\in\mathscr{R}} \mathscr{B}(U)[T]/(G(T)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{U\in\mathscr{R}} \mathscr{B}(\varphi^{-1}(U)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \mathscr{B}(\varphi^{-1}(U)),$$

où $\mathscr{U}$ désigne l'ensemble des voisinages du point b dans B. En effet, la première flèche est un isomorphisme en vertu de la proposition qui précède et la seconde grâce au fait que l'ensemble $\mathscr{R}$ est, par hypothèse, cofinal dans $\mathscr{U}$.

Pour tout élément U de $\mathscr{U}$, la partie $\varphi^{-1}(U)$ est un voisinage de la fibre $\varphi^{-1}(b)$ dans C. Nous disposons donc d'un morphisme de restriction

$$\chi_b : \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \mathscr{B}(\varphi^{-1}(U)) \to \prod_{i=1}^{r} \mathscr{O}_{C,c_i}.$$

Lemme 5.3.4. — *Le morphisme χ_b est injectif.*

Démonstration. — Ce résultat découle directement du lemme 5.1.2. □

Intéressons-nous, à présent, à la surjectivité du morphisme χ_b. Pour cela, il nous faut introduire une nouvelle condition. Rappelons que, pour tout point b de B, nous notons $\kappa(b) = \mathscr{O}_{B,b}/\mathfrak{m}_b$ le corps résiduel du point b et que le corps $\mathscr{H}(b)$ est son complété pour la valeur absolue associée à b.

Définition 5.3.5. — *On dit qu'un point b de B satisfait la* **condition (I_G)** *si tout facteur irréductible dans $\kappa(b)[T]$ du polynôme $G(T)$ reste irréductible dans $\mathscr{H}(b)[T]$.*

Nous supposerons désormais que le point b satisfait la condition (I_G). Remarquons que tel est toujours le cas si le polynôme $G(b)(T)$ est irréductible (ou, de manière équivalente, si $r = 1$). Dans l'anneau $\mathscr{H}(b)[T]$, écrivons l'image du polynôme $G(T)$ sous la forme

$$G(b)(T) = \prod_{i=1}^{r} h_i(T)^{n_i},$$

où r est un entier strictement positif, $h_1, \ldots, h_r$ sont des polynômes irréductibles et unitaires à coefficients dans $\mathscr{H}(b)$ et $n_1, \ldots, n_r$ des entiers strictement positifs. Les points $c_1, \ldots, c_r$ de C sont donc les points de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(b)}$ définis par l'annulation des polynômes $h_1, \ldots, h_r$. Quitte à changer l'ordre des polynômes, nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in [\![1, r]\!]$, le point c_i est défini par l'équation $h_i = 0$.

La condition (I_G) assure que la décomposition en produits de facteurs irréductibles du polynôme $G(T)$ dans $\kappa(b)[T]$ et dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est identique. On en déduit que, quel que soit $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme h_i est à coefficients dans $\kappa(b)$. D'après la proposition 2.5.1, l'anneau local $\mathscr{O}_{B,b}$ est hensélien. Par conséquent, il existe des polynômes $H_1, \ldots, H_r$ unitaires à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $G = \prod_{i=1}^{r} H_i$ dans $\mathscr{O}_{B,b}[T]$;
2. quel que soit $i \in [\![1, r]\!]$, nous avons $H_i(b) = h_i^{n_i}$ dans $\mathscr{H}(b)[T]$.

Lemme 5.3.6. — *Il existe un voisinage W_1 de c_1 dans C, ..., un voisinage W_r de c_r dans C tels que, quel que soit $j \in [\![1, r]\!]$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $F_{j,\varepsilon} \in \mathscr{K}(W)$, avec*

$$W = \bigcup_{1 \leq i \leq r} W_i$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\|F_{j,\varepsilon} - 1\|_{W_j} \leq \varepsilon$;
ii) quel que soit $i \neq j$, $\|F_{j,\varepsilon}\|_{W_i} \leq \varepsilon$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le résultat indépendamment pour chacun des indices $j \in [\![1, r]\!]$. Le résultat attendu s'en déduit en considérant, pour chaque indice $i \in [\![1, r]\!]$, l'intersection des ouverts W_i construits et en restreignant les fonctions $F_{j,\varepsilon}$.

Soit $j \in [\![1, r]\!]$. Il existe un voisinage V de b dans B tel que les fonctions $H_1, \ldots, H_r$ appartiennent à $\mathscr{B}(V)[T]$. Choisissons des voisinages compacts W_1 de c_1, ..., W_r de c_r dans $\varphi^{-1}(V)$, deux à deux disjoints. Quitte à restreindre ces voisinages, nous pouvons supposer que, quel que soit $k \in [\![1, r]\!]$, la fonction H_k ne s'annule pas sur la partie compacte W_i, pour $i \neq k$. Il existe alors deux nombres réels $m, M > 0$ tels que, quel que soit $k \in [\![1, r]\!]$ et quel que soit $i \neq k$, nous ayons

$$m < \min_{x \in W_i} (|H_k(x)|) \leq \|H_k\|_{W_i} < M.$$

Remarquons que nous pouvons restreindre les voisinages W_i, avec $i \in [\![1, r]\!]$, sans changer les valeurs des constantes m et M. En particulier, nous pouvons supposer que nous avons

$$\|H_j\|_{W_j} < \frac{1}{2}\, m^{r-1}$$

et, quel que soit $i \neq j$,

$$\|H_i\|_{W_i} < \frac{1}{2}\, m M^{2-r}.$$

Par densité de $\mathscr{K}(W)$ dans $\mathscr{B}(W) \supset \mathscr{B}(V)[T]$, nous pouvons supposer qu'il existe des éléments $K_1, \ldots, K_r$ de $\mathscr{K}(W)$ qui vérifient les mêmes inégalités que $H_1, \ldots, H_r$.

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrons que la fonction $D_N = K_j^N + \prod_{i \neq j} K_i^N$ ne s'annule pas sur W. Sur W_j, tout d'abord, nous avons

$$\min_{x \in W_j} \left(\prod_{i \neq j} |K_i^N(x)| \right) \geq \prod_{i \neq j} \min_{x \in W_j} (|K_i(x)|^N) \geq m^{N(r-1)}$$

et

$$\|K_j^N\|_{W_j} \leq 2^{-N} m^{N(r-1)}.$$

On en déduit que

$$\min_{x \in W_j} (|D_N(x)|) \geq (1 - 2^{-N}) m^{N(r-1)} \geq \frac{m^{N(r-1)}}{2}.$$

Soit $i \neq j$. Nous avons

$$\min_{x \in W_i} (|K_j^N(x)|) \geq m^N$$

et

$$\left\| K_i^N \prod_{k \neq i,j} K_k^N \right\|_{W_i} \leq 2^{-N}\, m^N M^{N(2-r)} M^{N(r-2)} \leq 2^{-N}\, m^N.$$

On en déduit que

$$\min_{x \in W_i} (|D_N(x)|) \geq (1 - 2^{-N}) m^N \geq \frac{m^N}{2}.$$

En particulier, l'élément D_N de $\mathscr{K}(W)$ est inversible.

Considérons l'élément $F_N = D_N^{-1} \prod_{i \neq j} K_i^N$ de $\mathscr{K}(W)$. Il vérifie

$$\|F_N - 1\|_{W_j} = \|D_N^{-1} K_j^N\|_{W_j} \leq 2m^{-N(r-1)} 2^{-N} m^{N(r-1)} \leq 2^{1-N}$$

et, quel que soit $i \neq j$,

$$\|F_N\|_{W_i} \leq 2m^{-N} 2^{-N} m^N M^{N(2-r)} M^{N(r-2)} \leq 2^{1-N}.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, quitte à choisir un nombre entier N assez grand, l'élément F_N vérifie les propriétés demandées. □

Lemme 5.3.7. — *Le morphisme χ_b est surjectif.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que, quel que soit $i \in [\![1, r]\!]$ et quel que soit f dans $\mathscr{O}_{C,c_i}$, il existe un élément F de $\varinjlim_{U \in \mathscr{U}} \mathscr{B}(\varphi^{-1}(U))$ dont l'image dans $\mathscr{O}_{C,c_i}$ est égale à f et l'image dans $\mathscr{O}_{C,c_j}$, pour tout $j \neq i$, est nulle.

Soient $i \in [\![1, r]\!]$ et $f \in \mathscr{O}_{C,c_i}$. Il existe un voisinage V_i de c_i dans C sur lequel la fonction f est définie. Quitte à restreindre ce voisinage, nous pouvons supposer qu'il existe une suite $(p_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{Q}$ et une suite $(q_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{Q}$ qui ne s'annulent pas sur V_i tels que la suite $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ converge vers f pour la norme $\|.\|_{V_i}$.

Nous reprenons, à présent, les notations du lemme précédent. Quitte à restreindre le voisinage V_i, nous pouvons supposer qu'il est compact et contenu dans W_i. Nous noterons

$$V = V_i \cup \left(\bigcup_{j \neq i} W_j \right).$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, quel que soit x dans V_i, nous ayons $|q_n(x)| > m$ et un nombre réel $M \geq m$ tel que $\|p_n\|_V \leq M$ et $\|q_n\|_V \leq M$. Posons

$$\lambda_n = \frac{m}{2^n (r+1) M} \leq \frac{1}{r+1} \text{ et } \mu_n = \frac{\lambda_n}{M} \leq \frac{1}{M(r+1)}.$$

Considérons l'élément de $\mathscr{K}(V)$ défini par

$$Q_n = F_{i,\mu_n} q_n + \sum_{j \neq i} F_{j,\lambda_n}.$$

Montrons qu'il ne s'annule pas sur W. Quel que soit $x \in V_i$, nous avons

$$|Q_n(x)| \geq |F_{i,\mu_n}(x) q_n(x)| - \sum_{j \neq i} |F_{j,\lambda_n}(x)| \geq 1 - \frac{r}{r+1} \geq \frac{1}{r+1}.$$

Soit $j \neq i$. Quel que soit $x \in W_j$, nous avons

$$|Q_n(x)| \geq |F_{j,\lambda_n}(x)| - |F_{i,\mu_n}(x)q_n(x)| - \sum_{k\neq i,j} |F_{k,\lambda_n}(x)| \geq \frac{1}{r+1}.$$

On en déduit que Q_n est inversible dans $\mathscr{K}(V)$. Considérons, à présent, l'élément de $\mathscr{K}(V)$ défini par

$$R_n = F_{i,\mu_n} p_n Q_n^{-1}.$$

Quel que soit $j \neq i$, nous avons

$$\|R_n\|_{W_j} \leq \frac{m}{2^n M^2(r+1)} M(r+1) \leq \frac{m}{2^n M} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Au-dessus de V_i, nous avons

$$R_n - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{Q_n q_n}(F_{i,\mu_n} q_n - Q_n) = \frac{p_n}{Q_n q_n} \sum_{j\neq i} F_{j,\lambda_n}.$$

On en déduit que

$$\left\| R_n - \frac{p_n}{q_n} \right\|_{V_i} \leq \frac{M(r+1)}{m} \frac{(r-1)m}{2^n(r+1)M} \leq \frac{r-1}{2^n}.$$

On déduit de ces inégalités que la suite $(R_n)_{n\geq 0}$ converge pour la norme $\|.\|_V$ vers la fonction qui coïncide avec f sur V_i et qui est nulle sur W_j, quel que soit $j \neq i$. □

Venons-en, maintenant, à la description de l'anneau local $(\varphi_* \mathscr{O}_C)_b$. Il nous suffit pour cela de regrouper les résultats obtenus précédemment.

Théorème 5.3.8. — *Soit b un point de B. Supposons que le point b vérifie la condition (I_G) et possède un système fondamental de voisinages compacts qui satisfont la condition (R_G). Alors le morphisme*

$$\alpha_b : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{B,b}^p & \to & (\varphi_* \mathscr{O}_C)_b \\ (a_0, \ldots, a_{p-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i T^i \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{O}_{B,b}$-modules.

Démonstration. — Notons

$$\beta_b : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{B,b}^p & \to & \mathscr{O}_{B,b}[T]/(G(T)) \\ (a_0, \ldots, a_{p-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i T^i \end{array}.$$

C'est un isomorphisme, car le polynôme $G(T)$ est unitaire et de degré p.

Notons γ_b le morphisme naturel

$$\gamma_b : \mathscr{O}_{B,b}[T]/(G(T)) \to \varinjlim_{U \in \mathscr{R}} \mathscr{B}(U)[T]/(G(T)).$$

Il est bien défini car $\mathscr{R}$ est, par hypothèse, un système fondamental de voisinages du point b dans B et c'est également un isomorphisme.

Notons δ_b le morphisme induit par la restriction

$$\delta_b : \prod_{i=1}^{r} \mathscr{O}_{C,c_i} \to (\varphi_* \mathscr{O}_C)_b.$$

D'après le théorème 5.1.4, c'est encore un isomorphisme.

Avec les notations précédentes, le morphisme α_b se décompose de la façon suivante :

$$\alpha_b = \delta_b \circ \chi_b \circ \psi_b \circ \gamma_b \circ \beta_b.$$

Nous avons démontré plus haut que les morphismes χ_b et ψ_b sont des isomorphismes. On en déduit le résultat attendu.

□

Nous tirons immédiatement les conséquences de ce résultat en termes globaux.

Corollaire 5.3.9. — *Supposons que tout point de B vérifie la condition (I_G) et possède un système fondamental de voisinages compacts qui satisfont la condition (R_G). Alors, le morphisme*

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_B^p & \to & \varphi_* \mathscr{O}_C \\ (a_0, \ldots, a_{p-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i T^i \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{O}_B$-modules. En particulier, pour toute partie V de B, le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_B(V)[T]/(G(T)) \to \mathscr{O}_C(\varphi^{-1}(V))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La première partie du résultat découle immédiatement du théorème précédent. On en déduit que, pour toute partie V de B, le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_B(V)[T]/(G(T)) \to (\varphi_* \mathscr{O}_C)(V)$$

est un isomorphisme. Il nous reste à remarquer que le morphisme naturel

$$(\varphi_* \mathscr{O}_C)(V) = \varinjlim_{\substack{U \supset V \\ U \text{ ouvert}}} \mathscr{O}_C(\varphi^{-1}(U)) \to \varinjlim_{\substack{W \supset \varphi^{-1}(V) \\ W \text{ ouvert}}} \mathscr{O}_C(W) = \mathscr{O}_C(\varphi^{-1}(V))$$

est un isomorphisme. En effet, d'après le lemme 5.3.1, le morphisme φ est un morphisme topologique fini. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 5.1.3. □

Corollaire 5.3.10. — *Supposons que tout point de B vérifie la condition (I_G) et possède un système fondamental de voisinages compacts qui satisfont la condition (R_G). Supposons que le faisceau $\mathscr{O}_B$ est cohérent. Pour toute partie V de B, nous noterons*

$$\varphi_V : \varphi^{-1}(V) \to V$$

le morphisme déduit de φ par restriction et corestriction. Alors, pour toute partie V de B et tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $\varphi^{-1}(V)$, le faisceau $(\varphi_V)_*\mathscr{F}$ est cohérent.

Démonstration. — D'après le corollaire 5.3.9, le faisceau $\varphi_*\mathscr{O}_C$ est isomorphe au faisceau $\mathscr{O}_B^p$. C'est donc un faisceau cohérent. Soient V une partie de B et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur $\varphi^{-1}(V)$. Soit b un point de V. Notons $c_1, \ldots, c_r$, avec $r \in \mathbf{N}$, ses antécédents par le morphisme φ. Ils sont en nombre fini, d'après le lemme 5.3.1. Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Il existe un voisinage U_i du point c_i dans $\varphi^{-1}(V)$, des entiers p_i et q_i et une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_{U_i}^{p_i} \to \mathscr{O}_{U_i}^{q_i} \to \mathscr{F}_{U_i} \to 0.$$

Nous pouvons supposer que les entiers p_i, avec $i \in [\![1, r]\!]$, sont égaux à un même entier p, que les entiers q_i, avec $i \in [\![1, r]\!]$ sont égaux à même entier q et que les voisinages U_i, avec $i \in [\![1, r]\!]$, sont deux à deux disjoints. Notons U leur réunion. D'après le lemme 5.1.2, quitte à restreindre encore les voisinages U_i, nous pouvons supposer que la partie U est de la forme $\varphi^{-1}(W)$, où W est un voisinage du point b dans V. Nous pouvons regrouper les suites précédentes en une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_U^p \to \mathscr{O}_U^q \to \mathscr{F}_U \to 0.$$

D'après le théorème 5.1.5, la suite

$$0 \to ((\varphi_W)_*\mathscr{O}_U)^p \to ((\varphi_W)_*\mathscr{O}_U)^q \to (\varphi_W)_*\mathscr{F}_U \to 0$$

est encore exacte. D'après le corollaire 5.1.3, le faisceau $(\varphi_W)_*\mathscr{O}_U$ est la restriction à W du faisceau $\varphi_*\mathscr{O}_C$. C'est donc un faisceau cohérent. On en déduit que le faisceau $(\varphi_W)_*\mathscr{F}_U$, qui n'est autre que la restriction à W du faisceau $(\varphi_V)_*\mathscr{F}$, d'après le même corollaire, est cohérent. Par conséquent, le faisceau $(\varphi_V)_*\mathscr{F}$ est cohérent. □

5.4. Théorème de division de Weierstraß en un point rigide

Le théorème de division de Weierstraß 2.2.3 que nous avons démontré généralise le théorème classique sur $\mathbf{C}$ et permet de décrire l'anneau local au voisinage du point 0 d'une fibre. En géométrie analytique complexe, il est toujours possible de se ramener à ce cas à l'aide d'une translation. Sur une base quelconque, en revanche, un tel artifice est impossible. Nous allons cependant montrer ici que l'étude des morphismes finis que nous avons entreprise permet d'obtenir un théorème de division de Weierstraß pour les points rigides des fibres.

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach uniforme. Nous notons $B = \mathcal{M}(\mathscr{A})$, $X = \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ (avec variable T) et $\pi : X \to B$ le morphisme de projection. Soit $s > 0$. Considérons l'algèbre $\mathscr{A}\langle |T| \leq s\rangle$ munie de la norme $\|.\|_s$. Nous noterons $\mathscr{A}_s$ son complété pour la norme uniforme sur son spectre analytique. Le morphisme $\mathscr{A}[T] \to \mathscr{A}_s$ induit une application continue et injective

$$\mathcal{M}(\mathscr{A}_s) \hookrightarrow \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$$

dont l'image est le disque fermé $\overline{D}(s)$. Nous identifierons dorénavant le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathscr{A}_s)$ à ce disque.

Définition 5.4.1. — *Soient b un point de B et $P(T)$ un polynôme à coefficients dans $\mathscr{A}$ unitaire dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est irréductible. On dit que le point b satisfait la* **condition (S_P)** *s'il existe un nombre réel $s > 0$ et un système fondamental $\mathscr{U}_{b,P}$ de voisinages compacts et spectralement convexes de b dans B tel que, quel que soient $U \in \mathscr{U}_{b,P}$ et $r \in]0, s]$, la partie compacte $\overline{D}_U(r)$ de $\mathcal{M}(\mathscr{A}_s)$ vérifie la condition $(R_{P(S)-T})$.*

On dit qu'un point b de B satisfait la **condition (S)** *si, pour tout polynôme unitaire $P(T)$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$ dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est irréductible, il existe un voisinage compact et spectralement convexe V du point b dans B sur lequel le polynôme $P(T)$ est défini et tel que le point b de $\mathcal{M}(\mathscr{B}(V))$ satisfasse la condition (S_P).*

Remarque 5.4.2. — D'après la proposition 1.2.16, si U désigne une partie compacte et spectralement convexe de B et r et s deux nombres réels vérifiant $0 < r \leq s$, alors la partie compacte $\overline{D}_U(r)$ de $\mathcal{M}(\mathscr{A}_s)$ est spectralement convexe.

Soient b un point de B et $P(T)$ un polynôme à coefficients dans $\mathscr{A}$ unitaire et dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est irréductible. Nous noterons y l'unique point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $P = 0$. Nous allons décrire l'anneau local

de la droite analytique en ce point en nous ramenant à la situation décrite dans les sections qui précèdent. Pour cela, nous supposerons que le point b vérifie la condition (S_P).

La condition (S_P) assure qu'il existe un nombre réel strictement positif s et un système fondamental $\mathscr{U}_{b,P}$ de voisinages compacts et spectralement convexes de b dans B tel que, quel que soient $U \in \mathscr{U}_{b,P}$ et $r \in]0, s]$, la partie compacte $\overline{D}_U(r)$ de $\mathcal{M}(\mathscr{A}_s)$ vérifie la condition $(R_{P(S)-T})$. Soit U un élément de $\mathscr{U}_{b,P}$. Considérons l'algèbre de Banach $\mathscr{A}' = \mathscr{B}(\overline{D}_U(s))$ et munissons-la de sa norme uniforme $\|.\|'$. Notons B' son spectre analytique. Considérons le nombre réel $v > 0$ dont l'existence est démontrée dans la section 5.2 pour l'algèbre $\mathscr{A}'$ et le polynôme $P(S)-T$ de $\mathscr{A}'[S]$. Choisissons un nombre réel $v' > v$. Notons $x \in B'$ le point de la fibre au-dessus de b défini par l'équation $T = 0$. Nous avons un isomorphisme $\mathscr{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(x)$. Par hypothèse, la partie B' vérifie la condition $(R_{P(S)-T})$. Par conséquent, d'après la proposition 5.2.7, la semi-norme $\|.\|'_{B',v',\text{rés}}$ définie sur le quotient $\mathscr{A}'[S]/(P(S) - T)$ est une norme uniforme. Notons C' le spectre analytique de $\mathscr{A}'[S]/(P(S) - T)$ et $\varphi' : C' \to B'$ le morphisme naturel. Puisque le polynôme $P(S)$ est irréductible dans $\mathscr{H}(x)[S]$, la fibre ${\varphi'}^{-1}(x)$ ne comporte qu'un seul point. C'est le point rigide de la fibre au-dessus de b de l'espace affine de dimension 2 associé à l'idéal maximal $(P(S), T)$. Nous noterons z ce point. Remarquons que, par choix de v', la partie C' est un voisinage du point z dans le fermé de Zariski de $\mathbf{A}^{2,\text{an}}_{\mathscr{A}}$ défini par l'équation $P(S) - T = 0$.

Puisque le polynôme $(P(S)-T)(x) = P(S)(x) \in \mathscr{H}(x)[S]$ est irréductible, le point x de $X = \mathbf{A}^{1,\text{an}}_{\mathscr{A}}$ (avec variable T) satisfait la condition $(I_{P(S)-T})$. D'après la proposition 2.4.3, l'ensemble des parties de la forme $\overline{D}_V(r)$, avec $V \in \mathscr{U}_{b,P}$ et $r > 0$, est un système fondamental de voisinages compacts du point x dans X. Quitte à ne considérer les parties précédentes que sous les conditions $V \subset U$ et $r \leq 1$, nous obtenons un système fondamental de voisinages compacts et spectralement convexes du point x dans B'. Par hypothèse, ces parties satisfont la condition $(R_{P(S)-T})$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 5.3.8. Il assure que le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_{X,x}[S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{B',x}[S]/(P(S) - T) \to \mathscr{O}_{C',z}$$

est un isomorphisme.

Considérons, à présent, l'algèbre $\mathscr{B}(U)\langle |S| \leq v'\rangle$ munie de la norme $\|.\|_{U,v'}$. C'est une algèbre de Banach dont nous noterons B'' le spectre analytique. Notons $\|.\|''$ la norme uniforme sur B'' et $\mathscr{A}''$ l'algèbre de Banach obtenue en

complétant l'algèbre $\mathscr{B}(U)\langle|S| \leq v'\rangle$ pour cette norme. Considérons le nombre réel $v > 0$ dont l'existence est démontrée dans la section 5.2 pour l'algèbre $\mathscr{A}''$ et le polynôme $T - P(S)$ de $\mathscr{A}''[S]$. Choisissons un nombre réel $v'' \geq \max(v, 1)$. Remarquons que la condition $(R_{T-P(S)})$ est trivialement vérifiée pour tout partie compacte et spectralement convexe de B'' et, en particulier, pour la partie B'' elle-même. D'après la proposition 5.2.7, la semi-norme $\|.\|''_{B'',v'',\text{rés}}$ définie sur le quotient $\mathscr{A}''[T]/(T - P(S))$ est une norme uniforme. Notons C'' le spectre analytique de $\mathscr{A}''[T]/(T - P(S))$ et $\varphi'' : C'' \to B''$ le morphisme naturel. Puisque le polynôme $T - P(S) \in \mathscr{A}''[T]$ est de degré 1, la fibre ${\varphi''}^{-1}(y)$ ne comporte qu'un seul point. C'est le point rigide de la fibre au-dessus de b de l'espace affine de dimension 2 associé à l'idéal maximal $(P(S), T)$, comme précédemment. Nous noterons donc encore z ce point.

Le point y de B'' (avec variable S) satisfait évidemment la condition $(I_{T-P(S)})$. La remarque 5.4.2 montre que le point y de B'' possède un système fondamental de voisinages compacts qui satisfont la condition $(R_{T-P(S)})$. Il suffit, par exemple, de considérer l'ensemble des voisinages compacts rationnels du point y. Nous pouvons donc appliquer le théorème 5.3.8. On en déduit que le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_{Y,y} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{B'',y} \to \mathscr{O}_{C'',z}$$

est un isomorphisme.

Pour finir, remarquons que les parties C' et C'' se plongent naturellement dans l'espace affine de dimension 2 au-dessus de B. Par choix de v'', une fois identifiés les espaces et leur plongement, nous avons l'inclusion $C' \subset C''$. On en déduit qu'en tout point c intérieur à C', le morphisme de restriction

$$\mathscr{O}_{C'',c} \to \mathscr{O}_{C',c}$$

est un isomorphisme. En effet, en un tel point, l'anneau local est formé des fonctions qui sont localement limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles à coefficients dans $\mathscr{A}$. En particulier, nous avons un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{C'',z} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{C',z}.$$

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à combiner ces résultats pour obtenir une description explicite de l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$.

Théorème 5.4.3. — *Sous la condition (S_P), le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}_{X,x}[S]/(P(S) - T) \to \mathscr{O}_{C',z} \xleftarrow{\sim} \mathscr{O}_{Y,y}$$

est un isomorphisme.

Forts de cette description, nous pouvons, à présent, démontrer un théorème de division de Weierstraß au voisinage des points rigides des fibres de la droite analytique. Rappelons les notations : $\mathscr{A}$ est un anneau de Banach muni d'une norme uniforme, $B = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ est son spectre analytique, b est un point de B, $P(S)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{A}$ dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[S]$ est irréductible, $Y = \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ est la droite analytique au-dessus de B (nous notons S la variable correspondante) et y est l'unique point de la fibre au-dessus de b défini par l'équation $P(y) = 0$.

Théorème 5.4.4. — *Supposons que le point b de B satisfait la condition (S). Soit $G(S)$ un polynôme à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$. Notons n la valuation P-adique de l'image de ce polynôme dans $\mathscr{H}(b)[S]$. Alors, pour tout élément F de $\mathscr{O}_{Y,y}$, il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathscr{O}_{Y,y}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) l'élément R est un polynôme à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$ de degré strictement inférieur à nd ;
ii) nous avons l'égalité $F = QG + R$.

En outre, si l'élément F appartient à $\mathscr{O}_{B,b}[S]$, il en est de même pour les éléments Q et R.

Démonstration. — On se ramène immédiatement à traiter le même problème dans l'anneau local $\mathscr{O}_{C',z}$ et avec le polynôme $G = P^n$. Le résultat se déduit alors simplement du théorème de division de Weierstraß classique dans l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$. Détaillons la preuve de l'existence de la division. Nous disposons d'un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{X,x}[S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{C',z}.$$

Puisque le polynôme $P(S) - T$ de $\mathscr{O}_{X,x}[S]$ est unitaire, il existe des éléments $f_0, \ldots, f_{d-1}$ de $\mathscr{O}_{X,x}$ tels que l'on ait

$$F = \sum_{i=0}^{d-1} f_i S^i \mod (P(S) - T).$$

Soit $i \in [\![1, d-1]\!]$. D'après le théorème 2.2.3, il existe un élément q_i de $\mathscr{O}_{X,x}$ et un polynôme $r_i(T)$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,b}$ de degré inférieur à $n - 1$ tels que l'on ait l'égalité

$$f_i = q_i T^n + r_i.$$

Par conséquent, dans l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}[S]/(P(S)-T)$, nous avons

$$\begin{aligned} F &= \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i q_i S^i\right) T^n + \sum_{i=0}^{d-1} r_i(T) S^i \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i q_i S^i\right) T^n + \sum_{i=0}^{d-1} r_i(P(S)) S^i \end{aligned} .$$

Pour conclure, il nous suffit de remarquer que le degré du polynôme

$$\sum_{i=0}^{d-1} r_i(P(S))\, S^i \in \mathscr{O}_{B,b}[S]$$

est inférieur à $(n-1)d + (d-1) = nd - 1$.

La remarque finale est claire lorsque le point y est rationnel, en utilisant le fait que l'anneau $\mathscr{O}_{B,b}[S]$ se plonge dans $\mathscr{O}_{Y,y}$ et l'unicité de la division. Le cas d'un point y quelconque se ramène à celui d'un point rationnel par le même raisonnement que précédemment. $\square$

5.5. Endomorphismes de la droite

Dans cette partie, nous étudions les morphismes finis d'une partie de la droite analytique dans elle-même donnés par un polynôme à coefficient dominant inversible. Maintenant que nous disposons du théorème de division de Weierstraß pour les points rigides, nous pouvons suivre pas à pas les raisonnements utilisés en géométrie analytique complexe.

Soit $(\mathscr{A}, \|.\|)$ un anneau de Banach uniforme. Nous notons $B = \mathcal{M}(\mathscr{A})$, $X = \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ (avec variable T) et $\pi : X \to B$ le morphisme de projection. Fixons, dès à présent, les notations. Notons K l'anneau total des fractions de $\mathscr{A}$. Soit

$$P(T) = \sum_{i=0}^{d} a_i\, T^i,$$

avec $d \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_d \in K$, un polynôme non constant à coefficients dans K. Pour toute partie V compacte et spectralement convexe de l'espace B sur laquelle les coefficients de P sont définis et le coefficient a_d inversible, le morphisme naturel

$$\mathscr{B}(V)[T] \to \mathscr{B}(V)[T,S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}(V)[S]$$

induit un morphisme continu de la partie $\pi^{-1}(V)$ dans elle-même. Soit U une partie localement connexe de l'espace B sur laquelle les coefficients de P sont définis et le coefficient a_d inversible. Tout point de U possède un système fondamental de voisinages compacts et spectralement convexes. Par conséquent, nous pouvons construire un morphisme

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U)$$

en recollant des morphismes du type précédent. Afin d'éviter les confusions, nous noterons respectivement Z et Y la source et le but du morphisme φ. Nous considérerons donc le morphisme

$$\varphi : Z \to Y.$$

Proposition 5.5.1. — *Le morphisme φ est un morphisme topologique fini.*

Démonstration. — Le fait que le morphisme φ soit continu est immédiat. Pour montrer qu'il est fermé, nous allons montrer qu'il est topologiquement propre, c'est-à-dire que l'image réciproque de toute partie compacte est encore compacte.

Soit E une partie compacte de Y. Il existe une partie compacte C de B et un nombre réel r tels que la partie E soit contenue dans le disque compact $\overline{D}_C(r)$.

La partie $\varphi^{-1}(E)$ est alors une partie fermée de

$$\varphi^{-1}(\overline{D}_C(r)) = \left\{ z \in Z \,\middle|\, \pi(z) \in C,\, |P(S)(z)| \leq r \right\}.$$

D'après le corollaire 1.1.12, cette dernière partie est compacte. On en déduit que la partie $\varphi^{-1}(E)$ l'est également.

Pour finir, montrons que les fibres du morphisme φ sont finies. Soit y un point de Y. L'ensemble de ses antécédents par l'application φ est l'ensemble des points de l'espace analytique $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(y)}$, dont nous noterons S la variable, qui annulent le polynôme

$$Q_y(S) = P(y)(S) - T(y) = \sum_{i=0}^{d} a_i(y)\, S^i - T(y) \in \mathscr{H}(y)[S].$$

Puisque le polynôme P n'est pas constant et que son coefficient dominant ne s'annule pas sur Y, le polynôme $Q_y(S)$ n'est pas nul. On en déduit que l'ensemble $\varphi^{-1}(y)$ est fini.

□

Posons

$$G(S) = P(S) - T \in \mathscr{O}(U)[T][S].$$

Considérons $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ l'espace affine analytique de dimension 2 sur $\mathscr{A}$ avec variables S et T. Notons Z' l'ouvert de $\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$ formé des points dont la projection sur l'espace B appartient à U. Le polynôme G définit une fonction analytique sur l'espace Z'. Nous identifierons l'espace analytique Z avec le fermé de Zariski de l'espace Z' défini par l'équation $G = 0$. Soit y un point de Y. Notons $z_1, \ldots, z_t$, avec $t \in \mathbf{N}^*$, ses antécédents par le morphisme φ. Le théorème qui suit est l'analogue du théorème 2 de [**14**], I, §2.

Remarque 5.5.2. — Les définitions 5.3.5 et 5.4.1 des conditions (I_G) et (S) étant locales, elles s'adaptent sans peine au cas des points d'un espace analytique qui n'est pas un spectre analytique. Nous nous autoriserons donc à les utiliser encore sans plus de précautions.

Théorème 5.5.3. — *Supposons que le point de y de Y satisfait les conditions (I_G) et (S). Soit $(f_1, \ldots, f_t) \in \prod_{i=1}^{t} \mathscr{O}_{Z',z_i}$. Alors, il existe un unique élément $(r, q_1, \ldots, q_t)$ de $\mathscr{O}_{Y,y}[S] \times \prod_{i=1}^{t} \mathscr{O}_{Z',z_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) le polynôme r est de degré strictement inférieur à d ;

ii) quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, nous avons $f_i = q_i\, G + r$ dans $\mathscr{O}_{Z',z_i}$.

Démonstration. — Dans $\mathscr{H}(y)[S]$, écrivons le polynôme G sous la forme

$$G(y)[S] = a_d(y) \prod_{i=1}^{t} p_i(S)^{n_i},$$

où $p_1, \ldots, p_t$ sont des polynômes irréductibles et unitaires à coefficients dans $\mathscr{H}(y)$ et $n_1, \ldots, n_t$ des éléments de $\mathbf{N}^*$. Pour $i \in [\![1, t]\!]$, notons d_i le degré du polynôme p_i. Les points $z_1, \ldots, z_t$ de Z' sont donc les éléments de la fibre au-dessus du point y définis par l'annulation des polynômes $p_1, \ldots, p_t$. Quitte à changer l'ordre des polynômes, nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, le point z_i est défini par l'équation $p_i = 0$.

D'après la condition (I_G), la décomposition en produits de facteurs irréductibles du polynôme $G[S]$ dans $\kappa(y)[S]$ et dans $\mathscr{H}(y)[S]$ est identique. On en déduit que, quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, le polynôme p_i est à coefficients dans $\kappa(y)$. D'après la proposition 2.5.1, l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est hensélien. Par conséquent, il existe des polynômes $G_1, \ldots, G_t$ unitaires à coefficients dans $\mathscr{O}_{Y,y}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $G = a_d \prod_{i=1}^{t} G_i$ dans $\mathscr{O}_{Y,y}[S]$;
2. quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, nous avons $G_i(y) = p_i^{n_i}$.

Démontrons, maintenant, l'existence de l'écriture annoncée. Il suffit de le démontrer pour des t-uplets $(f_1, \ldots, f_t)$ comportant un seul terme non nul. Le résultat général en découlera par addition. Soit $i \in [\![1, t]\!]$ et supposons que, quel que soit $j \neq i$, nous avons $f_j = 0$. Posons

$$e_i = a_d \prod_{j \neq i} G_j(S).$$

La fonction e_i est inversible au voisinage du point z_i. Puisque le point de y de Y satisfait la condition (S), nous pouvons appliquer le théorème de division de Weierstraß 5.4.4. On en déduit qu'il existe un élément q_i de $\mathscr{O}_{Z',z_i}$ et un polynôme r' à coefficients dans $\mathscr{O}_{Y,y}$ et de degré strictement inférieur à $n_i d_i$ tels que

$$f_i\, e_i^{-1} = q_i\, G_i + r' \text{ dans } \mathscr{O}_{Z',z_i}.$$

En multipliant l'égalité par e_i, nous obtenons

$$f_i = q_i\, G + r \text{ dans } \mathscr{O}_{Z',z_i},$$

où $r = r'\, e_i$ est un polynôme de degré strictement inférieur à d.

Soit $j \neq i$. La fonction G_i est inversible au voisinage du point z_j. Posons

$$q_j = -r' \, G_i^{-1} \text{ dans } \mathscr{O}_{Z',z_j}.$$

Nous avons alors

$$0 = q_j \, G + r \text{ dans } \mathscr{O}_{Z',z_j}.$$

Pour finir, démontrons l'unicité de l'écriture obtenue. Soit $(r, q_1, \ldots, q_t)$ un élément de $\mathscr{O}_{Y,y}[S] \times \prod_{i=1}^{t} \mathscr{O}_{Z',z_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) le polynôme r est de degré strictement inférieur à d ;

ii) quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, nous avons $f_i = q_i \, G + r$ dans $\mathscr{O}_{Z',z_i}$.

Pour montrer que l'écriture est unique, nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, nous avons $f_i = 0$ et montrer alors que $r = 0$ et que, quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, $q_i = 0$. Supposons donc que, quel que soit $i \in [\![1, t]\!]$, nous avons $f_i = 0$. Soit $i \in [\![1, t]\!]$. Avec les mêmes notations que précédemment, nous obtenons l'égalité

$$-r = (q_i e_i) G_i \text{ dans } \mathscr{O}_{Z',z_i}.$$

D'après la remarque finale du théorème 5.4.4, cette égalité vaut dans $\mathscr{O}_{Y,y}[S]$. Puisque les polynômes $G_1, \ldots, G_t$ sont premiers entre eux deux à deux, leur produit $a_d^{-1} G$ divise r. Pour des raisons de degré, cela impose au polynôme r d'être nul. Par unicité de la division euclidienne dans chacun des anneaux $\mathscr{O}_{Z',z_i}$, avec $i \in [\![1, t]\!]$, nous en déduisons que les fonctions $q_1, \ldots, q_t$ sont également nulles. □

Nous parvenons enfin au résultat attendu.

Théorème 5.5.4. — *Supposons que le point de y de Y vérifie les conditions (I_G) et (S). Alors, le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{Y,y}^d & \to & (\varphi_* \mathscr{O}_Z)_y \\ (c_0, \ldots, c_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} c_i \, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Puisque le polynôme G est de degré d est que son coefficient dominant est inversible sur $\pi(Y)$, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{Y,y}^d & \to & \mathscr{O}_{Y,y}[S]/(G(S)) \\ (c_0, \ldots, c_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} c_i \, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. Le résultat découle alors du théorème précédent grâce à l'égalité

$$(\varphi_* \mathscr{O}_Z)_y \simeq \prod_{i=1}^{t} \mathscr{O}_{Z,z_i}.$$

□

Nous déduisons de ce résultat deux corollaires. Leur démonstration est similaire à celle des corollaires 5.3.9 et 5.3.10.

Corollaire 5.5.5. — *Supposons que tout point de Y vérifie les conditions (I_G) et (S). Alors, le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_Y^d & \to & \varphi_* \mathscr{O}_Z \\ (c_0, \ldots, c_{d-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} c_i\, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, pour toute partie V de Y, le morphisme naturel

$$\mathscr{O}_Y(V)[S]/(P(S) - T) \to \mathscr{O}_Z(\varphi^{-1}(V))$$

est un isomorphisme.

Corollaire 5.5.6. — *Supposons que tout point de Y vérifie les conditions (I_G) et (S). Supposons que le faisceau $\mathscr{O}_Y$ est cohérent. Pour toute partie V de Y, nous noterons*

$$\varphi_V : \varphi^{-1}(V) \to V$$

le morphisme déduit de φ par restriction et corestriction. Alors, pour toute partie V de Y et tout faisceau de $\mathscr{O}_{\varphi^{-1}(V)}$-modules cohérent $\mathscr{F}$, le faisceau de $\mathscr{O}_V$-modules $(\varphi_V)_* \mathscr{F}$ est cohérent.

5.6. Au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Nous souhaitons disposer des résultats établis à la section précédente lorsque la base est le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Nous nous plaçons dans ce cadre et reprenons les notations du chapitre 4. Nous souhaitons montrer que les hypothèses du théorème 5.5.4 sont satisfaites. Commençons par nous intéresser à la condition (I_G).

Proposition 5.6.1. — *Soient x un point de X et $P(S)$ un polynôme irréductible de $\kappa(x)[S]$. Alors l'image de $P(S)$ dans $\mathscr{H}(x)[S]$ est irréductible.*

Démonstration. — Supposons, tout d'abord, que la caractéristique du corps résiduel $\kappa(x)$ est un nombre premier. Le point x appartient alors à une fibre extrême. D'après le théorème 4.1.3, le corollaire 4.2.5 ou la proposition 4.3.8, les corps $\kappa(x)$ et $\mathscr{H}(x)$ sont naturellement isomorphes et le résultat est tautologique.

Supposons, à présent, que la caractéristique du corps résiduel $\kappa(x)$ est nulle. Dans ce cas, le polynôme P est séparable. D'après le théorème 4.4.1, *iv*, le corps $\kappa(x)$ est hensélien. Nous concluons alors par la proposition 2.4.1 de [**3**]. □

Corollaire 5.6.2. — *Soient x un point de X et $G(S)$ un polynôme à coefficients dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$. Le point x vérifie la condition (I_G).*

Intéressons-nous, à présent, à la condition (S).

Lemme 5.6.3. — *Soient U une partie compacte et spectralement convexe de B et r un nombre réel strictement positif. Supposons que les valeurs absolues associées aux points de U sont ultramétriques. Notons $\mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}$ l'algèbre constituée des éléments de la forme*

$$\sum_{i\geq 0} b_i\, T^i \ \text{ de } \mathscr{B}(U)[\![T]\!]$$

tels que la suite $(\|b_i\|_U\, r^i)_{i\geq 0}$ tend vers 0. Munissons-la de la norme définie par

$$\left\| \sum_{i\geq 0} b_i\, T^i \right\|_{U,r,um} = \max_{i\geq 0}(\|b_i\|_U\, r^i).$$

C'est alors une algèbre complète et le morphisme $A[T] \to \mathscr{B}(\overline{D}_U(r))$ induit un isomorphisme d'algèbres normées

$$\mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}(\overline{D}_U(r)).$$

Démonstration. — Puisque la partie U de B est spectralement convexe, le morphisme $A[T] \to \mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}$ induit une injection continue

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}) \to \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$$

dont l'image est le disque $\overline{D}_U(r)$. Soit F un élément de $A[T]$ qui ne s'annule pas sur le disque $\overline{D}_U(r)$. Alors, d'après [**2**], corollaire 1.2.4, l'élément F est inversible dans $\mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}$. On en déduit que le morphisme $A[T] \to \mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}$ se prolonge en un morphisme injectif

$$\mathscr{K}(\overline{D}_U(r)) \hookrightarrow \mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}.$$

Comparons, maintenant, la norme $\|.\|_{U,r,\mathrm{um}}$ à la norme uniforme sur le disque $\overline{D}_U(r)$. Soit $F = \sum_{i\geq 0} f_i T^i \in A[T]$. Soit b un point de U. La semi-norme associée au point b est, par hypothèse, ultramétrique. Par conséquent, la norme uniforme $\|.\|_{b,r}$ sur le disque fermé de rayon r au-dessus du point b vérifie

$$\|F\|_{b,r} = \max_{i\geq 0}(|a_i(b)|\, r^i).$$

On en déduit que

$$\|F\|_{\overline{D}_U(r)} = \max_{b\in U}(\|F\|_{b,r}) = \max_{i\geq 0}(\|b_i\|_U\, r^i) = \|F\|_{U,r,\mathrm{um}}.$$

Le morphisme précédent se prolonge donc au complété de $\mathscr{K}(\overline{D}_U(r))$. On en déduit un morphisme injectif

$$\mathscr{B}(\overline{D}_U(r)) \hookrightarrow \mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}.$$

L'image de ce morphisme contient tous les polynômes à coefficients dans $\mathscr{B}(U)$. L'ensemble de ces polynômes étant dense dans $\mathscr{B}(U)\{|T| \leq r\}$, le morphisme précédent est un isomorphisme. □

Rappelons que si $(\mathscr{A}, \|.\|)$ désigne un anneau de Banach et t un élément de $\mathbf{R}_+^*$, nous notons $\mathscr{A}_t$ le complété de l'algèbre $\mathscr{A}\langle|T| \leq t\rangle$ pour la norme uniforme sur son spectre analytique et que nous identifions ce spectre au disque fermé $\overline{D}(t)$ contenu dans la droite analytique $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{1,\mathrm{an}}$.

Lemme 5.6.4. — *Soient $t > 0$, x un point de $\overline{D}(t)$ et U un voisinage compact et connexe du point x dans $\overline{D}(t)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) les valeurs absolues associées aux points de U sont ultramétriques ;

ii) la partie U est spectralement convexe ;

iii) la partie U possède un bord analytique fini et algébriquement trivial.

Soit $P(S)$ un polynôme de $\mathscr{O}(U)[S]$ tel que l'élément Rés(P, P') de $\mathscr{O}(U)$ n'est pas nul. Alors, quel que soient $s > 0$ et $r \in]0, s]$, le disque $\overline{D}_U(r)$ (avec variable T_0) de $\mathcal{M}((\mathscr{A}_t)_s)$ vérifie la condition $R_{P(S)-T_0}$.

Démonstration. — Soient $s > 0$ et $r \in]0, s]$. Notons $V = \overline{D}_U(r)$ muni de la variable T_0. D'après la proposition 1.2.16, une telle partie de $\mathcal{M}((\mathscr{A}_t)_s)$ est spectralement convexe.

Pour tout point y de Γ, notons y_r le point η_r de la fibre de V au-dessus du point y. Remarquons, dès à présent, que, pour tout point y de Γ, l'élément $T_0(y_r)$ de $\mathscr{H}(y_r)$ est transcendant sur $\mathscr{H}(y)$. Notons

$$\Gamma_V = \{y_r,\, y \in \Gamma\}.$$

Tout élément de $\mathscr{B}(V)$ atteint son maximum sur Γ_V. Il suffit, pour s'en convaincre, d'utiliser la description explicite démontrée dans le lemme qui précède.

Pour montrer que le disque V vérifie la condition $R_{P(S)-T_0}$, il nous suffit donc de montrer que la fonction $\text{Rés}(P(S) - T_0, P'(S))$ ne s'annule pas sur Γ_V. Soit y un point de Γ. Nous avons $\text{Rés}(P(S), P'(S))(y) \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, puisque l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ est un corps, la fonction $\text{Rés}(P(S), P'(S))$ serait nulle au voisinage du point y et donc nulle sur U, d'après le principe du prolongement analytique. Considérons l'élément $R_y(T_0) = \text{Rés}(P(S)-T_0, P'(S))$ de $\mathscr{H}(y)[T]$. Nous venons de montrer que $R_y(0) \neq 0$. On en déduit que le polynôme R_y n'est pas nul, puis que $R_y(T_0(y_r))$ n'est pas nul, car $T_0(y_r)$ est transcendant sur $\mathscr{H}(y)$. C'est le résultat attendu. □

Lemme 5.6.5. — *Soit x un point de X. Soit $P(S)$ un polynôme de $\mathscr{O}_{X,x}[S]$ dont l'image dans $\mathscr{H}(x)[S]$ est irréductible. Alors l'élément Rés(P, P') de $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est pas nul.*

Démonstration. — Le polynôme $P(S)$ est également irréductible dans $\kappa(x)[S]$ et donc dans $\mathscr{O}_{X,x}[S]$, puisque l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est hensélien. Or l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est intègre et son corps de fractions est parfait, car de caractéristique nulle. En effet, c'est une extension du corps des fractions de l'anneau $\mathscr{O}_{B,\pi(x)}$, dont la caractéristique est nulle. On en déduit le résultat voulu.

□

Proposition 5.6.6. — *Tout point de X satisfait la condition (S).*

Démonstration. — Soit x un point de X. Supposons, tout d'abord, que le corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$ est parfait. Soit $P(S)$ un élément de $\mathscr{O}_{X,x}[S]$ dont l'image dans $\mathscr{H}(x)[S]$ est irréductible. Puisque le corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$ est parfait, ce polynôme est séparable et nous avons $\text{Rés}(P(S), P'(S))(x) > 0$. Par conséquent, il existe un nombre réel $m > 0$ et un voisinage compact et spectralement convexe V du point x dans X sur lequel le polynôme $P(S)$ est défini et la fonction $\text{Rés}(P(S), P'(S))$ minorée par m. Considérons, à présent,

le polynôme $\text{Rés}(P(S) - T_0, P'(S))$ de $\mathscr{B}(V)[T_0]$. Nous venons de montrer que son coefficient constant est minoré sur V. Par conséquent, il existe $s > 0$ tel que ce polynôme ne s'annule pas sur $\overline{D}_V(s)$. Pour tout voisinage compact et spectralement convexe U de x dans V et tout nombre réel $r \in]0, s]$, la condition $(R_{P(S)-T_0})$ est alors vérifiée sur le disque $\overline{D}_U(r)$.

Supposons, à présent, que le corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$ n'est pas parfait. Le point x appartient alors nécessairement à une fibre extrême de l'espace X. D'après le théorème 4.4.8, il possède un système fondamental de voisinages vérifiant les conditions du lemme 5.6.4. On conclut alors à l'aide du lemme 5.6.5. □

Nous pouvons, à présent, appliquer le théorème 5.5.4 et ses corollaires. Nous allons notamment en déduire une expression explicite des anneaux de sections globales au voisinage des lemniscates. Soit V une partie de l'espace B et $P(S)$ un polynôme à coefficients dans $\mathscr{O}(D)$ dont le coefficient dominant est inversible. Soient s et t deux éléments de $\mathbf{R}_+$ vérifiant l'inégalité $s \leq t$. Posons

$$\begin{aligned}
C_0 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s \leq |T(x)| \leq t\right\}, \\
L_0 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s \leq |P(T)(x)| \leq t\right\}, \\
C_1 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |T(x)| \leq t\right\}, \\
L_1 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |P(T)(x)| \leq t\right\}, \\
C_2 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s \leq |T(x)| < t\right\}, \\
L_2 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s \leq |P(T)(x)| < t\right\}, \\
C_3 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |T(x)| < t\right\}, \\
L_3 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |P(T)(x)| < t\right\}, \\
C_4 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, |T(x)| \geq s\right\}, \\
L_4 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, |P(T)(x)| \geq s\right\}, \\
C_5 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, |T(x)| > s\right\} \\
\text{et} \quad L_5 &= \left\{x \in X_V \,\middle|\, |P(T)(x)| > s\right\}.
\end{aligned}$$

Choisissons un couple (C, L) parmi les couples (C_i, L_i), avec $i \in [\![0, 5]\!]$.

Procédons, à présent, comme dans la section 5.5. Pour toute partie V compacte et spectralement convexe contenue dans D, le morphisme naturel

$$\mathscr{B}(V)[T] \to \mathscr{B}(V)[T, S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}(V)[S]$$

induit un morphisme continu de la partie X_V dans elle-même. Ces morphismes se recollent en un morphisme

$$\varphi : X_V \to X_V.$$

Remarquons que nous avons l'égalité

$$L = \varphi^{-1}(C).$$

D'après le corollaire 5.6.2 et la proposition 5.6.6, les hypothèses des corollaires 5.5.5 et 5.5.6 sont vérifiées. En appliquant le corollaire 5.5.5, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 5.6.7. — *Le morphisme naturel*

$$\mathscr{O}(C)[S]/(P(S) - T) \to \mathscr{O}(L)$$

est un isomorphisme.

Le théorème 3.2.19 nous permet d'en déduire une description explicite des anneaux de sections globales des lemniscates.

CHAPITRE 6

ESPACES DE STEIN

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques sous-espaces de Stein de la droite analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Nous y utilisons les notations du chapitre 4. Plus précisément, nous démontrons que certaines parties assez simples, disques, couronnes ou lemniscates relatifs, sont des espaces de Stein.

Le numéro 6.1 contient les définitions dans un cadre général : nous appelons ici espace de Stein tout espace annelé qui satisfait aux conclusions des théorèmes A et B de H. Cartan. Nous rappelons également quelques propriétés classiques de ces espaces.

Au numéro 6.2, nous dégageons des conditions sous lesquelles une réunion de deux parties compactes et de Stein est encore un espace de Stein. Les notions introduites peuvent sembler absconses, mais elle ne sont que formalisations des méthodes de la géométrie analytique complexe.

Nous reprenons ensuite le cadre du chapitre 4 : celui de la droite affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Nous utilisons les résultats obtenus pour montrer que les parties compactes et connexes de l'espace de base sont des espaces de Stein, au numéro 6.3, ainsi que les couronnes compactes des fibres, au numéro 6.4, et les couronnes compactes et connexes de la droite, au numéro 6.5.

Au numéro 6.6, nous traitons le cas des couronnes ouvertes et, plus généralement, des parties de la forme

$$\left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |P(T)(x)| < t\right\},$$

où V est une partie connexe de la base, $P(T)$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ et s et t deux nombres réels. Nous reprenons, là encore, les méthodes de la géométrie analytique complexe. Nous indiquons tout d'abord des

conditions sous lesquelles une partie qui possède une exhaustion par des parties compactes et de Stein est elle-même un espace de Stein. Nous démontrons ensuite un résultat de fermeture pour certains germes de faisceaux, qui nous semble présenter un intérêt indépendant. Nous concluons en décrivant explicitement des exhaustions de Stein pour les couronnes ouvertes et en utilisant les résultats sur les morphismes finis démontrés au chapitre 5.

6.1. Définitions

Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé. Avant d'en venir aux démonstrations annoncées, nous rappelons quelques propriétés et définitions dans un cadre général. Expliquons, tout d'abord, ce que nous entendons par espace de Stein. Nous utiliserons la définition cohomologique classique.

Définition 6.1.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que le faisceau $\mathscr{F}$ satisfait le* **théorème A** *si, pour tout point x de X, le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ est engendré par l'ensemble de ses sections globales $\mathscr{F}(X)$.*

Soit Y une partie de X. On dit que le faisceau $\mathscr{F}$ satisfait le théorème A sur Y si le faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathscr{F}_{|Y}$ satisfait le théorème A.

Remarquons que, par définition (*cf.* définition 4.5.1), le théorème A est satisfait localement pour les faisceaux de type fini. Énonçons ce résultat sous forme d'un lemme afin de pouvoir nous y faire référer ultérieurement.

Lemme 6.1.2. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules de type fini. Soit x un point de X. Il existe un voisinage V du point x dans X tel que le faisceau $\mathscr{F}$ satisfasse le théorème A sur V.*

Signalons également que lorsque nous considérons des parties compactes, nous pouvons préciser le résultat du théorème A.

Lemme 6.1.3. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules de type fini qui satisfait le théorème A. Si l'espace X est compact, il existe un ensemble fini d'éléments de $\mathscr{F}(X)$ dont les images engendrent le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ en tout point x de X.*

Démonstration. — Soit x un point de l'espace X. Puisque le faisceau $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, il existe un voisinage U du point x dans X, un entier p et des éléments $F_1, \ldots, F_p$ de $\mathscr{F}(U)$ tels que, pour tout point y de U, le $\mathscr{O}_{X,y}$-module $\mathscr{F}_y$ soit engendré par les germes $(F_1)_y, \ldots, (F_p)_y$.

D'après le théorème A, il existe un entier q et des éléments $G_1, \ldots, G_q$ de $\mathscr{F}(X)$ tels le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ soit engendré par les germes $(G_1)_x, \ldots, (G_q)_x$. En particulier, il existe une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}$ tels que l'on ait

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ (F_i)_x = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\, (G_j)_x \text{ dans } \mathscr{F}_x.$$

Il existe un voisinage V du point x dans U sur lequel les éléments $a_{i,j}$, avec $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, sont définis et les égalités précédentes sont valables. On

en déduit que, pour tout point y de V, le $\mathscr{O}_{X,y}$-module $\mathscr{F}_y$ est engendré par les germes $(G_1)_y, \ldots, (G_q)_y$.

On conclut finalement en utilisant la compacité de l'espace X. □

Définition 6.1.4. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que le faisceau $\mathscr{F}$ satisfait le* **théorème B** *si, quel que soit $q \in \mathbf{N}^*$, nous avons*

$$H^q(X, \mathscr{F}) = 0.$$

Soit Y une partie de X. On dit que le faisceau $\mathscr{F}$ satisfait le théorème B sur Y si le faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathscr{F}_{|Y}$ satisfait le théorème B.

Définition 6.1.5. — *On dit que l'espace X est* **un espace de Stein** *si tout faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules cohérent satisfait les théorèmes A et B.*

Remarque 6.1.6. — Attention, cette définition d'espace de Stein est plus faible que la définition classique pour les espaces analytiques sur un corps ultramétrique (*cf.* [**21**], définition 2.3).

Soit Y une partie de X. Lorsque Y est compacte, les propriétés de finitude des faisceaux cohérents imposent des liens entre les faisceaux cohérents sur Y et les faisceaux cohérents définis sur un voisinage de Y dans X. Le résultat qui suit est démontré à la proposition 1 de [**8**]. La preuve qui y figure est écrite dans le langage de la géométrie analytique complexe, mais elle s'adapte à notre cadre, sans la moindre modification.

Proposition 6.1.7. — *Supposons que la partie Y est compacte. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules cohérent. Alors, il existe un voisinage ouvert U du compact Y dans X et un faisceau de $\mathscr{O}_U$-modules cohérent $\mathscr{G}$ tel que l'on ait*

$$\mathscr{F} = \mathscr{G}_{|Y}.$$

Corollaire 6.1.8. — *Supposons que la partie Y est compacte et possède un système fondamental de voisinages formé d'espaces de Stein. Alors, la partie Y est de Stein.*

Mentionnons que l'on peut remplacer les conditions qui figurent dans la définition d'espace de Stein par des conditions plus faibles. En effet, le théorème A se déduit du théorème B. La nullité du premier groupe de cohomologie à coefficient dans n'importe quel faisceau cohérent suffit d'ailleurs à assurer que l'espace est de Stein. On trouve, par exemple, une preuve de ce résultat dans l'ouvrage [**14**] (*cf.* IV, §1, théorème 2). Nous la reproduisons ici pour la commodité du lecteur.

Théorème 6.1.9. — *Supposons que, pour tout faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules cohérent $\mathscr{F}$, on ait $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$. Alors tout faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules cohérent satisfait le théorème A.*

Démonstration. — Soit x un point de X. Notons $\mathscr{M}$ le faisceau d'idéaux cohérent sur X qui définit le fermé de Zariski réduit $\{x\}$. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules cohérent. En utilisant la suite exacte

$$0 \to \mathscr{M}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{M}\mathscr{F},$$

on montre que l'application

$$\mathscr{F}(X) \to (\mathscr{F}/\mathscr{M}\mathscr{F})(X) = \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x,$$

où $\mathfrak{m}_x$ désigne l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$, est surjective. Soient $f_1, \ldots, f_n$, avec $n \in \mathbf{N}^*$, des éléments de $\mathscr{F}(X)$ dont les images engendrent $\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ en tant que $(\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x\mathscr{O}_{X,x})$-espace vectoriel. On déduit du lemme de Nakayama que ces éléments engendrent encore la fibre $\mathscr{F}_x$ en tant que $\mathscr{O}_{X,x}$-module. □

On déduit de ce résultat une stabilité de la notion d'espace de Stein par morphisme fini.

Théorème 6.1.10. — *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme topologique fini. Supposons que l'espace X est un espace de Stein et que, pour tout faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules cohérent $\mathscr{F}$, le faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules $\varphi_*\mathscr{F}$ est cohérent. Alors l'espace Y est un espace de Stein.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules cohérent. D'après le théorème 5.1.6, pour tout entier q, nous avons un isomorphisme

$$H^q(Y, \mathscr{F}) \simeq H^q(X, \varphi_*\mathscr{F}).$$

Or le faisceau $\varphi_*\mathscr{F}$ est cohérent et la partie X est de Stein. On en déduit que, pour tout entier $q \geq 1$, nous avons

$$H^q(Y, \mathscr{F}) = 0.$$

Nous venons de montrer que tout faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules cohérent satisfait le théorème B. Le théorème 6.1.9 assure alors que la partie Y est de Stein. □

Sous certaines conditions, le fait de disposer d'un morphisme non pas vers mais depuis un espace de Stein permet encore de conclure. L'énoncé suivant est dû à Q. Liu (*cf.* [**23**], proposition 2).

Théorème 6.1.11. — *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme surjectif. Supposons que l'espace Y et les fermés de Zariski de X de support différent de X sont des espaces de Stein. Supposons également qu'il existe un point z de X en lequel la fibre $(\varphi_*\mathscr{O}_Y)_z$ est un $\mathscr{O}_{X,z}$-module libre de rang fini. Alors l'espace X est un espace de Stein.*

Démonstration. — Notons $\mathscr{G}$ le faisceau $\varphi_*\mathscr{O}_Y$. Notons $\mathscr{M}$ le faisceau d'idéaux cohérent sur X qui définit le fermé de Zariski réduit $\{z\}$ et $\mathscr{M}'$ le faisceau d'idéaux cohérent sur Y qui définit le fermé de Zariski réduit $\varphi^{-1}(z)$. Par construction, nous avons

$$\varphi_*\mathscr{M}' = \mathscr{M}\mathscr{G}.$$

On en déduit que

$$H^1(X, \mathscr{M}\mathscr{G}) = H^1(Y, \mathscr{M}') = 0,$$

puisque Y est de Stein. À l'aide de la suite exacte

$$0 \to \mathscr{M}\mathscr{G} \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{M}\mathscr{G},$$

on montre alors que l'application

$$\mathscr{G}(X) \to (\mathscr{G}/\mathscr{M}\mathscr{G})(X) = \mathscr{G}_z/\mathfrak{m}_z\mathscr{G}_z,$$

où $\mathfrak{m}_z$ désigne l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,z}$, est surjective. Soient $f_1, \ldots, f_n$, avec $n \in \mathbf{N}^*$, des éléments de $\mathscr{G}(X)$ dont les images engendrent $\mathscr{G}_z/\mathfrak{m}_z\mathscr{G}_z$ en tant que $(\mathscr{O}_{X,z}/\mathfrak{m}_z\mathscr{O}_{X,z})$-espace vectoriel. Ils définissent un morphisme

$$\alpha : \mathscr{O}_X^n \to \mathscr{G}.$$

Le lemme de Nakayama assure que sa fibre en z est un isomorphisme.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules cohérent. À partir de la suite exacte

$$\mathscr{O}_X^n \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to 0,$$

on en construit une nouvelle

$$\mathscr{H}om(\mathrm{Coker}(\alpha), \mathscr{L}) \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}om(\mathscr{G}, \mathscr{L}) \xrightarrow{\gamma} \mathscr{H}om(\mathscr{O}_X^n, \mathscr{L}) = \mathscr{L}^n,$$

que l'on scinde en

$$\mathscr{H}om(\mathrm{Coker}(\alpha), \mathscr{L}) \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}om(\mathscr{G}, \mathscr{L}) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to 0$$

et

$$0 \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathscr{L}^n \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to 0.$$

Le faisceau $\mathscr{H}om(\mathscr{G},\mathscr{L})$ est naturellement muni d'une structure de faisceau de $\mathscr{G} = \varphi_*\mathscr{O}_Y$-module cohérent. Il existe donc un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent $\mathscr{G}'$ tel que $\varphi_*\mathscr{G}' = \mathscr{H}om(\mathscr{G},\mathscr{L})$. On en déduit que

$$\forall q \geq 1,\ H^q(X, \mathscr{H}om(\mathscr{G},\mathscr{L})) = H^q(Y,\mathscr{G}') = 0.$$

Puisque le point z n'appartient pas au support de $\mathrm{Coker}(\alpha)$, le support du faisceau $\mathscr{H}om(\mathrm{Coker}(\alpha),\mathscr{L})$ est différent de X. Par conséquent,

$$\forall q \geq 1,\ H^q(X, \mathrm{Coker}(\alpha)) = 0.$$

La même propriété vaut encore pour $\mathrm{Coker}(\beta)$, grâce à l'avant-dernière suite exacte.

En utilisant le fait que le point z n'appartient pas au support de $\mathrm{Coker}(\gamma)$, on en déduit que $\mathrm{Coker}(\gamma)$ vérifie aussi cette propriété. La dernière suite exacte nous permet de montrer que tel est encore le cas pour $\mathscr{L}^n$, et donc pour $\mathscr{L}$. □

Remarque 6.1.12. — Notre énoncé diffère légèrement de celui que propose Q. Liu, qui se place sous les hypothèses suivantes : le morphisme φ est fini et surjectif et l'espace Y de Stein. Signalons qu'il travaille dans le cadre des espaces analytiques rigides, ce qui lui permet de disposer d'autres résultats et notamment de se ramener au cas où les espaces sont réduits (puisqu'un espace est de Stein si, et seulement si, sa réduction l'est). Q. Liu déduit la condition sur la fibre du faisceau $\varphi_*\mathscr{O}_Y$ de la cohérence de ce faisceau (qui provient elle-même de la finitude du morphisme φ) et du fait que l'espace X est réduit. Quant à la condition concernant les fermés de Zariski de X, une récurrence noethérienne lui permet de l'éliminer.

Remarque 6.1.13. — Cet énoncé est particulièrement bien adapté pour montrer qu'un espace est de Stein lorsque l'on sait qu'il l'est après extension finie du corps de base. Considérons par exemple le cas d'un espace X défini sur k dont on sait que $Y = X \otimes_k L$, où L est une extension finie de k, est de Stein. Si X possède un k-point, la fibre du faisceau $\varphi_*\mathscr{O}_Y$ en ce point sera un module libre de rang égal au degré de l'extension. Remarquons encore que si X est un espace de dimension 1, le fait que ses fermés de Zariski de support strictement plus petit soient de Stein devient trivial.

Nous utiliserons ce raisonnement au cours de la preuve du théorème 6.4.10 pour montrer que des espaces analytiques sur $\mathbf{R}$ sont de Stein en nous ramenant au cas d'espaces analytiques complexes, pour laquelle la théorie est bien développée.

6.2. Cadre général pour les compacts

Dans cette première partie, nous nous sommes attaché à dégager un cadre général pour démontrer que des parties compactes sont des espaces de Stein. Nous considérerons donc ici un espace localement annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ et deux parties compactes K^- et K^+ de l'espace topologique sous-jacent. Posons $L = K^- \cap K^+$ et $M = K^- \cup K^+$.

6.2.1. Lemmes de Cousin et de Cartan

Il n'est guère aisé de travailler directement avec les anneaux de fonctions au voisinages de compacts. Nous allons donc introduire une définition qui nous permettra de considérer plutôt des anneaux de Banach.

Définition 6.2.1. — *Un* **système de Banach associé au couple** (K^-, K^+) *est la donnée de*

i) un ensemble ordonné filtrant $(A, \leq)$ *;*
ii) un système inductif $((\mathscr{B}_\alpha^-, \|.\|_\alpha^-), \varphi_{\alpha,\beta}^-)$ *sur* A *à valeurs dans la catégorie des anneaux de Banach et des morphismes bornés entre iceux ;*
iii) un système inductif $((\mathscr{B}_\alpha^+, \|.\|_\alpha^+), \varphi_{\alpha,\beta}^+)$ *sur* A *à valeurs dans la catégorie des anneaux de Banach et des morphismes bornés entre iceux ;*
iv) un système inductif $((\mathscr{C}_\alpha, \|.\|_\alpha), \varphi_{\alpha,\beta})$ *sur* A *à valeurs dans la catégorie des anneaux de Banach et des morphismes bornés entre iceux ;*
v) pour tout élément α *de* A*, un morphisme borné* $\psi_\alpha^- : \mathscr{B}_\alpha^- \to \mathscr{C}_\alpha$ *;*
vi) pour tout élément α *de* A*, un morphisme borné* $\psi_\alpha^+ : \mathscr{B}_\alpha^+ \to \mathscr{C}_\alpha$ *;*
vii) pour tout élément α *de* A*, un morphisme* $\rho_\alpha^- : \mathscr{B}_\alpha^- \to \mathscr{O}(K^-)$ *;*
viii) pour tout élément α *de* A*, un morphisme* $\rho_\alpha^+ : \mathscr{B}_\alpha^- \to \mathscr{O}(K^+)$ *;*
ix) pour tout élément α *de* A*, un morphisme* $\rho_\alpha : \mathscr{C}_\alpha \to \mathscr{O}(L)$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout élément α *de* A*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}_\alpha^- \arrow[r, "\rho_\alpha^-"] \arrow[d, "\psi_\alpha^-"] & \mathscr{O}(K^-) \arrow[d, "\cdot_L"] \\ \mathscr{C}_\alpha \arrow[r, "\rho_\alpha"] & \mathscr{O}(L) \end{tikzcd}$$

commute ;

2. *pour tout élément α de A, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}_\alpha^+ \arrow[r, "\rho_\alpha^+"] \arrow[d, "\psi_\alpha^+"] & \mathscr{O}(K^+) \arrow[d, "\cdot_L"] \\ \mathscr{C}_\alpha \arrow[r, "\rho_\alpha"] & \mathscr{O}(L) \end{tikzcd}$$

commute ;

3. *pour tous éléments α et β de A tels que $\alpha \leq \beta$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_\alpha \arrow[dr, "\rho_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_{\beta,\alpha}"'] & \\ & \mathscr{O}(L) \\ \mathscr{C}_\beta \arrow[ur, "\rho_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

commute ;

4. *le morphisme*

$$\rho : \varinjlim_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha \to \mathscr{O}(L)$$

induit par la famille de morphismes $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un isomorphisme.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous considérerons un système de Banach Ω associé au couple (K^-, K^+). Nous aurons besoin d'une propriété supplémentaire, connue sous le nom de lemme de Cousin.

Définition 6.2.2. — *Un* **système de Cousin associé au couple** (K^-, K^+) *est un système de Banach associé au même couple et pour lequel il existe un nombre réel D vérifiant la propriété suivante : pour tout élément α de A et tout élément f de $\mathscr{C}_\alpha$, il existe des éléments f^- de $\mathscr{B}_\alpha^-$ et f^+ de $\mathscr{B}_\alpha^+$ tels que*

i) $f = \psi_\alpha^-(f^-) + \psi_\alpha^+(f^+)$ *;*

ii) $\|f^-\|_\alpha^- \leq D \|f\|_\alpha$ *;*

iii) $\|f^+\|_\alpha^+ \leq D \|f\|_\alpha$.

Nous allons montrer que tout système de Cousin vérifie le lemme de Cartan, en reprenant essentiellement la méthode mise en œuvre dans [**14**], III §1.

Commençons par introduire quelques notations. Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$ et $(\mathscr{D}, \|.\|)$ un anneau de Banach. Nous définissons la norme d'une matrice $a = (a_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathscr{D})$ par

$$\|a\| = \max_{1 \leq i \leq p} \left(\sum_{j=1}^{q} \|a_{i,j}\| \right).$$

La multiplication des matrices est continue par rapport à cette norme. En effet, on vérifie facilement que, quel que soient $r \in \mathbf{N}^*$, $a \in M_{p,q}(\mathscr{D})$ et $b \in M_{q,r}(\mathscr{D})$, on a

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Nous noterons $I \in M_q(\mathscr{D})$ la matrice identité. Nous allons, tout d'abord, démontrer quelques lemmes.

Lemme 6.2.3. — *Toute matrice a de $M_q(\mathscr{D})$ vérifiant*

$$\|a - I\| \leq \frac{1}{2}$$

est inversible et son inverse a^{-1} vérifie l'inégalité

$$\|a^{-1}\| \leq 2.$$

Lemme 6.2.4. — *Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de $M_q(\mathscr{D})$ vérifiant la condition*

$$\sum_{k\geq 0} \|a_k - I\| \leq \frac{1}{2}.$$

Alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\|a_0 \cdots a_n - I\| \leq 2 \sum_{k=0}^{n} \|a_k - I\|$$

Démonstration. — Démontrons ce résultat par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}$. Pour $n = 0$, c'est évident.

Supposons que la formule est vraie pour $n \in \mathbf{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} a_0 \cdots a_n a_{n+1} - I &= (a_0 \cdots a_n - I)(a_{n+1} - I) \\ &\quad + (a_0 \cdots a_n - I) + (a_{n+1} - I). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|a_0 \cdots a_n a_{n+1} - I\| &\leq \|a_0 \cdots a_n - I\| \, \|a_{n+1} - I\| \\ &\quad + \|a_0 \cdots a_n - I\| + \|a_{n+1} - I\| \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{n} \|a_k - I\| \\ &\quad + (\|a_0 \cdots a_n - I\| + 1) \, \|a_{n+1} - I\|. \end{aligned}$$

En outre, nous avons

$$\|a_0 \cdots a_n - I\| \leq 2 \sum_{k=0}^{n} \|a_k - I\| \leq 1.$$

On en déduit que

$$\|a_0 \cdots a_{n+1} - I\| \leq 2 \sum_{k=0}^{n+1} \|a_k - I\|.$$

□

Lemme 6.2.5. — *Soit $(g_k)_{k\geq 0}$ une suite de $M_q(\mathscr{D})$ vérifiant*

$$\sum_{k\geq 0} \|g_k\| \leq \frac{1}{4}.$$

Alors la suite de terme général

$$P_n = (I + g_0) \cdots (I + g_n)$$

converge dans $M_q(\mathscr{D})$ vers une matrice inversible P vérifiant

$$\|P - I\| \leq 2 \sum_{k\geq 0} \|g_k\|.$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, quels que soient $j \geq i \geq 0$, nous avons

$$\|(I + g_i) \cdots (I + g_j) - I\| \leq 2 \sum_{k=i}^{j} \|g_k\|.$$

En particulier, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\|P_n - I\| \leq 2 \sum_{k=0}^{n} \|g_k\| \leq \frac{1}{2}$$

et donc $\|P_n\| < 3/2$. On en déduit que, quels que soient $m \geq n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|P_m - P_n\| &= \|P_n\,((I + g_{n+1}) \cdots (I + g_m) - I)\| \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{k=n+1}^{m} \|g_k\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $M_q(\mathscr{D})$. Puisque cet anneau est complet, elle converge donc vers un élément P. Nous avons nécessairement

$$\|P - I\| \leq 2 \sum_{k\geq 0} \|g_k\| \leq \frac{1}{2}.$$

Le lemme 6.2.3 nous permet alors de conclure. □

Plaçons-nous de nouveau dans le cadre des systèmes de Cousin. Pour $\alpha \in A$, les morphismes ψ_α^-, ψ_α^+, ρ_α^-, ρ_α^+ et ρ_α se prolongent naturellement en des morphismes de groupes entre les espaces de matrices ; nous les noterons identiquement.

Lemme 6.2.6. — *Supposons que Ω soit un système de Cousin. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 < \varepsilon < 1/2\,D^{-1}$ et $\beta = 4D^2\varepsilon < 1$. Soit $\alpha \in A$. Soit $a = I + b \in M_q(\mathscr{C}_\alpha)$ telle que $\|b\|_\alpha \leq \varepsilon$. Alors, il existe $a^- = I + b^- \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$, $a^+ = I + b^+ \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ et $\tilde{a} = I + \tilde{b} \in M_q(\mathscr{C}_\alpha)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $a = \psi_\alpha^-(a^-)\,\tilde{a}\,\psi_\alpha^+(a^+)$;

ii) $\|b^-\|_\alpha^- \leq D\,\|b\|_\alpha$;
iii) $\|b^+\|_\alpha^+ \leq D\,\|b\|_\alpha$;
iv) $\|\tilde{b}\|_\alpha \leq \beta_\alpha\,\|b\|_\alpha$.

Démonstration. — En appliquant la propriété des systèmes de Cousin à chaque coefficient de la matrice b, on montre qu'il existe des matrices $b^- \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$ et $b^+ \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $b = \psi_\alpha^-(b^-) + \psi_\alpha^+(b^+)$;
2. $\|b^-\|_\alpha^- \leq D\,\|b\|_\alpha$;
3. $\|b^+\|_\alpha^+ \leq D\,\|b\|_\alpha$.

Posons $a^- = I + b^- \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$ et $a^+ = I + b^+ \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$. Nous avons alors l'égalité

$$\psi_\alpha^-(a^-)\,\psi_\alpha^+(a^+) = a + \psi_\alpha^-(b^-)\,\psi_\alpha^+(b^+).$$

Par choix de b, nous avons $D\|b\|_\alpha \leq 1/2$. D'après le lemme 6.2.3, la matrice a^- est inversible dans $M_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$ et vérifie $\|(a^-)^{-1}\|_\alpha^- \leq 2$. De même, la matrice a^+ est inversible dans $M_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ et vérifie $\|(a^+)^{-1}\|_\alpha^+ \leq 2$.

Posons

$$\tilde{a} = \psi_\alpha^-(a^-)^{-1}\,a\,\psi_\alpha^+(a^+)^{-1} \text{ et } \tilde{b} = \tilde{a} - I \text{ dans } M_q(\mathscr{C}_\alpha).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\tilde{b} &= \psi_\alpha^-\left((a^-)^{-1}\right)\,a\,\psi_\alpha^+\left((a^+)^{-1}\right) - I \\
&= \psi_\alpha^-\left((a^-)^{-1}\right)\,\left(\psi_\alpha^-(a^-)\,\psi_\alpha^+(a^+) - \psi_\alpha^-(b^-)\,\psi_\alpha^+(b^+)\right)\,\psi_\alpha^+\left((a^+)^{-1}\right) - I \\
&= -\psi_\alpha^-\left((a^-)^{-1}\right)\,\psi_\alpha^-(b^-)\,\psi_\alpha^+(b^+)\,\psi_\alpha^+\left((a^+)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

et nous en tirons l'inégalité

$$\|\tilde{b}\|_\alpha \leq 4D^2\|b\|_\alpha^2 \leq \beta\|b\|_\alpha.$$

□

Nous voici enfin prêts à démontrer le lemme de Cartan.

Théorème 6.2.7 (Lemme de Cartan). — *Supposons que* Ω *soit un système de Cousin. Alors, il existe* $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *vérifiant la propriété suivante : quels que soient* $\alpha \in A$ *et* $a \in M_q(\mathscr{C}_\alpha)$ *vérifiant* $\|a - I\|_\alpha < \varepsilon$, *il existe* $c^- \in GL_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$ *et* $c^+ \in GL_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ *telles que*

i) $a = \psi_\alpha^-(c^-)\,\psi_\alpha^+(c^+)$;
ii) $\|c^- - I\|_\alpha^- \leq 4D\,\|a - I\|_\alpha$;
iii) $\|c^+ - I\|_\alpha^+ \leq 4D\,\|a - I\|_\alpha$.

Démonstration. — Choisissons $\varepsilon \in \mathbf{R}$ vérifiant les conditions du lemme précédent ainsi que $\beta \leq 1/2$ et $\varepsilon \leq 1/(8D)$. Soient $\alpha \in A$ et $a \in M_q(\mathscr{C}_\alpha)$ vérifiant $\|a - I\|_\alpha < \varepsilon$. Posons $b = a - I$ et $M = \|b\|_\alpha$. Définissons, à présent, par récurrence, trois suites $(b_k^-)_{k\geq 0}$, $(b_k^+)_{k\geq 0}$ et $(\tilde{b}_k)_{k\geq 0}$ de $M_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$, $M_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ et $M_q(\mathscr{C}_\alpha)$ vérifiant les conditions suivantes : quel que soit $k \geq 0$, nous avons

1. $\|b_k^-\|_\alpha^- \leq DM\beta^k$;
2. $\|b_k^+\|_\alpha^+ \leq DM\beta^k$;
3. $\|\tilde{b}_k\|_\alpha \leq M\beta^k$

et, quel que soit $k \geq 1$, nous avons

4. $\psi_\alpha^-(I + b_k^-)\,(I + \tilde{b}_k)\,\psi_\alpha^+(I + b_k^+) = I + \tilde{b}_{k-1}$.

Initialisons la récurrence en posant $\tilde{b}_0 = b$. La troisième propriété est alors vérifiée, par la définition même de M. Posons $b_0^- = 0$ et $b_0^+ = 0$. Les première et deuxième propriétés sont alors trivialement vérifiées.

Soit $k \geq 0$ tels que b_k^-, b_k^+ et $\tilde{b}_k$ soient déjà construits et vérifient les propriétés demandées. Nous avons alors

$$\|\tilde{b}_k\|_\alpha \leq M\beta^k \leq M \leq \varepsilon$$

et le lemme précédent appliqué avec $b = \tilde{b}_k$ nous fournit trois matrices b^-, b^+ et $\tilde{b}$. Posons $b_{k+1}^- = b^-$, $b_{k+1}^+ = b^+$ et $\tilde{b}_{k+1} = \tilde{b}$. La quatrième propriété est alors vérifiée.

Nous disposons, en outre, des inégalités suivantes : $\|\tilde{b}_{k+1}\|_\alpha \leq \beta\|\tilde{b}_k\|_\alpha$, $\|b_{k+1}^-\|_\alpha^- \leq D\|\tilde{b}_k\|_\alpha$ et $\|b_{k+1}^+\|_\alpha^+ \leq D\|\tilde{b}_k\|_\alpha$. On en déduit que les trois premières propriétés sont également vérifiées.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$P_n = (I + b_1^-)\cdots(I + b_n^-) \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$$

et

$$Q_n = (I + b_n^+)\cdots(I + b_1^+) \in M_q(\mathscr{B}_\alpha^+).$$

De la quatrième propriété on déduit que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$a = \psi_\alpha^-(P_n)\,(I + \tilde{b}_n)\,\psi_\alpha^+(Q_n).$$

En utilisant les trois premières et le fait que $\beta \leq 1/2$, nous obtenons

$$\sum_{k\geq 0} \|b_k^-\|_\alpha^- = DM\sum_{k\geq 0}\beta^k = 2DM \leq \frac{1}{4}.$$

D'après le lemme 6.2.5, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathscr{B}_\alpha^-$ vers une matrice inversible $c^- \in GL_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$ vérifiant

$$\|c^- - I\|_\alpha^- \leq 2 \sum_{k\geq 0} \|b_k^-\|_\alpha^- \leq 4DM \leq 4D\|a - I\|_\alpha.$$

De même, la suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathscr{B}_\alpha^+$ vers une matrice inversible $c^+ \in GL_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ vérifiant

$$\|c^+ - I\|_\alpha^+ \leq 2 \sum_{k\geq 0} \|b_k^+\|_\alpha^+ \leq 4DM \leq 4D\|a - I\|_\alpha.$$

Puisque la suite $(\tilde{b}_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, la suite $(\psi_\alpha^-(P_n)\,\psi_\alpha^+(Q_n))_{n\geq 0}$ converge vers a. On en déduit que

$$a = \psi_\alpha^-(c^-)\,\psi_\alpha^+(c^+).$$

□

6.2.2. Prolongement de sections d'un faisceau

Soit Ω un système de Banach associé au couple (K^-, K^+). Pour démontrer les théorèmes A et B, nous chercherons à prolonger des sections de faisceaux. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle propriété pour les systèmes de Cousin ; il s'agit d'une propriété d'approximation.

Définition 6.2.8. — *Un* **système de Cousin-Runge associé au couple** (K^-, K^+) *est un système de Cousin associé au même couple et tel que, quels que soient* $\alpha \in A$, $p, q \in \mathbf{N}$, $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_q \in \mathscr{C}_\alpha$ *et* $\delta \in \mathbf{R}_+^*$, *nous nous trouvions dans l'une des deux situations suivantes : soit il existe un élément inversible* f *de* $\mathscr{B}_\alpha^+$, *des éléments* $s'_1, \ldots, s'_p$ *de* $\mathscr{B}_\alpha^+$ *et* $t'_1, \ldots, t'_q$ *de* $\mathscr{B}_\alpha^-$ *tels que, quel que soient* $i \in [\![1, p]\!]$ *et* $j \in [\![1, q]\!]$, *on ait*

i) $\|\psi_\alpha^+(f^{-1}s_i - s'_i)\|_\alpha\, \|\psi_\alpha^+(f)\,\psi_\alpha^-(t_j)\|_\alpha \leq \delta$;
ii) $\|\psi_\alpha^+(f^{-1}s_i)\|_\alpha\, \|\psi_\alpha^+(f)\,\psi_\alpha^-(t_j) - \psi_\alpha^-(t'_j)\|_\alpha \leq \delta$,

soit il existe un élément inversible f *de* $\mathscr{B}_\alpha^-$, *des éléments* $s'_1, \ldots, s'_p$ *de* $\mathscr{B}_\alpha^+$ *et* $t'_1, \ldots, t'_q$ *de* $\mathscr{B}_\alpha^-$ *tels que, quel que soient* $i \in [\![1, p]\!]$ *et* $j \in [\![1, q]\!]$, *on ait*

i) $\|\psi_\alpha^-(f^{-1}t_j - t'_j)\|_\alpha\, \|\psi_\alpha^-(f)\,\psi_\alpha^+(s_i)\|_\alpha \leq \delta$;
ii) $\|\psi_\alpha^-(f^{-1}t_j)\|_\alpha\, \|\psi_\alpha^-(f)\,\psi_\alpha^+(s_i) - \psi_\alpha^+(s'_i)\|_\alpha \leq \delta$.

Nous utiliserons cette propriété par le biais du lemme suivant.

Lemme 6.2.9. — *Supposons que Ω soit un système de Cousin-Runge. Soit $\varepsilon > 0$ le nombre réel dont le théorème 6.2.7 assure l'existence. Soient $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules, $p, q \in \mathbf{N}$, $T^- \in \mathscr{F}(K^-)^p$, $T^+ \in \mathscr{F}(K^+)^q$, $U_0 = (u_{a,i}) \in M_{p,q}(\mathscr{O}(L))$ et $V_0 = (v_{b,j}) \in M_{q,p}(\mathscr{O}(L))$ telles que, dans $\mathscr{F}(L)$, on ait*

a) $T^- = U_0\, T^+$;

b) $T^+ = V_0\, T^-$.

Supposons qu'il existe $\alpha \in A$, $U, U_\delta \in M_{p,q}(\mathscr{B}_\alpha^+)$ et $V, V_\delta \in M_{q,p}(\mathscr{B}_\alpha^-)$ tels que

c) $\varphi_\alpha^+(U) = U_0$;

d) $\varphi_\alpha^-(V) = V_0$;

e) $\|\psi_\alpha^+(U_\delta - U)\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^-(V)\|_\alpha < \varepsilon$;

f) $\|\psi_\alpha^+(U)\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^-(V_\delta - V)\|_\alpha < \varepsilon$.

Alors il existe $S^- \in \mathscr{F}(M)^p$, $S^+ \in \mathscr{F}(M)^q$, $A^- \in GL_p(\mathscr{O}(K^-))$ et $A^+ \in GL_q(\mathscr{O}(K^+))$ vérifiant

i) $S^- = A^-\, T^-$ *dans* $\mathscr{F}(K^-)$;

ii) $S^+ = A^+\, T^+$ *dans* $\mathscr{F}(K^+)$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe $\alpha \in A$, $U, U_\delta \in M_{p,q}(\mathscr{B}_\alpha^+)$ et $V, V_\delta \in M_{q,p}(\mathscr{B}_\alpha^-)$ tels que

c) $\rho_\alpha^+(U) = U_0$;

d) $\rho_\alpha^-(V) = V_0$;

e) $\|\psi_\alpha^+(U_\delta - U)\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^-(V)\|_\alpha < \varepsilon$;

f) $\|\psi_\alpha^+(U)\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^-(V_\delta - V)\|_\alpha < \varepsilon$.

Posons $T_\delta^- = \rho_\alpha^-(V_\delta)\, T^-$ dans $\mathscr{F}(K^-)$. Dans $\mathscr{F}(L)$, nous avons alors

$$T_\delta^- - T^+ = \rho_\alpha(\psi_\alpha^-(V_\delta - V))\, T^- = \rho_\alpha(\psi_\alpha^-(V_\delta - V)\, \psi_\alpha^+(U))\, T^+.$$

Posons

$$A = I + \psi_\alpha^-(V_\delta - V)\, \psi_\alpha^+(U) \in M_q(\mathscr{C}_\alpha).$$

Nous avons alors

$$T_\delta^- = \rho_\alpha(A)\, T^+ \text{ dans } \mathscr{F}(L)$$

et

$$\|A - I\|_\alpha \leq \|\psi_\alpha^-(V_\delta - V)\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^+(U)\|_\alpha < \varepsilon.$$

D'après le théorème 6.2.7, il existe deux matrices $C^- \in GL_q(\mathscr{B}_\alpha^-)$ et $C^+ \in GL_q(\mathscr{B}_\alpha^+)$ telles que

$$A = \psi_\alpha^-(C^-)\, \psi_\alpha^+(C^+).$$

Posons

$$A^+ = \rho_\alpha^+(C^+) \in GL_q(\mathscr{O}(K^+)).$$

Dans $\mathscr{F}(L)$, nous avons alors

$$A^+ T^+ = \rho_\alpha \left(\psi_\alpha^- \left((C^-)^{-1}\right) A\right) T^+ = \rho_\alpha \left(\psi_\alpha^- \left((C^-)^{-1}\right)\right) T_\delta^- .$$

Nous pouvons donc définir un élément S^+ de $\mathscr{F}(M)^q$ par

1. $S^+_{|K^-} = \rho_\alpha^- \left((C^-)^{-1}\right) T_\delta^-$;
2. $S^+_{|K^+} = A^+ T^+$.

On procède de même pour construire la section S^-. □

Nous parvenons maintenant au résultat permettant de recoller les sections d'un faisceau.

Théorème 6.2.10. — *Supposons que Ω soit un système de Cousin-Runge. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules. Supposons qu'il existe deux entiers p et q, une famille $(t_1^-, \ldots, t_p^-)$ d'éléments de $\mathscr{F}(K^-)$ et une famille $(t_1^+, \ldots, t_q^+)$ d'éléments de $\mathscr{F}(K^+)$ dont les restrictions à L engendrent le même sous-$\mathscr{O}(L)$-module de $\mathscr{F}(L)$. Alors il existe $s_1^-, \ldots, s_p^-, s_1^+, \ldots, s_q^+ \in \mathscr{F}(M)$, $a^- \in GL_p(\mathscr{O}(K^-))$ et $a^+ \in GL_q(\mathscr{O}(K^+))$ tels que*

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = a^- \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \quad \textit{dans } \mathscr{F}(K^-)^p$$

et

$$\begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = a^+ \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix} \quad \textit{dans } \mathscr{F}(K^+)^q.$$

Démonstration. — Posons

$$T^- = \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ et } T^+ = \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, il existe $\alpha \in A$, $U = (u_{a,i}) \in M_{p,q}(\mathscr{C}_\alpha)$ et $V = (v_{b,j}) \in M_{q,p}(\mathscr{C}_\alpha)$ tels qu'on ait les égalités

$$T^- = \rho_\alpha(U)\, T^+ \text{ et } T^+ = \rho_\alpha(V)\, T^- \text{ dans } \mathscr{F}(L).$$

Considérons le nombre réel $\varepsilon > 0$ dont le théorème 6.2.7 assure l'existence. Quitte à échanger les compacts K^- et K^+, nous pouvons supposer que la première propriété des systèmes de Cousin-Runge est vérifiée. Il existe alors un élément inversible f de $\mathscr{B}_\alpha^+$, des éléments $\hat{u}_{a,i}$ de $\mathscr{B}_\alpha^+$, pour $(a,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, et $\hat{v}_{b,j}$ de $\mathscr{B}_\alpha^-$, pour $(b,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, vérifiant les conditions suivantes : quel que soient $(a,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$ et $(b,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, nous avons

i) $\|\psi_\alpha^+(f^{-1}u_{a,i} - \hat{u}_{a,i})\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^+(f)\, \psi_\alpha^-(v_{b,j})\|_\alpha < \varepsilon$;
ii) $\|\psi_\alpha^+(f^{-1}u_{a,i})\|_\alpha \, \|\psi_\alpha^+(f)\, \psi_\alpha^-(v_{b,j}) - \psi_\alpha^-(\hat{v}_{b,j})\|_\alpha < \varepsilon$.

Les matrices T^-, $\rho_\alpha^+(f)T^+$, $\rho_\alpha(\psi_\alpha^+(f^{-1})U)$ et $\rho_\alpha(\psi_\alpha^+(f)V)$ vérifient donc les hypothèses du lemme 6.2.9. Par conséquent, il existe $S^- \in \mathscr{F}(M)^p$, $S^+ \in \mathscr{F}(M)^q$, $A^- \in GL_p(\mathscr{O}(K^-))$ et $A^+ \in GL_q(\mathscr{O}(K^+))$ tels que

1. $S^-_{|K^-} = A^- T^-$;
2. $S^+_{|K^+} = A^+ \rho_\alpha^+(f)T^+$.

En posant

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = S^-, \quad \begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = S^+,$$

ainsi que $a^- = A^-$ et $a^+ = \rho_\alpha^+(f)A^+$, on obtient le résultat souhaité. Remarquons que $a^+ \in GL_q(\mathscr{O}(K^+))$ car f est inversible dans $\mathscr{B}_\alpha^+$. □

Indiquons, à présent, la façon dont ce résultat permet de démontrer le théorème A.

Corollaire 6.2.11. — *Supposons qu'il existe un système de Cousin-Runge associé au couple (K^-, K^+). Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini qui satisfait le théorème A sur les compacts K^- et K^+. Alors il le satisfait encore sur leur réunion M.*

Démonstration. — D'après le lemme 6.1.3 il existe deux entiers p et q, une famille $(t_1^-, \ldots, t_p^-)$ d'éléments de $\mathscr{F}(K^-)$ dont l'image engendre le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ en tout point x de K^+ et une famille $(t_1^+, \ldots, t_q^+)$ d'éléments de $\mathscr{F}(K^+)$ dont l'image engendre le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ en tout point x de K^+. En particulier, les restrictions à L de ces deux familles engendrent toutes deux $\mathscr{F}(L)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 6.2.10. Les sections $s_1^-, \ldots, s_p^-, s_1^+, \ldots, s_q^+$ de $\mathscr{F}(M)$ dont il assure l'existence engendrent le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ en tout point x de M. On en déduit le résultat annoncé. □

Expliquons, à présent, comment déduire le théorème B du théorème A. Insistons sur le fait que, dans la proposition qui suit, nous n'avons besoin d'associer aucun système de Banach au couple (K^-, K^+).

Proposition 6.2.12. — *Supposons que pour tout élément f de $\mathscr{O}(L)$, il existe un élément f^- de $\mathscr{O}(K^-)$ et un élément f^+ de $\mathscr{O}(K^+)$ qui vérifient l'égalité*

$$f = f^- + f^+ \text{ dans } \mathscr{O}(L).$$

Supposons également que tout faisceau de $\mathscr{O}_L$-modules cohérent satisfait le théorème B.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent qui satisfait le théorème A sur M. Soit

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{d} \mathscr{I}_0 \xrightarrow{d} \mathscr{I}_1 \xrightarrow{d} \cdots$$

une résolution flasque du faisceau $\mathscr{F}$. Soient $q \in \mathbf{N}^*$ et γ un cocycle de degré q sur M. Si γ est un cobord au voisinage des compacts K^- et K^+, alors c'est un cobord au voisinage de leur réunion M.

Démonstration. — Supposons qu'il existe $\beta^- \in \mathscr{I}_{q-1}(K^-)$ et $\beta^+ \in \mathscr{I}_{q-1}(K^+)$ tels que

$$d(\beta^-) = \gamma \text{ dans } \mathscr{I}_q(K^-) \text{ et } d(\beta^+) = \gamma \text{ dans } \mathscr{I}_q(K^+).$$

Supposons, tout d'abord que $q \geq 2$. Nous avons $d(\beta^- - \beta^+) = 0$ dans $\mathscr{I}_q(L)$. D'après le théorème B, nous avons $H^{q-1}(L, \mathscr{F}) = 0$. Par conséquent, il existe $\alpha \in \mathscr{I}_{q-2}(L)$ telle que $d(\alpha) = \beta^- - \beta^+$ dans $\mathscr{I}_{q-1}(L)$. Puisque le faisceau $\mathscr{I}_{q-2}$ est flasque, α se prolonge en une section sur M que nous noterons identiquement. Définissons $\beta \in \mathscr{I}_{q-1}(M)$ par $\beta = \beta^-$ au-dessus de K^- et $\beta = \beta^+ + d(\alpha)$ au-dessus de K^+. Nous avons alors l'égalité

$$d(\beta) = \gamma \text{ dans } \mathscr{I}_q(M)$$

et γ est un cobord au voisinage de M.

Intéressons-nous, à présent, au cas $q = 1$. Nous avons alors $d(\beta^- - \beta^+) = 0$ dans $\mathscr{I}_1(L)$. On en déduit que $\beta^- - \beta^+$ est un élément de $\mathscr{F}(L)$. D'après le théorème A et le lemme 6.1.3, il existe un entier positif m et une famille $(u_1, \ldots, u_m)$ d'éléments de $\mathscr{F}(M)$ dont les images engendrent le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ en tout point x de M. En d'autres termes, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^m & \to & \mathscr{F} \\ (a_1, \ldots, a_m) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i\, u_i \end{array}$$

est surjective au-dessus de M. Son noyau $\mathscr{N}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent. D'après le théorème B, nous avons $H^1(L, \mathscr{N}) = 0$. On en déduit que la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ engendre $\mathscr{F}(L)$ en tant que $\mathscr{O}(L)$-module. Par conséquent, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathscr{O}(L)$ tels que

$$\beta^- - \beta^+ = \sum_{i=1}^m \lambda_i\, u_i \text{ dans } \mathscr{F}(L).$$

Par hypothèse, quel que soit $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $\lambda_i^- \in \mathscr{O}(K^-)$ et $\lambda_i^+ \in \mathscr{O}(K^+)$ tels que

$$\lambda_i = \lambda_i^- - \lambda_i^+ \text{ dans } \mathscr{O}(L).$$

Nous avons alors l'égalité

$$\beta^- - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^- \, u_i = \beta^+ - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^+ \, u_i \text{ dans } \mathscr{F}(L).$$

On en déduit l'existence d'un élément β de $\mathscr{I}_0(M)$ vérifiant $d(\beta) = \gamma$ dans $\mathscr{I}_1(M)$.

$\square$

6.3. Parties compactes de la base

Dans la suite de ce chapitre, nous reprenons les notations du chapitre 4.

Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus au paragraphe précédent pour démontrer que certaines parties compactes de l'espace de base B sont de Stein. À cet effet, nous allons exhiber des systèmes de Cousin-Runge. Énonçons tout d'abord un résultat de théorie des nombres.

Lemme 6.3.1. — *Il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que, quel que soit*

$$(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\infty} \in \prod_{\sigma\in\Sigma_\infty} \hat{K}_\sigma,$$

il existe $y \in A$ vérifiant

$$\forall \sigma \in \Sigma_\infty,\ |y - x_\sigma|_\sigma \leq C.$$

Démonstration. — Notons r_1 le nombre de places réelles de K et $2r_2$ le nombre de places complexes de K. Le résultat découle directement du fait que l'image de l'anneau des entiers A par l'application

$$\begin{array}{rcl} K & \to & \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2} \simeq \mathbf{R}^{r_1+2r_2} \\ x & \mapsto & (\sigma(x))_{\sigma\in\Sigma_\infty} \end{array}$$

est un réseau. □

Le lemme qui suit sera utile pour exhiber des systèmes de Cousin.

Lemme 6.3.2. — *Soient $\sigma \in \Sigma$ et $u \in]0, l(\sigma)[$. Posons*

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ K_0^+ = B \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \text{ et } L_0 = K_0^- \cap K_0^+ = \{a_\sigma^u\}.$$

Il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que, quel que soit $a \in \mathscr{B}(L_0)$, il existe $a^- \in \mathscr{B}(K_0^-)$ et $a^+ \in \mathscr{B}(K_0^+)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $a = a^- - a^+$ *dans* $\mathscr{B}(L_0)$;

ii) $\|a^-\|_{K_0^-} \leq D\,\|a\|_{L_0}$;

iii) $\|a^+\|_{K_0^+} \leq D\,\|a\|_{L_0}$.

Démonstration. — Considérons la constante $C \in \mathbf{R}$ dont le lemme 6.3.1 assure l'existence. Nous pouvons, sans perdre de généralité, supposer que $C \geq 1$. Soit $a \in \mathscr{B}(L_0)$. Remarquons que l'anneau $\mathscr{B}(L_0)$ est isomorphe au corps $\hat{K}_\sigma$ muni de la valeur absolue $|.|_\sigma^u$. Dans le raisonnement qui suit, nous aurons besoin de connaître le type de σ.

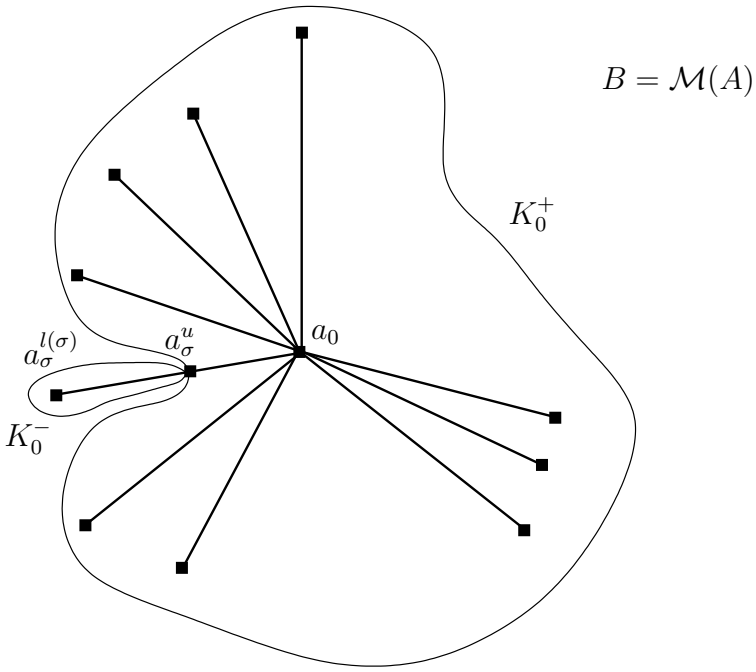

FIGURE 1. Les compacts K_0^- et K_0^+.

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Dans ce cas, nous avons

$$\mathscr{B}(K_0^-) = \hat{K}_\sigma \text{ et } \|.\|_{K_0^-} = \max(|.|_\sigma^u, |.|_\sigma)$$

et

$$\mathscr{B}(K_0^+) = A \text{ et } \|.\|_{K_0^+} = \max_{\sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}} (|.|_{\sigma'}).$$

Distinguons plusieurs cas. Supposons, tout d'abord, que $|a|_\sigma \geq 1$. Puisque $\sigma \in \Sigma_\infty$, le nombre réel $|a|_\sigma^u$ est un élément de $\hat{K}_\sigma$. Par définition de C, il existe $b \in A$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $|b + |a|_\sigma^u|_\sigma \leq C$;
2. $\forall \sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}$, $|b|_{\sigma'} \leq C$.

Quel que soit $\sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}$, nous avons donc

$$|b|_{\sigma'} \leq C \leq C\,|a|_\sigma^u.$$

De nouveau, nous allons distinguer deux cas. Supposons, tout d'abord, que $|b|_\sigma \geq 1$. De la première inégalité, nous tirons

$$\begin{array}{rcl} |b|_\sigma & \leq & |a|_\sigma^u + C \\ & \leq & (C+1)\,|a|_\sigma^u. \end{array}$$

Puisque $|b|_\sigma \geq 1$, nous avons également $|b|_\sigma^u \leq (C+1)\,|a|_\sigma^u$. Si $|b|_\sigma \leq 1$, nous avons encore $|b|_\sigma \leq (C+1)\,|a|_\sigma^u$.

Supposons, à présent, que $|a|_\sigma \leq 1$. Nous avons alors l'égalité $\|a\|_{K_0^-} = |a|_\sigma^u$. Nous posons $b = 0$.

Dans tous les cas, il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que $\|a+b\|_{K_0^-} \leq D\,|a|_\sigma^u$ et $\|b\|_{K_0^+} \leq D\,|a|_\sigma^u$. Nous pouvons, par exemple, choisir $D = C+2$. Les éléments $a^- = a+b$ de $\mathscr{B}(K_0^-)$ et $a^+ = b$ de $\mathscr{B}(K_0^+)$ vérifient les propriétés demandées.

Supposons, à présent, que $\sigma \in \Sigma_f$. Nous avons alors

$$\mathscr{B}(K_0^-) = \hat{A}_\sigma \text{ et } \|.\|_{K_0^-} = |.|_\sigma^u$$

et

$$\mathscr{B}(K_0^+) = A\left[\frac{1}{\sigma}\right] \text{ et } \|.\|_{K_0^+} = \max\left(|.|_\sigma^u, \max_{\sigma' \in \Sigma_\infty}(|.|_\sigma)\right).$$

Comme précédemment, nous allons distinguer plusieurs cas. Pour commencer, supposons que $|a|_\sigma \geq 1$. D'après le théorème d'approximation fort, il existe un élément b de $\bigcap_{\sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}} A_\sigma$ vérifiant

$$|b+a|_\sigma \leq 1.$$

En partculier, $b+a$ appartient à $\mathscr{B}(K_0^-)$. Par définition de la constante C, il existe $c \in A$ vérifiant la propriété suivante : quel que soit $\sigma' \in \Sigma_\infty$, nous avons $|b+c|_{\sigma'} \leq C$. On en déduit que, quel que soit $\sigma' \in \Sigma_\infty$, nous avons

$$|b+c|_{\sigma'} \leq C \leq C\,|a|_\sigma^u.$$

En outre, nous avons

$$|b+c|_\sigma^u \leq \max\left(|a|_\sigma^u, |a+b|_\sigma^u, |c|_\sigma^u\right) \leq |a|_\sigma^u.$$

Supposons, à présent, que $|a|_\sigma \leq 1$. Dans ce cas, a appartient à $\mathscr{B}(K^-)$. Nous posons $b = c = 0$.

Dans tous les cas, il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que $\|a+b+c\|_{K_0^-} \leq D\,|a|_\sigma^u$ et $\|b+c\|_{K_0^+} \leq D\,|a_k|_\sigma^u$. Nous pouvons, par exemple, choisir $D = C+1$. Les éléments $a^- = a+b+c$ de $\mathscr{B}(K_0^-)$ et $a^+ = b+c$ de $\mathscr{B}(K_0^+)$ vérifient les propriétés demandées. □

Intéressons-nous, à présent, à la propriété d'approximation qui intervient dans la définition des systèmes de Cousin-Runge.

Lemme 6.3.3. — *Soient $\sigma \in \Sigma$ et $u \in]0, l(\sigma)[$. Posons*

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ K_0^+ = B \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \text{ et } L_0 = K_0^- \cap K_0^+ = \{a_\sigma^u\}.$$

Soient $p, q \in \mathbf{N}$ et $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_q \in \mathscr{B}(L_0)$. Soit $\delta \in \mathbf{R}_+^*$. Si σ appartient à Σ_f, alors il existe un élément inversible f de $\mathscr{B}(K_0^+)$ et des éléments $s'_1, \ldots, s'_p$ de $\mathscr{B}(K_0^+)$ et $t'_1, \ldots, t'_q$ de $\mathscr{B}(K_0^-)$ tels que, quel que soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, on ait

i) $\|f^{-1}s_i - s'_i\|_{L_0} \|ft_j\|_{L_0} \leq \delta$;
ii) $\|f^{-1}s_i\|_{L_0} \|ft_j - t'_j\|_{L_0} \leq \delta$.

Si σ appartient à Σ_∞, alors il existe un élément inversible g de $\mathscr{B}(K_0^-)$ et des éléments $s''_1, \ldots, s''_p$ de $\mathscr{B}(K_0^+)$ et $t''_1, \ldots, t''_q$ de $\mathscr{B}(K_0^-)$ tels que, quel que soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, on ait

i) $\|gs_i - s''_i\|_{L_0} \|g^{-1}t_j\|_{L_0} \leq \delta$;
ii) $\|gs_i\|_{L_0} \|g^{-1}t_i - t''_i\|_{L_0} \leq \delta$.

Démonstration. — Posons $M = \max\{\|s_i\|_{L_0}, \|t_j\|_{L_0}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$. L'anneau de Banach $\mathscr{B}(L_0)$ n'est autre que le corps $\hat{K}_\sigma$ muni de la valeur absolue $|.|_\sigma^u$. Par conséquent, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, il existe un élément s_i^* de K tel que

$$\|s_i - s_i^*\|_{L_0} \leq \delta.$$

Distinguons maintenant deux cas. Supposons, tout d'abord, que σ est un élément de Σ_f. D'après le lemme 3.1.6, il existe $h \in A$ telle que

$$\begin{cases} |h|_\sigma < 1 \ ; \\ \forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}, \ |h|_{\sigma'} = 1. \end{cases}$$

Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, on ait

$$h^N s_i^* \in \hat{A}_\sigma = \mathscr{B}(K_0^-).$$

Posons

$$f = h^{-N} \in K.$$

Son image dans l'anneau $\mathscr{B}(K_0^+)$ est inversible. En outre, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, nous avons

$$\|f^{-1}s_i - f^{-1}s_i^*\|_{L_0} \leq \|f^{-1}\|_{L_0} \|s_i - s_i^*\|_{L_0} \leq \delta \, |f^{-1}|_\sigma^u.$$

Soit $j \in [\![1, q]\!]$. D'après le théorème d'approximation fort, il existe un élément t_j^* de $A[1/\sigma]$ tel que

$$\|ft_j - t_j^*\|_{L_0} \leq \delta.$$

En particulier, la fonction t_j^* définit un élément de $\mathscr{B}(K_0^+)$ et, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, nous avons

$$\|f^{-1}s_i\|_{L_0} \|ft_j - t_j^*\|_{L_0} \leq |f^{-1}|_\sigma^u \|s_i\|_{L_0} \delta \leq M\delta,$$

car $f^{-1} \in A$. Quel que soit $i \in [\![1,p]\!]$, nous avons également

$$\|f^{-1}s_i - f^{-1}s_i^*\|_{L_0}\,\|ft_j\|_{L_0} \leq \delta\,|f^{-1}|_\sigma^u\,|f|_\sigma^u\,\|t_j\|_{L_0} \leq M\delta.$$

Supposons, à présent, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Il existe $g \in A$ tel que, quel que soit $i \in [\![1,n]\!]$, on ait $gs_i^* \in A$. Remarquons que l'image de g dans $\mathscr{B}(K_0^-)$ est inversible et que gs_i^* est un élément de $\mathscr{B}(K_0^+)$. En outre, quel que soit $i \in [\![1,n]\!]$, nous avons

$$\|gs_i - gs_i^*\|_{L_0} \leq \|g\|_{L_0}\,\|s_i - s_i^*\|_{L_0} \leq |g|_\sigma^u\,\delta.$$

Choisissons un nombre réel $N > 0$ tel que

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \|gs_i\|_{L_0} \leq N.$$

Soit $j \in [\![1,q]\!]$. Il existe un élément t_j^* de K tel que

$$\|g^{-1}t_j - t_j^*\|_{L_0} \leq \frac{\delta}{N}.$$

La fonction t_j^* définit un élément de $\mathscr{B}(K_0^-)$ et, quel que soit $i \in [\![1,p]\!]$, vérifie

$$\|gs_i\|_{L_0}\,\|g^{-1}t_j - t_j^*\|_{L_0} \leq \|gs_i\|_{L_0}\,\frac{\delta}{N} \leq \delta.$$

Quel que soit $i \in [\![1,p]\!]$, nous avons encore

$$\|gs_i - s_i^*\|_{L_0}\,\|g^{-1}t_j\|_{L_0} \leq |g|_\sigma^u\,\delta\,|g^{-1}|_\sigma^u\,\|t_j\|_{L_0} \leq M\delta.$$

□

Les lemmes qui précèdent nous permettent d'exhiber de nombreux systèmes de Cousin-Runge.

Proposition 6.3.4. — *Soient $\sigma \in \Sigma$ et $u \in]0, l(\sigma)[$. Posons*

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ K_0^+ = B \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}].$$

Soient K^- et K^+ deux parties compactes et connexes de l'espace B dont l'intersection est le singleton $\{a_\sigma^u\}$. Il existe un système de Cousin-Runge associé au couple (K^-, K^+).

Démonstration. — Ce cas est particulièrement simple et nous allons construire un système de Cousin-Runge dont l'ensemble A est réduit à un seul élément. Quitte à échanger les compacts K^- et K^+, nous pouvons supposer que nous avons les inclusions

$$K^- \subset K_0^- \text{ et } K^+ \subset K_0^+.$$

Posons

$$(\mathscr{B}^-, \|.\|^-) = (\mathscr{B}(K_0^-), \|.\|_{K_0^-}),$$

$$(\mathscr{B}^+, \|.\|^+) = (\mathscr{B}(K_0^+), \|.\|_{K_0^+})$$

et

$$(\mathscr{C}, \|.\|) = (\mathscr{H}(a_\sigma^u), |.|_\sigma^u).$$

On définit de manière évidente des morphismes bornés ψ^- et ψ^+ comme dans la définition des systèmes de Banach. La proposition 3.1.21 permet de définir également des morphismes ρ^-, ρ^+ et ρ. L'ensemble de ces données forme un système de Banach associé au couple (K^-, K^+). Les deux lemmes qui précèdent assurent que c'est un système de Cousin-Runge. □

De ce résultat, nous allons déduire que toute partie compacte et connexe de l'espace B est un espace de Stein.

Théorème 6.3.5. — *Soit M une partie compacte et connexe de l'espace B. Tout faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini satisfait le théorème A.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini. Soit b un point de M. D'après le lemme 6.1.2, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur un voisinage du point b. Par compacité de M, il existe un entier p et des parties compactes et connexes $V_0, \ldots, V_p$ de M recouvrant M telles que, quel que soit $i \in [\![0, p]\!]$, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur V_i. Nous pouvons, en outre, supposer que, quel que soit $j \in [\![0, p-1]\!]$, les compacts $W_j = \bigcup_{0 \leq i \leq j} V_i$ et V_{j+1} s'intersectent en un ensemble réduit à un point de la forme a_σ^u, avec $\sigma \in \Sigma$ et $u \in]0, l(\sigma)[$. On montre alors, par récurrence et en utilisant à chaque étape la proposition 6.3.4 et le corollaire 6.2.11, que, quel que soit $j \in [\![0, p]\!]$, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur W_j. On obtient le résultat attendu en considérant le cas $j = p$. □

Théorème 6.3.6. — *Soit M une partie compacte et connexe de l'espace B. Tout faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent satisfait le théorème B.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent. Soit

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{d} \mathscr{I}_0 \xrightarrow{d} \mathscr{I}_1 \xrightarrow{d} \cdots$$

une résolution flasque du faisceau $\mathscr{F}$. Soient $q \in \mathbf{N}^*$ et γ un cocycle de degré q sur M. Soit b un point de M. Par définition, le cocycle γ est un cobord au voisinage du point b. En raisonnant comme dans la preuve qui précède et en utilisant la proposition 6.2.12, dont la première hypothèse est vérifiée d'après la proposition 6.3.4, au lieu du corollaire 6.2.11, on montre que le cocycle γ est un cobord sur le compact M. Puisque ce résultat vaut pour tout cocycle, nous avons finalement montré que le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème B. □

Corollaire 6.3.7. — *Toute partie compacte et connexe de l'espace B est un espace de Stein.*

6.4. Parties compactes des fibres

Appliquons, à présent, les résultats obtenus dans le cas des parties compactes des fibres de la droite analytique X. Nous commencerons par démontrer l'existence de systèmes de Cousin-Runge.

Lemme 6.4.1. — *Soient V une partie compacte de B et u, v, w trois nombres réels vérifiant $0 < u \leq v \leq w$. Pour tout élément f de l'anneau $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle$, il existe des éléments f^- de $\mathscr{B}(V)\langle |T| \leq v\rangle$ et f^+ de $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle$ tels que*

i) $f = f^- + f^+$ *dans* $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle$;
ii) $\|f^-\|_{V,v} \leq \|f\|_{V,u,v}$;
iii) $\|f^+\|_{V,u,w} \leq \|f\|_{V,u,v}$.

Démonstration. — Il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de $\mathscr{B}(V)$ telle que

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, T^k \in \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle.$$

Posons

$$f^- = \sum_{k\geq 0} a_k\, T^k \in \mathscr{B}(V)\langle |T| \leq v\rangle$$

et

$$f^+ = \sum_{k\leq -1} a_k\, T^k \in \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle.$$

Ces éléments vérifient l'égalité

$$f = f^- + f^+ \text{ dans } \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle.$$

Intéressons-nous, à présent, aux normes de ces séries. Remarquons que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, T^k\right\|_{V,u,v} &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \|a_k\|_V\, \max(u^k, v^k)\\ &= \sum_{k\leq -1} \|a_k\|_V\, u^k + \sum_{k\geq 0} \|a_k\|_V\, v^k.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\|f^-\|_{V,v} = \sum_{k\geq 0} \|a_k\|_V\, v^k \leq \|f\|_{V,u,v}$$

et

$$\|f^+\|_{V,u,w} = \sum_{k\leq -1} \|a_k\|_V\, u^k \leq \|f\|_{V,u,v}.$$

□

Lemme 6.4.2. — *Soient V une partie compacte de B et u, v, w trois nombres réels vérifiant $0 < u \leq v \leq w$. Soient p et q deux entiers et $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_q$ des éléments de $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle$. Soit $\delta \in \mathbf{R}_+^*$. Alors, il existe un élément inversible f de $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle$, des éléments $s'_1, \ldots, s'_p$ de $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle$ et $t'_1, \ldots, t'_q$ de $\mathscr{B}(V)\langle |T| \leq v\rangle$ tels que, quel que soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, on ait*

i) $\|f^{-1}s_i - s'_i\|_{V,u,v}\, \|ft_j\|_{V,u,v} \leq \delta$;
ii) $\|f^{-1}s_i\|_{V,u,v}\, \|ft_j - t'_j\|_{V,u,v} \leq \delta$.

Démonstration. — Pour $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, notons

$$s_i = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^{(i)}\, T^k \in \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle$$

et

$$t_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k^{(j)}\, T^k \in \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq v\rangle.$$

Soit $M > 0$ tel que

$$\max_{1 \leq i \leq p} (\|s_i\|_{V,u,v}) \leq M \text{ et } \max_{1 \leq j \leq q} (\|t_j\|_{V,u,v}) \leq M.$$

Il existe $k_0 \leq 0$ tel que, quels que soit $j \in [\![1, q]\!]$, on ait

$$\sum_{k \leq k_0 - 1} \|b_k^{(j)}\|_V\, u^k \leq \frac{\delta}{M}.$$

Posons

$$f = T^{-k_0} \in \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle.$$

C'est un élément inversible de $\mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle$. Pour $j \in [\![1, q]\!]$, posons

$$t'_j = f \sum_{k \geq k_0} b_k^{(j)}\, T^k = \sum_{k \geq 0} b_{k+k_0}^{(j)}\, T^k \in \mathscr{B}(V)\langle |T| \leq v\rangle.$$

Quels que soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}s_i\|_{V,u,v}\, \|ft_j - t'_j\|_{V,u,v} &\leq \|T^{k_0}\|_{V,u,v}\, \|s_i\|_{V,u,v} \left\| f \sum_{k \leq k_0 - 1} b_k^{(j)}\, T^k \right\|_{V,u,v} \\
&\leq u^{k_0}\, M \left\| \sum_{k \leq k_0 - 1} b_k^{(j)}\, T^{k - k_0} \right\|_{V,u,v} \\
&\leq u^{k_0}\, M \sum_{k \leq k_0 - 1} \|b_k^{(j)}\|_V\, u^{k - k_0} \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Il existe un élément s_i'' de $\mathscr{B}(V)[T,T^{-1}]$ tel que

$$\|s_i - s_i''\|_{V,u,v} \leq \frac{\delta}{M}\left(\frac{v}{u}\right)^{k_0}.$$

Posons

$$s_i' = f^{-1}s_i'' = T^{k_0}s_i'' \in \mathscr{B}(V)\langle u \leq |T| \leq w\rangle.$$

Quel que soit $j \in [\![1,q]\!]$, nous avons alors

$$\|f^{-1}s_i - s_i'\|_{V,u,v}\,\|ft_j\|_{V,u,v} \leq u^{k_0}\,\frac{\delta}{M}\left(\frac{v}{u}\right)^{k_0} v^{-k_0}\,M \leq \delta.$$

□

Proposition 6.4.3. — *Soit b un point de B. Soit r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{|\mathscr{H}(b)^*|}$. Notons x le point η_r de la fibre X_b. Soient K^- et K^+ deux parties compactes et connexes de la fibre X_b dont l'intersection est égale au singleton $\{x\}$. Alors, il existe un système de Cousin-Runge associé au couple (K^-,K^+).*

Démonstration. — Il existe un nombre réel w tel que la partie compacte $K^- \cup K^+$ soit contenue dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon w de la fibre X_b. Quitte à échanger les compacts K^- et K^+, nous pouvons supposer que

$$K^- \subset \left\{y \in X_b \,\middle|\, |T(y)| \leq r\right\}.$$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de voisinages compacts du point b dans B qui compose un système fondamental de voisinages de ce point. On déduit facilement l'existence d'une telle suite de la description explicite de la topologie de l'espace B présentée au numéro 3.1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante et de limite r d'éléments de $]0,r[$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante et de limite r d'éléments de $]r,w[$. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, nous posons

$$(\mathscr{B}_n^-, \|.\|_n^-) = (\mathscr{B}(V_n)\langle |T| \leq v_n\rangle, \|.\|_{V_n,v_n}),$$

$$(\mathscr{B}_n^+, \|.\|_n^+) = (\mathscr{B}(V_n)\langle u_n \leq |T| \leq w\rangle, \|.\|_{V_n,u_n,w})$$

et

$$(\mathscr{C}, \|.\|_n) = (\mathscr{B}(V_n)\langle u_n \leq |T| \leq v_n\rangle, \|.\|_{V_n,u_n,v_n}).$$

Quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}$, on définit de manière évidente des morphismes ψ_n^-, ψ_n^+, ρ_n^-, ρ_n^+ et ρ_n comme dans la définition des systèmes de Banach. Le fait que les trois derniers soient bornés découle de la proposition 2.1.1. L'ensemble de ces données forme un système de Banach associé au couple (K^-,K^+). Les trois premières propriétés sont évidentes et la dernière découle du théorème 2.4.8. Les deux lemmes qui précèdent assurent que ce système est un système de Cousin-Runge. □

Corollaire 6.4.4. — *Soit b un point de l'espace B. Soit $P_b(T)$ un polynôme à coefficients dans $\mathscr{H}(b)$. Soit r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{|\mathscr{H}(b)^*|}$. Posons*

$$L_0 = \{z \in X_b \,|\, |P_b(T)(z)| = r\}.$$

Soient s et t deux éléments de $\mathbf{R}_+$ tels que $s \leq r \leq t$. Considérons les parties compactes de X définies par

$$K_0^- = \{z \in X_b \,|\, s \leq |P_b(T)(z)| \leq r\}$$

et

$$K_0^+ = \{z \in X_b \,|\, r \leq |P_b(T)(z)| \leq t\}.$$

Notons M_0 leur réunion. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_{M_0}$-modules de type fini qui satisfait le théorème A sur les compacts K_0^- et K_0^+. Alors il le satisfait encore sur M_0.

Démonstration. — D'après le lemme 3.1.22, il existe un voisinage ouvert U du point b dans B et un polynôme $P(T)$ à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$ dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est $P_b(T)$. Comme expliqué au numéro 5.5, le morphisme

$$\mathscr{O}(U)[T] \to \mathscr{O}(U)[T,S]/(P(S)-T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(U)[S]$$

induit un morphisme

$$\varphi : Z = X_U \to X_U = Y.$$

C'est un morphisme topologique fini, d'après la proposition 5.5.1. Posons

$$K^- = \{z \in X_b \,|\, s \leq |T(z)| \leq r\}$$

et

$$K^+ = \{z \in X_b \,|\, r \leq |T(z)| \leq t\}.$$

Ces deux compacts ont pour intersection l'ensemble réduit au point η_r de la fibre X_b, point que nous noterons y. Notons M leur réunion. Un calcul direct montre que, pour tous nombres réels u et v, nous avons

$$\varphi^{-1}\left(\{z \in X_b \,|\, u \leq |T(z)| \leq v\}\right) = \{z \in X_b \,|\, u \leq |P_b(T)(z)| \leq v\}.$$

En particulier, nous avons

$$\varphi^{-1}(K^-) = K_0^-,\ \varphi^{-1}(K^+) = K_0^+,\ \varphi^{-1}(y) = L_0 \text{ et } \varphi^{-1}(M) = M_0.$$

On en déduit que la partie compacte L_0 est finie.

D'après le lemme 6.1.3, il existe un entier p et des éléments $t_1^-, \ldots, t_p^-$ de $\mathscr{F}(K_0^-)$ dont les images engendrent le $\mathscr{O}_{Z,z}$-module $\mathscr{F}_z$, pour tout élément z de K_0^-. De même, il existe un entier q et des éléments $t_1^+, \ldots, t_q^+$ de $\mathscr{F}(K_0^+)$ dont les images engendrent le $\mathscr{O}_{Z,z}$-module $\mathscr{F}_z$, pour tout élément z de K_0^+. Le corollaire 5.6.2

et la proposition 5.6.6 nous permettent d'appliquer le théorème 5.5.4. Il assure que la famille $(1, S, \ldots, S^{d-1})$, où d désigne le degré du polynôme P, engendre le $\mathscr{O}_{Y,y}$-module $(\varphi_*\mathscr{O}_Z)_y$. Quitte à remplacer la famille $(t_i^-)_{1\leq i\leq p}$ de $\varphi_*\mathscr{F}(K^-)$ par la famille $(S^k\, t_i^-)_{0\leq k\leq d-1, 1\leq i\leq p}$, nous pouvons supposer que le sous-$\mathscr{O}_{Y,y}$-module de $(\varphi_*\mathscr{F})_y$ qu'elle engendre est identique au sous-$(\varphi_*\mathscr{O}_Z)_y$-module de $(\varphi_*\mathscr{F})_y$ qu'elle engendre. D'après le théorème 5.1.4, les morphismes naturels

$$(\varphi_*\mathscr{O}_Z)_y \to \prod_{z\in L_0} \mathscr{O}_{Z,z} \text{ et } (\varphi_*\mathscr{F})_y \to \prod_{z\in L_0} \mathscr{F}_z$$

sont des isomorphismes. Pour tout élément z de L_0, la famille $(t_1^-, \ldots, t_p^-)$ engendre le $\mathscr{O}_{Z,z}$-module $\mathscr{F}_z$. Par conséquent, elle engendre également le $\mathscr{O}_{Y,y}$-module $(\varphi_*\mathscr{F})_y$. De même, quitte à remplacer la famille $(t_i^+)_{1\leq i\leq q}$ de $\varphi_*\mathscr{F}(K^+)$ par la famille $(S^k\, t_i^+)_{0\leq k\leq d-1, 1\leq i\leq q}$, nous pouvons supposer qu'elle engendre le même $\mathscr{O}_{Y,y}$-module $(\varphi_*\mathscr{F})_y$.

D'après le théorème 6.2.10 et la proposition 6.4.3, il existe alors des éléments $s_1^-, \ldots, s_p^-, s_1^+, \ldots, s_q^+$ de $\mathscr{F}(M)$, a^- de $GL_p(\mathscr{O}(K^-))$ et a^+ de $GL_q(\mathscr{O}(K^+))$ tels que

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = a^- \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{F}(K^-)^p$$

et

$$\begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = a^+ \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{F}(K^+)^q.$$

Les matrices a^- et a^+ induisent des éléments a_0^- et a_0^+ de $GL_p(\mathscr{O}(K_0^-))$ et $GL(\mathscr{O}(K_0^+))$ tels que

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = a_0^- \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{F}(K_0^-)^p$$

et

$$\begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = a_0^+ \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{F}(K_0^+)^q.$$

Les sections $s_1^-, \ldots, s_p^-, s_1^+, \ldots, s_q^+$ de $\mathscr{F}(M_0)$ engendrent alors le $\mathscr{O}_{Z,z}$-module $\mathscr{F}_z$ en tout point z de M_0. On en déduit le résultat annoncé. □

Intéressons-nous, maintenant, plus spécifiquement au cas des fibres centrale et extrêmes.

Théorème 6.4.5. — *Soit b un point central ou extrême de l'espace B. Soit M une partie compacte et connexe de la fibre X_b. Tout faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini satisfait le théorème A.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini. D'après le lemme 6.1.2, tout point de M possède un voisinage sur lequel le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A. Par compacité de M, il existe un entier p et des parties compactes et connexes $M_0, \ldots, M_p$ de M recouvrant M telles que, quel que soit $i \in [\![0, p]\!]$, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur M_i. Nous pouvons, en outre, supposer que, quel que soit $j \in [\![0, p-1]\!]$, les compacts $N_j = \bigcup_{0 \leq i \leq j} M_i$ et M_{j+1} s'intersectent en un ensemble réduit à un point de type 3. Quel que soit $j \in [\![0, p-1]\!]$, il existe alors un polynôme irréductible $P_b(T)$ à coefficients dans $\mathscr{H}(b)$, un élément r de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ et des éléments s et t de $\mathbf{R}_+$ vérifiant $s \leq r \leq t$ tels que l'on ait soit

$$N_j \subset \{z \in X_b \,|\, s \leq |P_b(T)(z)| \leq r\} \text{ et } M_{j+1} \subset \{z \in X_b \,|\, r \leq |P_b(T)(z)| \leq t\},$$

soit

$$M_{j+1} \subset \{z \in X_b \,|\, s \leq |P_b(T)(z)| \leq r\} \text{ et } N_j \subset \{z \in X_b \,|\, r \leq |P_b(T)(z)| \leq t\}.$$

On montre alors, par récurrence et en utilisant le corollaire précédent à chaque étape, que, quel que soit $j \in [\![0, p]\!]$, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur N_j. On obtient le résultat attendu en considérant le cas $j = p$. □

Remarque 6.4.6. — Nous pouvons en fait démontrer le résultat précédent pour tous les points de B_{um}. Il suffit de savoir écrire tout compact M de X_b comme réunion de compacts $M_0, \ldots, M_p$, pour un certain entier p, vérifiant les mêmes propriétés que ceux de la preuve du théorème : pour tout élément j de $[\![0, p-1]\!]$, il existe un polynôme $P_b(T)$ à coefficients dans $\mathscr{H}(b)$, un élément r de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{|\mathscr{H}(b)^*|}$ et des éléments s et t de $\mathbf{R}_+$ vérifiant $s \leq r \leq t$ tels que l'on ait

$$N_j = \bigcup_{1 \leq i \leq j} M_i = \big\{z \in X_b \,\big|\, |P_b(T)(z)| = r\big\}$$

et soit

$$N_j \subset \{z \in X_b \,|\, s \leq |P_b(T)(z)| \leq r\} \text{ et } M_{j+1} \subset \{z \in X_b \,|\, r \leq |P_b(T)(z)| \leq t\},$$

soit

$$M_{j+1} \subset \{z \in X_b \,|\, s \leq |P_b(T)(z)| \leq r\} \text{ et } N_j \subset \{z \in X_b \,|\, r \leq |P_b(T)(z)| \leq t\}.$$

On peut démontrer que, pour tout élément r de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{|\mathscr{H}(b)^*|}$ et tout polynôme irréductible P_b à coefficients dans $\mathscr{H}(b)$, l'ensemble

$$\left\{z \in X_b \,\middle|\, |P_b(T)(z)| = r\right\}$$

est réduit à un point. Le résultat concernant le découpage des compacts s'obtient alors en utilisant le fait que les points du type précédent sont denses et la structure d'arbre de l'espace X_b.

Lemme 6.4.7. — *Soit b un point de l'espace B. Soit $P_b(T)$ un polynôme à coefficients dans $\mathscr{H}(b)$. Soit r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{|\mathscr{H}(b)^*|}$. Posons*

$$L_0 = \left\{z \in X_b \,\middle|\, |P_b(T)(z)| = r\right\}.$$

Soit $t \geq r$. Considérons les parties compactes de X définies par

$$K_0^- = \left\{z \in X_b \,\middle|\, |P_b(T)(z)| \leq r\right\}$$

et

$$K_0^+ = \left\{z \in X_b \,\middle|\, r \leq |P_b(T)(z)| \leq t\right\}.$$

Leur intersection est le compact L_0. Pour tout élément f de $\mathscr{O}(L_0)$, il existe un élément f^- de $\mathscr{O}(K_0^-)$ et un élément f^+ de $\mathscr{O}(K_0^+)$ qui vérifient l'égalité

$$f = f^- + f^+ \text{ dans } \mathscr{O}(L_0).$$

Démonstration. — Commençons par le même raisonnement que dans le corollaire qui précède. D'après le lemme 3.1.22, il existe un voisinage ouvert U du point b dans B et un polynôme $P(T)$ à coefficients dans $\mathscr{O}(U)$ dont l'image dans $\mathscr{H}(b)[T]$ est $P_b(T)$. Comme expliqué au numéro 5.5, le morphisme

$$\mathscr{O}(U)[T] \to \mathscr{O}(U)[T,S]/(P(S)-T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(U)[S]$$

induit un morphisme

$$\varphi : Z = X_U \to X_U = Y.$$

Posons

$$K^- = \left\{y \in X_b \,\middle|\, |T(y)| \leq r\right\}$$

et

$$K^+ = \left\{y \in X_b \,\middle|\, r \leq |T(y)| \leq t\right\}.$$

Ces deux compacts ont pour intersection l'ensemble réduit au point η_r de la fibre X_b, point que nous noterons x. D'après le théorème 5.6.7, les morphismes naturels

$$\mathscr{O}(K^-)[S]/(P(S)-T) \to \mathscr{O}(K_0^-),$$
$$\mathscr{O}(K^+)[S]/(P(S)-T) \to \mathscr{O}(K_0^+)$$

et

$$\mathscr{O}_{Y,x}[S]/(P(S)-T) \to \mathscr{O}(L_0)$$

sont des isomorphismes. Par conséquent, il suffit de démontrer le résultat pour le point x et les parties compactes K^- et K^+. Le résultat découle alors de l'existence d'un système de Cousin associé au couple (K^-, K^+) (*cf.* proposition 6.4.3). □

Théorème 6.4.8. — *Soit b un point central ou extrême de l'espace B. Soit M une partie compacte et connexe de la fibre X_b. Tout faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini satisfait le théorème B.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent. Soit

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{d} \mathscr{I}_0 \xrightarrow{d} \mathscr{I}_1 \xrightarrow{d} \cdots$$

une résolution flasque du faisceau $\mathscr{F}$. Soient $q \in \mathbf{N}^*$ et γ un cocycle de degré q sur M. Par définition, tout point de M possède un voisinage sur lequel le cocycle γ est un cobord. Par compacité de M, il existe un entier p et des parties compactes et connexes $M_0, \ldots, M_p$ de M recouvrant M telles que, quel que soit $i \in [\![0,p]\!]$, le cocycle γ soit un cobord sur M_i. Nous pouvons, en outre, supposer que, quel que soit $j \in [\![0,p-1]\!]$, les compacts $N_j = \bigcup_{0\leq i\leq j} M_i$ et M_{j+1} s'intersectent en un ensemble réduit à un point de type 3.

Montrons, par récurrence, que, quel que soit $j \in [\![0,p]\!]$, le cocycle γ est un cobord sur le compact N_j. Le cas $j=0$ est vrai par hypothèse. Soit $j \in [\![0,p-1]\!]$ et supposons que le cocycle γ est un cobord sur le compact N_j. D'après le lemme précédent, pour tout élément f de $\mathscr{O}(N_j \cap M_{j+1})$, il existe un élément f^- de $\mathscr{O}(N_j)$ et un élément f^+ de $\mathscr{O}(M_{j+1})$ qui vérifient l'égalité

$$f = f^- + f^+ \text{ dans } \mathscr{O}(N_j \cap M_{j+1}).$$

En outre, puisque l'intersection $N_j \cap M_{j+1}$ est réduite à un point, tout faisceau de $\mathscr{O}_{N_j\cap M_{j+1}}$-modules vérifie le théorème B. Finalement, tout faisceau de $\mathscr{O}_{N_j\cup M_{j+1}}$-modules cohérent satisfait le théorème A, d'après le théorème 6.4.5. La proposition 6.2.12 assure alors que le cocycle γ est un cobord sur le compact $N_j \cup M_{j+1} = N_{j+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons en particulier prouvé que le cocycle γ est un cobord sur le compact $M = N_p$. Puisque ce résultat vaut pour tout cocycle, nous avons finalement montré que le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème B. □

Remarque 6.4.9. — Nous pouvons en fait démontrer le résultat précédent pour tous les points de B_{um} en procédant de même et en utilisant le résultat dont il est question à la remarque 6.4.6.

Le cas des parties compactes des fibres internes peut se traiter, comme toujours, en se ramenant au cas classique des espaces analytiques sur un corps valué complet. Nous pouvons en déduire des résultats indépendants de la fibre considérée, par exemple dans le cas des couronnes.

Théorème 6.4.10. — *Soient b un point de l'espace B et r et s deux éléments de $\mathbf{R}_+$ vérifiant l'inégalité $r \leq s$. Posons*

$$C = \{y \in X_b \,|\, r \leq |T(y)| \leq s\}.$$

La couronne C est un sous-espace de Stein de la droite analytique X.

Démonstration. — Si b est un point central ou extrême de l'espace B, le résultat découle des théorèmes 6.4.5 et 6.4.8.

Supposons désormais que le point b est un point interne de l'espace B. Notons

$$j_b : X_b \hookrightarrow X$$

le morphisme d'inclusion. D'après la proposition 3.4.6, il suffit de montrer que la couronne $j_b^{-1}(C)$ est un espace de Stein. Nous sommes donc ramenés au cas d'un espace analytique au-dessus du corps valué complet $\mathscr{H}(b)$.

D'après le lemme 3.2.12, l'ensemble des parties de la forme

$$\{y \in X_b \,|\, r' < |T(y)| < s'\},$$

où r' et s' sont deux éléments de $\mathbf{R}_+$ vérifiant $r' \prec r$ et $s' > s$, est un système fondamental de voisinages de $j_b^{-1}(C) = C$ dans l'espace analytique $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(b)}$. Le corollaire 6.1.8 assure alors qu'il suffit de montrer que ces couronnes ouvertes de la droite $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(b)}$ sont des espaces de Stein.

Distinguons, à présent, deux cas. Si le point b appartient à une branche ultramétrique, son corps résiduel $\mathscr{H}(b)$ est muni d'une valeur absolue ultramétrique non triviale. D'après le théorème 2.4 de [**21**], la proposition 3.3.4 de [**2**] et le théorème 6.1.9, les couronnes ouvertes de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(b)}$ sont bien des espaces de Stein.

Si le point b appartient maintenant à une branche archimédienne, nous distinguons deux nouveaux cas. Si $\mathscr{H}(b) = \mathbf{C}$, c'est un résultat connu que les couronnes ouvertes sont des espaces de Stein (on sait même que tout ouvert de $\mathbf{C}$ est de Stein, puisque tout ouvert de $\mathbf{C}$ est un domaine d'holomorphie). Si $\mathscr{H}(b) = \mathbf{R}$, le résultat est donc vrai après extension du corps de base à $\mathbf{C}$ et l'on conclut en utilisant le théorème 6.1.11, comme indiqué à la remarque 6.1.13.

□

Remarque 6.4.11. — Lorsque le point b est un point interne d'une branche ultramétrique, nous avons essentiellement redémontré un cas particulier de la proposition 3.1 de [**15**].

6.5. Couronnes compactes de la droite

Dans ce paragraphe, nous démontrons que certaines parties compactes de la droite analytique X sont de Stein. Comme précédemment, nous commencerons par exhiber des systèmes de Cousin-Runge.

Lemme 6.5.1. — *Soient $\sigma \in \Sigma$, $u \in]0, l(\sigma)[$ et $s, t \in \mathbf{R}_+$ tels que $s \leq t$. Posons*

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ K_0^+ = B \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \text{ et } L_0 = K_0^- \cap K_0^+ = \{a_\sigma^u\}.$$

Soit $D \in \mathbf{R}$ la constante dont le lemme 6.3.2 assure l'existence. Quels que soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$, et quel que soit $f \in \mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$, il existe $f^- \in \mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ et $f^+ \in \mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $f = f^- - f^+$ *dans* $\mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$;
ii) $\|f^-\|_{K_0^-, s, t} \leq D\, \|f\|_{L_0, s, t}$;
iii) $\|f^+\|_{K_0^+, s, t} \leq D\, \|f\|_{L_0, s, t}$.

Démonstration. — Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$, et $f \in \mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. Par définition, il existe une famille $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de $\mathscr{B}(L_0) = \hat{K}_\sigma$ telle que l'on ait

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k\, T^k$$

et que les séries

$$\sum_{k \geq 0} a_k\, t^k \text{ et } \sum_{k \leq 0} a_k\, s^k$$

convergent. Soit $k \in \mathbf{Z}$. D'après le lemme 6.3.2, il existe des éléments a_k^- de $\mathscr{B}(K_0^-)$ et a_k^+ de $\mathscr{B}(K_0^+)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $a_k = a_k^- - a_k^+$ dans $\mathscr{B}(L_0)$;
ii) $\|a_k^-\|_{K_0^-} \leq D\, \|a_k\|_{L_0}$;
iii) $\|a_k^+\|_{K_0^+} \leq D\, \|a_k\|_{L_0}$.

Posons

$$f^- = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^-\, T^k$$

et

$$f^+ = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^+\, T^k.$$

Ces séries vérifient les conditions requises. □

Contrairement au précédent, le résultat d'approximation ne nous semble pas pouvoir se déduire du résultat similaire pour les parties compactes de la base (*cf.* lemme 6.3.3).

Lemme 6.5.2. — *Soient* $\sigma \in \Sigma$, $u \in \,]0, l(\sigma)[$ *et* $s, t \in \mathbf{R}_+$ *tels que* $s \leq t$. *Posons*

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ K_0^+ = B \setminus \,]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \text{ et } L_0 = K_0^- \cap K_0^+ = \{a_\sigma^u\}.$$

Soient $p, q \in \mathbf{N}$ *et* $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_q \in \mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. *Soit* $\delta \in \mathbf{R}_+^*$. *Si* σ *appartient à* Σ_f, *alors il existe un élément inversible* f *de* $\mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ *et des éléments* $s'_1, \ldots, s'_p$ *de* $\mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ *et* $t'_1, \ldots, t'_q$ *de* $\mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ *tels que, quel que soient* $i \in [\![1, p]\!]$ *et* $j \in [\![1, q]\!]$, *on ait*

i) $\|f^{-1}s_i - s'_i\|_{L_0,s,t}\, \|ft_j\|_{L_0,s,t} \leq \delta$;
ii) $\|f^{-1}s_i\|_{L_0,s,t}\, \|ft_j - t'_j\|_{L_0,s,t} \leq \delta$.

Si σ *appartient à* Σ_∞, *alors il existe un élément inversible* g *de* $\mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ *et des éléments* $s''_1, \ldots, s''_p$ *de* $\mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ *et* $t''_1, \ldots, t''_q$ *de* $\mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ *tels que, quel que soient* $i \in [\![1, p]\!]$ *et* $j \in [\![1, q]\!]$, *on ait*

i) $\|gs_i - s''_i\|_{L_0,s,t}\, \|g^{-1}t_j\|_{L_0,s,t} \leq \delta$;
ii) $\|gs_i\|_{L_0,s,t}\, \|g^{-1}t_i - t''_i\|_{L_0,s,t} \leq \delta$.

Démonstration. — Posons $M = \max\{\|s_i\|_{L_0,s,t}, \|t_j\|_{L_0,s,t},\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. La fonction s_i appartient à $\mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. Par conséquent, il existe une famille $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\hat{K}_\sigma$ telle que

$$s_i = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, T^k$$

et les séries

$$\sum_{k\geq 0} |a_k|_\sigma^u\, t^k \text{ et } \sum_{k\leq 0} |a_k|_\sigma^u\, s^k$$

convergent. Il existe $n_i, n'_i \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\left\| s_i - \sum_{k=n_i}^{n'_i} a_k\, T^k \right\|_{L_0,s,t} \leq \delta.$$

Il existe également $s_i^* \in K[T, T^{-1}]$ tel que

$$\left\| \sum_{k=n_i}^{n'_i} a_k\, T^k - s_i^* \right\|_{L_0,s,t} \leq \delta.$$

Distinguons deux cas. Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_f$. D'après le lemme 3.1.6, il existe $h \in A$ telle que

$$\begin{cases} |h|_\sigma < 1 \ ; \\ \forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\},\ |h|_{\sigma'} = 1. \end{cases}$$

Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, on ait $h^N\, s_i^* \in \hat{A}_\sigma[T, T^{-1}]$. En particulier, la fonction $h^N\, s_i^*$ définit un élément de $\mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. Posons

$$f = h^{-N} \in K.$$

C'est un élément inversible de $\mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. En outre, nous avons

$$\|f^{-1}s_i - f^{-1}s_i^*\|_{L_0,s,t} \leq \|f^{-1}\|_{L_0,s,t}\, \|s_i - s_i^*\|_{L_0,s,t} \leq 2\delta\, |f^{-1}|_\sigma^u.$$

Soit $j \in [\![1, q]\!]$. La fonction t_j appartient à $\mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. Par conséquent, il existe une famille $(b_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\hat{K}_\sigma$ telle que

$$f t_j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k\, T^k$$

et les séries

$$\sum_{k\geq 0} |b_k|_\sigma^u\, t^k \ \text{ et } \ \sum_{k\leq 0} |b_k|_\sigma^u\, s^k$$

convergent. Il existe $m_j, m_j' \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\left\| f t_j - \sum_{k=m_j}^{m_j'} b_k\, T^k \right\|_{L_0,s,t} \leq \delta.$$

Par le théorème d'approximation fort, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe des éléments $c_{m_j}, \ldots, c_{m_j'}$ de K tels que, quel que soit $k \in [\![m_j, m_j']\!]$, on ait

1. $\forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\},\ c_k \in \hat{A}_{\sigma'}$;
2. $|b_k - c_k|_\sigma^u \leq \varepsilon$.

On en déduit qu'il existe $t_j^* \in A[1/\sigma][T, T^{-1}]$ tel que

$$\left\| \sum_{k=m_j}^{m_j'} b_k\, T^k - t_j^* \right\|_{L_0,s,t} \leq \delta.$$

En particulier, la fonction t_j^* définit un élément de $\mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ et, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, nous avons

$$\|f^{-1}s_i\|_{L_0,s,t}\, \|f t_j - t_j^*\|_{L_0,s,t} \leq |f^{-1}|_\sigma^u\, \|s_i\|_{L_0,s,t}\, 2\delta \leq 2M\delta,$$

car $f^{-1} \in A$. Quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, nous avons également

$$\|f^{-1}s_i - f^{-1}s_i^*\|_{L_0,s,t}\, \|f t_j\|_{L_0,s,t} \leq 2\delta\, |f^{-1}|_\sigma^u\, |f|_\sigma^u\, \|t_j\|_{L_0,s,t} \leq 2M\delta.$$

Supposons, à présent, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Il existe $g \in A$ tel que, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $gs_i^* \in A[T, T^{-1}]$. Remarquons que l'image de g dans l'anneau $\mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ est inversible et que gs_i^* définit un élément de $\mathscr{B}(K_0^+)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$. En outre, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons

$$\|gs_i - gs_i^*\|_{L_0,s,t} \leq \|g\|_{L_0} \|s_i - s_i^*\|_{L_0,s,t} \leq 2\,|g|_\sigma^u\,\delta.$$

Soit $j \in [\![1, q]\!]$. Puisque la fonction $g^{-1}t_j$ appartient à $\mathscr{B}(L_0)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$, il existe une famille $(b_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\hat{K}_\sigma$ telle que

$$g^{-1}t_j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k\,T^k$$

et les séries

$$\sum_{k\geq 0} |b_k|_\sigma^u\,t^k \text{ et } \sum_{k\leq 0} |b_k|_\sigma^u\,s^k$$

convergent. Il existe $m_j, m_j' \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\left\| g^{-1}t_j - \sum_{k=m_j}^{m_j'} b_k\,T^k \right\|_{L_0,s,t} \leq \frac{\delta}{2\,\|gs_i\|_{L_0,s,t}}.$$

En approchant chacun des coefficients b_k, avec $k \in [\![m_j, m_j']\!]$, on montre qu'il existe également $t_j^* \in K[T, T^{-1}]$ tel que

$$\left\| \sum_{k=m_j}^{m_j'} b_k\,T^k - t_j^* \right\|_{L_0,s,t} \leq \frac{\delta}{2\,\|gs_i\|_{L_0,s,t}}.$$

La fonction t_j^* définit un élément de $\mathscr{B}(K_0^-)\langle s \leq |T| \leq t\rangle$ et, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, vérifie

$$\|gs_i\|_{L_0,s,t}\,\|g^{-1}t_j - t_j^*\|_{L_0,s,t} \leq \|gs_i\|_{L_0,s,t}\,2\,\frac{\delta}{2\,\|gs_i\|_{L_0,s,t}} \leq \delta.$$

Quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, nous avons encore

$$\|gs_i - s_i^*\|_{L_0,s,t}\,\|g^{-1}t_j\|_{L_0,s,t} \leq 2\,|g|_\sigma^u\,\delta\,|g^{-1}|_\sigma^u\,\|t_j\|_{L_0,s,t} \leq 2M\delta.$$

□

Proposition 6.5.3. — *Soient $\sigma \in \Sigma$, $u \in]0, l(\sigma)[$ et $s, t \in \mathbf{R}_+$ tels que $s \leq t$. Posons*

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ K_0^+ = B \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}],\ L_0 = K_0^- \cap K_0^+ = \{a_\sigma^u\}$$

et

$$L = \overline{C}_{L_0}(s, t) = \{x \in X \,|\, s \leq |T(x)| \leq t\}.$$

Soient K^- une partie compacte de $\overline{C}_{K_0^-}(s,t)$ et K^+ une partie compacte de $\overline{C}_{K_0^+}(s,t)$ dont l'intersection est le compact L. Il existe un système de Cousin-Runge associé au couple (K^-, K^+).

Démonstration. — Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante et de limite s d'éléments de $[0,s[$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante et de limite t d'éléments de $]t,+\infty[$. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, nous posons

$$(\mathscr{B}_n^-, \|.\|_n^-) = (\mathscr{B}(K_0^-)\langle s_n \leq |T| \leq t_n\rangle, \|.\|_{K_0^-,s_n,t_n}),$$
$$(\mathscr{B}_n^+, \|.\|_n^+) = (\mathscr{B}(K_0^+)\langle s_n \leq |T| \leq t_n\rangle, \|.\|_{K_0^+,s_n,t_n})$$

et

$$(\mathscr{C}, \|.\|_n) = (\mathscr{B}(L_0)\langle s_n \leq |T| \leq t_n\rangle, \|.\|_{L_0,s_n,t_n}).$$

Quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}$, on définit de manière évidente des morphismes bornés ψ_n^- et ψ_n^+ comme dans la définition des systèmes de Banach. Le théorème 3.2.19 permet de définir également des morphismes ρ_n^-, ρ_n^+ et ρ_n. La proposition 2.1.1 assure qu'ils sont bornés. L'ensemble de ces données forme un système de Banach associé au couple (K^-, K^+). Les trois premières propriétés sont évidentes et la dernière découle de nouveau du théorème 3.2.19, joint à la proposition 3.1.21. Les deux lemmes qui précèdent assurent que ce système est un système de Cousin-Runge. □

Nous allons déduire de ces résultats le fait que les couronnes compactes et connexes de la droite analytique X sont des espaces de Stein.

Théorème 6.5.4. — *Soit V une partie compacte et connexe de l'espace B. Soient s et t deux nombres réels tels que $0 \leq s \leq t$. Posons*

$$M = \overline{C}_V(s,t) = \{x \in X_V \mid s \leq |T(x)| \leq t\}.$$

Tout faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini satisfait le théorème A.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules de type fini. Soit b un point de V. D'après le théorème 6.4.10, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur le compact $X_b \cap M$ et donc sur un voisinage de ce compact, d'après le lemme 6.1.2. En utilisant le lemme qui précède, on en déduit qu'il existe un voisinage compact V_b du point b dans V tel que le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur le compact $X_{V_b} \cap M$. Par compacité de M, il existe un entier p et des parties compactes et connexes $V_0, \ldots, V_p$ de V recouvrant V telles que, quel que soit $i \in [\![0,p]\!]$, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur $X_{V_i} \cap M$. Nous pouvons, en outre, supposer que, quel que soit $j \in [\![0,p-1]\!]$, les compacts $W_j = \bigcup_{0\leq i\leq j} V_i$ et V_{j+1} s'intersectent en un ensemble réduit à un point de type 3. On montre

alors, par récurrence et en utilisant à chaque étape la proposition 6.5.3 et le corollaire 6.2.11, que, quel que soit $j \in [\![0, p]\!]$, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème A sur $X_{W_j} \cap M$. On obtient le résultat attendu en considérant le cas $j = p$. □

Théorème 6.5.5. — *Soit V une partie compacte et connexe de l'espace B. Soient s et t deux nombres réels tels que $0 \leq s \leq t$. Posons*

$$M = \overline{C}_V(s,t) = \{x \in X_V \mid s \leq |T(x)| \leq t\}.$$

Tout faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent satisfait le théorème B.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules cohérent. Soit

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{d} \mathscr{I}_0 \xrightarrow{d} \mathscr{I}_1 \xrightarrow{d} \cdots$$

une résolution flasque du faisceau $\mathscr{F}$. Soient $q \in \mathbf{N}^*$ et γ un cocycle de degré q sur M. Soit b un point de V. D'après le théorème 6.4.10, le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème B sur le compact $X_b \cap M$. Par conséquent, le cocycle γ est un cobord au voisinage du compact $X_b \cap M$. En utilisant le lemme 3.2.12, on en déduit qu'il existe un voisinage compact V_b du point b dans V tel que le cocycle γ soit sur le compact $X_{V_b} \cap M$. En raisonnant comme dans la preuve qui précède et en utilisant la proposition 6.2.12, dont la première hypothèse est vérifiée d'après la proposition 6.5.3, au lieu du corollaire 6.2.11, on montre que le cocycle γ est un cobord sur le compact M. Puisque ce résultat vaut pour tout cocycle, nous avons finalement montré que le faisceau $\mathscr{F}$ vérifie le théorème B. □

Théorème 6.5.6. — *Soit V une partie compacte et connexe de l'espace B. Soient s et t deux nombres réels tels que $0 \leq s \leq t$. La couronne compacte*

$$\overline{C}_V(s,t) = \{x \in X_V \mid s \leq |T(x)| \leq t\}$$

est un espace de Stein.

6.6. Lemniscates de la droite

Dans cette partie, nous allons montrer que les théorèmes A et B sont satisfaits pour les faisceaux cohérents définis sur les couronnes ouvertes de la droite analytique X et les lemniscates. Ici encore, nous nous inspirerons des techniques utilisées en géométrie analytique complexe. Pour toute couronne ouverte C, nous considèrerons une famille croissante de couronnes fermées dont la réunion est égale à C. Nous montrerons alors que cette famille forme une exhaustion de Stein (*cf.* [**14**], IV, §1, définition 6). Il nous restera alors à montrer que toute partie possédant une exhaustion de Stein est de Stein.

La preuve que nous proposons ici suit de très près l'ouvrage [**14**] de H. Grauert et R. Remmert. Plus précisément, nous nous sommes inspirés de la partie IV, §1 pour les définition et propriétés des exhaustions de Stein et de la partie IV, §4, pour montrer que les familles croissantes de couronnes fermées considérées en satisfont les conditions.

Nous traiterons finalement le cas des lemniscates en faisant appel au théorème 6.1.10 et aux résultats sur les morphismes finis démontrés au chapitre 5.

6.6.1. Exhaustions de Stein

Commençons par rappeler la définition d'une exhaustion.

Définition 6.6.1. — *Soit S un espace topologique. Une suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties compactes de S est une* **exhaustion de** *S si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) quel que soit $n \in \mathbf{N}$, le compact K_n est contenu dans l'intérieur de K_{n+1} ;
ii) la réunion des compacts K_n est égale à S.

Le résultat qui suit est classique (*cf.* [**14**], IV, §1, théorème 4) et nous permettra de démontrer une partie du théorème B pour les faisceaux cohérents définis sur les couronnes ouvertes.

Théorème 6.6.2. — *Soient S un espace topologique et $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une exhaustion de S. Soient $\mathscr{S}$ un faisceau de groupes abéliens sur S et $q \geq 2$ un nombre entier. Supposons que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$H^{q-1}(K_n, \mathscr{S}) = H^q(K_n, \mathscr{S}) = 0.$$

Alors on a également

$$H^q(S, \mathscr{S}) = 0.$$

Définition 6.6.3. — *Soient* $(A, \|.\|_A)$ *et* $(B, \|.\|_B)$ *deux anneaux munis de seminormes. Soit* $\varphi : A \to B$ *un morphisme d'anneaux. On dit que le* **morphisme** φ *est* **borné** *s'il existe un nombre réel* M *tel que, pour tout élément* a *de* A*, nous ayons*

$$\|\varphi(a)\|_B \leq M \, \|a\|_A.$$

Venons-en, à présent, aux exhaustions de Stein (*cf.* [**14**], IV, §1, définition 6).

Définition 6.6.4. — *Soient* $(S, \mathscr{O}_S)$ *un espace localement annelé et* $\mathscr{S}$ *un faisceau de* $\mathscr{O}_S$*-modules cohérent. Une suite* $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de parties compactes et de Stein de* S *est une* **exhaustion de Stein de** S **relativement au faisceau** $\mathscr{S}$ *si c'est une exhaustion de* S *et si, quel que soit* $n \in \mathbf{N}$*, il existe une seminorme* $\|.\|_n$ *sur* $\mathscr{S}(K_n)$ *telle que, quel que soit* $n \in \mathbf{N}$*, les propriétés suivantes soient vérifiées :*

i) la partie $\mathscr{S}(S)_{|K_n}$ *de* $\mathscr{S}(K_n)$ *est dense pour* $\|.\|_n$ *;*
ii) l'application de restriction $(\mathscr{S}(K_{n+1}), \|.\|_{n+1}) \to (\mathscr{S}(K_n), \|.\|_n)$ *est bornée ;*
iii) l'application de restriction $(\mathscr{S}(K_{n+1}), \|.\|_{n+1}) \to (\mathscr{S}(K_n), \|.\|_n)$ *envoie toute suite de Cauchy sur une suite convergente ;*
iv) tout élément s *de* $\mathscr{S}(K_{n+1})$ *vérifiant* $\|s\|_{n+1} = 0$ *est nul sur* K_n*.*

Cette notion nous permettra de compléter la démonstration du théorème B pour les faisceaux cohérents définis sur les couronnes ouvertes, par l'intermédiaire du résultat suivant (*cf.* [**14**], IV, §1, théorème 7).

Théorème 6.6.5. — *Soient* $(S, \mathscr{O}_S)$ *un espace localement annelé et* $\mathscr{S}$ *un faisceau de* $\mathscr{O}_S$*-modules cohérent. Supposons qu'il existe une exhaustion de Stein de* S *relativement au faisceau* $\mathscr{S}$*. Alors nous avons*

$$H^1(S, \mathscr{S}) = 0.$$

En regroupant les résultats des deux théorèmes qui précèdent et celui du théorème 6.1.9, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 6.6.6. — *Soit* $(S, \mathscr{O}_S)$ *un espace localement annelé. Supposons que, pour tout faisceau de* $\mathscr{O}_S$*-modules cohérent* $\mathscr{S}$*, l'espace* S *possède une exhaustion de Stein relativement à* $\mathscr{S}$*. Alors, l'espace* S *est de Stein.*

6.6.2. Fermeture des modules

Pour montrer que les exhaustions naturelles des couronnes ouvertes par des couronnes fermées sont bien des exhaustions de Stein, nous avons besoin de résultats de fermeture sur certains faisceaux de modules. Nous leur consacrons

cette partie. Les preuves que nous proposons sont inspirées de [**17**], II, D, théorèmes 2 et 3.

Commençons par introduire une notation. Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique, y un point de Y et V un voisinage du point y dans Y. Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{M}$ un sous-module de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$. Nous noterons $\mathscr{M}(V)$ le $\mathscr{O}_Y(V)$-module constitué des éléments F de $\mathscr{O}_Y(V)^p$ dont le germe F_y en y appartient à $\mathscr{M}$. Définissons, maintenant, la notion de module fortement engendré. Nous l'utiliserons constamment dans cette partie.

Définition 6.6.7. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique et y un point de Y. Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{M}$ un sous-module de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$. Soient V un voisinage du point y dans Y et $\|.\|$ une norme sur $\mathscr{O}_Y(V)$. Nous munissons le module produit $\mathscr{O}_Y(V)^p$ de la norme, que nous noterons encore $\|.\|$, donnée par le maximum des normes des coefficients. Soient $q \in \mathbf{N}$ et $G_1, \ldots, G_q$ des éléments de $\mathscr{O}_Y(V)^p$. On dit que la famille $(G_1, \ldots, G_q)$* **engendre fortement le module $\mathscr{M}$ sur V pour la norme** *$\|.\|$ s'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout élément F de $\mathscr{M}(V)$, il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_q$ dans $\mathscr{O}_Y(V)$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

i) $F = \sum_{i=1}^{q} f_i\, G_i$ *dans* $\mathscr{M}(V)$ *;*

ii) quel que soit $i \in [\![1, q]\!]$, nous avons $\|f_i\| \leq C\, \|F\|$.

On dit que le module $\mathscr{M}$ est **fortement engendré sur V pour la norme** *$\|.\|$ s'il existe une famille finie de $\mathscr{O}_Y(V)^p$ qui engendre fortement le module $\mathscr{M}$ sur V pour la norme $\|.\|$.*

Les systèmes de générateurs forts jouissent de propriétés agréables.

Lemme 6.6.8. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$, $(Y', \mathscr{O}_{Y'})$ et $(Y'', \mathscr{O}_{Y''})$ des espaces analytiques, y, y' et y'' des points de Y, Y' et Y'', p, p', p'' des entiers et $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$, $\mathscr{M}''$ des sous-modules de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$, $\mathscr{O}_{Y',y'}^{p'}$ et $\mathscr{O}_{Y'',y''}^{p''}$. Soient V, V' et V'' des voisinages des points y, y' et y'' dans Y, Y' et Y'' et $\|.\|$, $\|.\|'$ et $\|.\|''$ des normes sur $\mathscr{O}_Y(V)$, $\mathscr{O}_{Y'}(V')$ et $\mathscr{O}_{Y''}(V'')$. Supposons qu'il existe une suite exacte courte de groupes abéliens*

$$0 \to \mathscr{M}'(V') \xrightarrow{u} \mathscr{M}(V) \xrightarrow{v} \mathscr{M}''(V'') \to 0$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) le morphisme u est une isométrie ;

ii) il existe un morphisme borné $u_0 : \mathscr{O}_{Y'}(V') \to \mathscr{O}_Y(V)$ qui vérifie

$$\forall f' \in \mathscr{O}_{Y'}(V'),\ \forall F' \in \mathscr{M}(V'),\ u(f'\, F') = u_0(f')\, u(F')\ ;$$

iii) le morphisme v est borné ;
iv) il existe un morphisme borné $\tau : \mathscr{O}_{Y''}(V'') \to \mathscr{O}_Y(V)$ qui vérifie

$$\forall f'' \in \mathscr{O}_{Y''}(V''),\ \forall F \in \mathscr{M}(V),\ v(\tau(f'')\,F) = f''\,v(F).$$

Si les modules $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ sont fortement engendrés sur V' et V'' pour les normes $\|.\|'$ et $\|.\|''$, alors le module $\mathscr{M}$ est fortement engendré sur V pour la norme $\|.\|$.

Démonstration. — Commençons par traduire les hypothèses sur les morphismes bornés. Il existe des constantes $D_{u_0}, D_v, D_\tau \in \mathbf{R}$ telles que, quel que soit $f' \in \mathscr{O}_{Y'}(V')$, on ait

$$\|u_0(f')\| \leq D_{u_0}\,\|f'\|',$$

quel que soit $F \in \mathscr{M}(V)$, on ait

$$\|v(F)\|'' \leq D_v\,\|F\|$$

et, quel que soit $f'' \in \mathscr{O}_{Y''}(V'')$, on ait

$$\|\tau(f'')\| \leq D_\tau\,\|f''\|''.$$

Supposons que les modules $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ sont fortement engendrés sur V' et V'' pour les normes $\|.\|'$ et $\|.\|''$. Il existe un entier $r' \in \mathbf{N}$ et une famille $(G'_1, \ldots, G'_{r'})$ de $\mathscr{M}'(V')$ qui engendre fortement le module $\mathscr{M}'$ sur V' pour la norme $\|.\|'$, avec une certaine constante $C' \in \mathbf{R}$. De même, il existe un entier $r'' \in \mathbf{N}$ et une famille $(G''_1, \ldots, G''_{r''})$ de $\mathscr{M}''(V'')$ qui engendre fortement le module $\mathscr{M}''$ sur V'' pour la norme $\|.\|''$, avec une certaine constante $C'' \in \mathbf{R}$. Quel que soit $i \in [\![1, r']\!]$, nous posons

$$H'_i = u(G'_i).$$

Quel que soit $j \in [\![1, r'']\!]$, nous choisissons un élément H''_j de $\mathscr{M}(V)$ tel que

$$v(H''_j) = G''_j.$$

Nous allons montrer que la famille $(H'_1, \ldots, H'_{r'}, H''_1, \ldots, H''_{r''})$ de $\mathscr{M}(V)$ engendre fortement le module $\mathscr{M}$ sur V pour la norme $\|.\|$.

Soit $F \in \mathscr{M}(V)$. Alors $v(F) \in \mathscr{M}'(V')$. Il existe donc $f''_1, \ldots, f''_{r''} \in \mathscr{O}_{Y''}(V'')$ tels que l'on ait

i) $v(F) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r''} f''_j\,G''_j$;
ii) $\forall j \in [\![1, r'']\!],\ \|f''_j\|'' \leq C''\,\|v(F)\|''$.

Posons

$$F_0 = F - \sum_{j=1}^{r''} \tau(f''_j)\, H''_j.$$

Quel que soit $j \in [\![1, r'']\!]$, nous avons

$$\|\tau(f''_j)\| \leq D_\tau \, \|f''_j\|'' \leq D_\tau C'' \, \|v(F)\|'' \leq D_\tau C'' D_v \, \|F\|.$$

Nous en déduisons que

$$\|F_0\| \leq \left(1 + D_\tau C'' D_v \sum_{j=1}^{r''} \|H''_j\|\right) \|F\|.$$

Posons

$$M = 1 + D_\tau C'' D_v \sum_{j=1}^{r''} \|H''_j\|.$$

Nous avons

$$v(F_0) = v(F) - \sum_{j=1}^{r''} v(\tau(f''_j)\, H''_j) = v(F) - \sum_{j=1}^{r''} f''_j \, G''_j = 0.$$

Par conséquent, $F_0 \in \mathrm{Ker}(v) = \Im(u)$. On en déduit qu'il existe $F' \in \mathscr{M}'(V')$ tel que

$$u(F') = F_0.$$

Il existe également $f'_1, \ldots, f'_{r'} \in \mathscr{O}_{Y'}(V')$ tels que l'on ait

i) $F' = \displaystyle\sum_{i=1}^{r'} f'_i \, G'_i$;

ii) $\forall i \in [\![1, r']\!]$, $\|f'_i\|' \leq C' \, \|F'\|'$.

Nous avons finalement

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \sum_{j=1}^{r''} \tau(f''_j)\, H''_j \\ &= u\left(\sum_{i=1}^{r'} f'_i \, G'_i\right) + \sum_{j=1}^{r''} \tau(f''_j)\, H''_j \\ &= \sum_{i=1}^{r'} u_0(f'_i)\, H'_i + \sum_{j=1}^{r''} \tau(f''_j)\, H''_j. \end{aligned}$$

Nous avons vu précédemment que la norme des coefficients $\tau(f''_j)$, avec $j \in [\![1, r'']\!]$, est bornée en fonction de celle de $\|F\|$. En outre, quel que soit $i \in [\![1, r']\!]$, nous avons

$$\|u_0(f'_i)\| \leq D_{u_0} \, \|f'_i\|' \leq D_{u_0} C' \, \|F'\|' \leq D_{u_0} C' \, \|F_0\| \leq D_{u_0} C' M \, \|F\|.$$

On en déduit que la famille $(H'_1, \ldots, H'_{r'}, H''_1, \ldots, H''_{r''})$ de $\mathscr{M}(V)$ engendre fortement le module $\mathscr{M}$ sur V pour la norme $\|.\|$. □

Corollaire 6.6.9. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique et y un point de Y. Soient V un voisinage du point y dans Y et $\|.\|$ une norme sur $\mathscr{O}_Y(V)$. Supposons que tous les idéaux de $\mathscr{O}_{Y,y}$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|.\|$. Alors, quel que soit $p \in \mathbf{N}^*$, tous les sous-modules de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|.\|$.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le résultat par récurrence. L'initialisation pour $p = 1$ n'est autre que l'hypothèse. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ pour lequel le résultat est vrai. Soit $\mathscr{M}$ un sous-module de $\mathscr{O}_{Y,y}^{p+1}$. Notons $\mathscr{M}'$ l'idéal de $\mathscr{O}_{Y,y}$ composé des éléments f de $\mathscr{O}_{Y,y}$ tels que $(0, \ldots, 0, f)$ appartient à $\mathscr{M}$. Notons $\mathscr{M}''$ le sous-module de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$ dont les éléments sont les p premières composantes des éléments de $\mathscr{M}$. Les morphismes naturels

$$0 \to \mathscr{M}'(V) \xrightarrow{u} \mathscr{M}(V) \xrightarrow{v} \mathscr{M}''(V) \to 0$$

forment une suite exacte courte de groupes abéliens. Montrons que les propriétés du lemme 6.6.8 sont vérifiées. Le morphisme u est bien une isométrie. Choisissons pour u_0 le morphisme identité sur $\mathscr{O}_Y(V)$. Les propriétés du point *ii)* sont alors vérifiées. Le morphisme v est borné (et l'on peut même choisir la constante 1). Nous pouvons choisir pour τ le morphisme identité sur $\mathscr{O}_Y(V)$. L'hypothèse de l'énoncé nous assure que l'idéal $\mathscr{M}'$ est fortement engendré sur V pour la norme $\|.\|$. L'hypothèse de récurrence nous assure que tel est également le cas pour le module $\mathscr{M}''$. D'après le lemme 6.6.8, le module $\mathscr{M}$ est, lui aussi, fortement engendré sur V pour la norme $\|.\|$. □

Énonçons, à présent, quelques conditions permettant d'assurer que certains modules possèdent des systèmes de générateurs forts.

Lemme 6.6.10. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique et y un point de Y. Soit V un voisinage du point y dans Y. Munissons l'anneau $\mathscr{O}_Y(V)$ de la norme uniforme $\|.\|_V$. Supposons que le morphisme de restriction $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_{Y,y}$ est injectif et que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un corps. Alors, quel que soit $p \in \mathbf{N}^*$, tous les sous-modules de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|.\|_V$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 6.6.9, il suffit de montrer que tous les idéaux de $\mathscr{O}_{Y,y}$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|.\|_V$. Puisque l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un corps, il ne possède que deux idéaux : $\mathscr{O}_{Y,y}$ et (0). Il est évident que la famille (1) engendre fortement l'idéal $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V pour la

norme $\|.\|_V$. L'injectivité du morphisme $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_{Y,y}$ assure que la famille (0) engendre fortement l'idéal $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V pour la norme $\|.\|_V$. □

Lemme 6.6.11. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique et y un point de Y. Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un anneau de valuation discrète. Soit V un voisinage du point y dans Y et π une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V. Alors, la famille (π) engendre fortement l'idéal $\pi\,\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V pour la norme $\|.\|_V$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction des définitions. □

Corollaire 6.6.12. — *Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un espace analytique et y un point de Y. Supposons que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un anneau de valuation discrète. Notons $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Soit V un voisinage du point y dans Y et π une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V. Supposons que le morphisme de restriction $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_{Y,y}$ est injectif. Alors, quel que soit $p \in \mathbf{N}^*$, tous les sous-modules de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|.\|_V$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 6.6.9, il suffit de montrer que tous les idéaux de $\mathscr{O}_{Y,y}$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|.\|_V$. Puisque l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un anneau de valuation discrète, ses idéaux sont de la forme (0) ou (π^n) avec $n \in \mathbf{N}$. L'injectivité du morphisme $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_{Y,y}$ assure que la famille (0) engendre fortement l'idéal (0) sur V pour la norme $\|.\|_V$. On constate immédiatement que la famille (1) engendre fortement $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V pour la norme $\|.\|_V$. Finalement, on montre, par récurrence, en utilisant le lemme précédent, que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la famille (π^n) engendre fortement l'idéal $\pi^n\,\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V pour la norme $\|.\|_V$. □

Appliquons ces résultats au cas de la base B et de l'espace X.

Corollaire 6.6.13. — *Soit Y l'un des deux espaces B et X. Soit y un point de Y en lequel l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète. Il existe un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts du point y dans Y tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$ et tout entier $p \in \mathbf{N}^*$, tout sous-module de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$ est fortement engendré sur V pour la norme $\|.\|_V$.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.6.5 et le théorème 4.4.2, le principe du prolongement analytique vaut au voisinage de tout point de l'espaces Y. Par conséquent, pour toute partie connexe V contenant le point y, le morphisme de restriction $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_{Y,y}$ est injectif.

Supposons, tout d'abord, que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un corps. D'après le lemme 6.6.10 et la remarque qui précède, il suffit de démontrer que le point y possède un système fondamental de voisinages compacts et connexes. C'est évident pour l'espace B et c'est encore vrai pour l'espace X, d'après le théorème 4.4.1.

Supposons, à présent, que l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un anneau de valuation discrète. Soit π une uniformisante de l'anneau $\mathscr{O}_{Y,y}$ et U un voisinage du point y sur lequel elle est définie. D'après le corollaire 6.6.12 et la remarque figurant au début de la preuve, il suffit de montrer que le point y de Y possède un système fondamental $\mathscr{V}$ de voisinages compacts et connexes tel que, pour tout élément V de $\mathscr{V}$, la fonction π est une uniformisante forte de l'anneau $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur V. C'est le cas, d'après le lemme 4.1.10 et le théorème 4.4.7. □

Il nous reste à traiter le cas des points rigides des fibres extrêmes de l'espace X. Soient V une partie compacte de B et t un nombre réel strictement positif. D'après la proposition 3.2.14, le morphisme naturel $A[T] \to \mathscr{O}(V)[\![T]\!]$ se prolonge un un morphisme injectif

$$j_{V,t} : \mathscr{O}(\overline{D}_V(t)) \hookrightarrow \mathscr{O}(V)\langle |T| \leq t\rangle^{\dagger}.$$

Soit f un élément de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$. Il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{O}(V)$ telle que l'on ait l'égalité

$$j_{V,t}(f) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\, T^k \text{ dans } \mathscr{O}(V)\langle |T| \leq t\rangle^{\dagger}.$$

Nous posons alors

$$\|f\|_{V,t} = \sum_{k\in\mathbf{N}} \|a_k\|_V\, t^k \in \mathbf{R}_+.$$

La fonction $\|.\|_{V,t}$ définit une norme sur l'anneau $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$.

Lemme 6.6.14. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Posons $V_0 = [a_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Soit x le point de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ défini par l'équation $T(x) = 0$. Soient V un voisinage compact et connexe du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans V_0 et t un élément de l'intervalle $]0,1[$. Pour tout élément F de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ dont l'image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est divisible par $\pi_{\mathfrak{m}}$, il existe un élément $d_{V,t}(F)$ de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ qui vérifie l'égalité*

$$F = \pi_{\mathfrak{m}}\, d_{V,t}(F) \text{ dans } \mathscr{O}(\overline{D}_V(t)).$$

Démonstration. — Soit un élément F de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ dont l'image dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est divisible par $\pi_{\mathfrak{m}}$. Considérons la restriction de la fonction F à la trace E du disque $\overline{D}_V(t)$ sur la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Cette fonction est nulle au voisinage du point x. Le principe du prolongement analytique sur $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ assure

qu'elle est nulle en tout point de E. Or, d'après le corollaire 4.2.5, en tout point y de E différent de x, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $\pi_{\mathfrak{m}}$. On en déduit que la fonction F est divisible par $\pi_{\mathfrak{m}}$ au voisinage de tout point de E. Soit z un point de $\overline{D}_V(t)\setminus E$. La fonction $\pi_{\mathfrak{m}}$ est inversible au voisinage de ce point. Par conséquent, la fonction F est multiple de $\pi_{\mathfrak{m}}$ au voisinage de ce point.

En utilisant le fait que les anneaux locaux sont intègres et que le principe du prolongement analytique vaut sur la partie connexe $\overline{D}_V(t)$ de X, nous obtenons l'existence d'un élément $d_{V,t}(F)$ de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ qui vérifie l'égalité

$$F = \pi_{\mathfrak{m}}\, d_{V,t}(F) \text{ dans } \mathscr{O}(\overline{D}_V(t)).$$

□

Lemme 6.6.15. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Posons $V_0 = [a_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Soit x le point de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ défini par l'équation $T(x) = 0$. Soit $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathscr{O}_{X,x}$. Supposons que pour tout voisinage W du point x dans X, il existe un voisinage compact et connexe V du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans V_0 et un nombre réel $t > 0$ tels que le disque compact $\overline{D}_V(t)$ soit contenu dans W et l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}}\mathscr{I}$ soit fortement engendré sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|.\|_{V,t}$. Alors, il en est de même pour l'idéal $\mathscr{I}$.*

Démonstration. — Soit W un voisinage du point x dans X. Par hypothèse, il existe un voisinage compact et connexe V du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans V_0, un nombre réel $t > 0$, un entier q et des éléments $G_1, \ldots, G_q$ de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) le disque compact $\overline{D}_V(t)$ est contenu dans W ;
ii) la famille $(G_1, \ldots, G_q)$ engendre fortement le module $\pi_{\mathfrak{m}}\mathscr{I}$ sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|.\|_{V,t}$, avec une certaine constante C.

Nous reprenons les notations du lemme qui précède. Soit F un élément de $\mathscr{I}(\overline{D}_V(t))$. La fonction $\pi_{\mathfrak{m}} F$ appartient alors à $\pi_{\mathfrak{m}}\mathscr{I}(\overline{D}_V(t))$. Il existe donc des éléments $f_1, \ldots, f_q$ de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ satisfaisant les propriétés suivantes :

i) $\pi_{\mathfrak{m}} F = \sum_{i=1}^{q} f_i\, G_i = \pi_{\mathfrak{m}} \sum_{i=1}^{q} f_i\, d_{V,t}(G_i)$ dans $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$;
ii) quel que soit $i \in [\![1, q]\!]$, nous avons $\|f_i\|_{V,t} \leq C\, \|\pi_{\mathfrak{m}} F\|_{V,t}$.

La partie $\overline{D}_V(t)$ étant connexe, l'intégrité des anneaux locaux et le principe du prolongement analytique nous assurent que

$$F = \sum_{i=1}^{q} f_i \, d_{V,t}(G_i) \text{ dans } \mathscr{O}(\overline{D}_V(t)).$$

En outre, pour tout élément i de $[\![1, q]\!]$, nous avons

$$\|f_i\|_{V,t} \leq C \, \|\pi_{\mathfrak{m}} F\|_{V,t} \leq C \|\pi_{\mathfrak{m}}\|_V \, \|F\|_{V,t}.$$

On en déduit que la famille $(d(G_1), \ldots, d(G_q))$ engendre fortement le module $\mathscr{I}$ sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|.\|_{V,t}$. □

Remarque 6.6.16. — L'implication réciproque de celle énoncée dans le lemme précédent est valable et sa démonstration est d'ailleurs évidente.

Proposition 6.6.17. — *Soit $\mathfrak{m}$ un élément de Σ_f. Posons $V_0 = [a_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Soit x le point de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ défini par l'équation $T(x) = 0$. Soient p un entier non nul et $\mathscr{M}$ un sous-module de $\mathscr{O}_{Y,y}^p$. Soit W un voisinage du point x dans X. Alors, il existe un voisinage compact et connexe V du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans V_0 et un nombre réel $t > 0$ tels que le disque compact $\overline{D}_V(t)$ soit contenu dans W et le module $\mathscr{M}$ soit fortement engendré sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|.\|_{V,t}$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 6.6.9, le cas $p = 1$ entraîne les autres. Nous pouvons donc supposer que $p = 1$. Dans ce cas, le module $\mathscr{M}$ est un idéal de $\mathscr{O}_{X,x}$. Dans le cas où l'idéal $\mathscr{M}$ est nul, le principe du prolongement analytique nous permet de conclure. Nous supposerons, désormais, que l'idéal $\mathscr{M}$ n'est pas nul. Rappelons que, d'après le théorème 2.4.8, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de séries convergentes à coefficients dans $\mathscr{O}_{B,\tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$. Plus précisément, il est naturellement isomorphe à l'anneau $L_{\tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ défini à la section 2.2. Reprenons, à présent, les notations du lemme 2.2.11. Notons

$$w = \min\{v(F) \mid F \in \mathscr{M}, G \neq 0\}.$$

D'après ce lemme, il existe un idéal $\mathscr{N}$ de $\mathscr{O}_{X,x}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\mathscr{M} = \pi_{\mathfrak{m}}^w \mathscr{N}$;

ii) il existe un élément G de $\mathscr{N}$ qui vérifie $G(\tilde{a}_{\mathfrak{m}}) = 0$.

D'après le lemme 6.6.15, il suffit de démontrer le résultat voulu pour l'idéal $\mathscr{N}$.

Il existe un voisinage compact et connexe V de $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans V_0 et un nombre réel $t > 0$ tels que

$$G \in \mathscr{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle.$$

D'après le théorème de préparation de Weierstraß (*cf.* théorème 2.2.6), il existe une fonction inversible $E \in \mathscr{O}_{X,x}$ et un polynôme $\Omega \in \mathscr{O}_{B,b}[T]$ distingué de degré

$d \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait l'égalité $G = E\,\Omega$ dans $\mathscr{O}_{X,x}$. Quitte à restreindre V et à diminuer t, nous pouvons supposer que cette égalité vaut dans $\mathscr{B}(V)\langle |T| \leq t\rangle$. Remarquons que Ω est un élément de $\mathscr{N}$. D'après la proposition 2.4.3, quitte à diminuer encore V et t, nous pouvons supposer que le disque compact $\overline{D}_V(t)$ est contenu dans W.

D'après le théorème de division de Weierstraß semi-local, quitte à diminuer encore V et t, nous pouvons supposer que, quel que soit $u \in [t, 1]$, pour tout élément F de $\mathscr{B}(V)\langle |T| \leq u\rangle$, il existe un unique élément (Q, R) appartenant à $(\mathscr{B}(V)\langle |T| \leq u\rangle)^2$ tel que

i) R soit un polynôme de degré strictement inférieur à d ;
ii) $F = Q\,\Omega + R$.

En outre, il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+^*$, indépendante de u et de F, telle que l'on ait les inégalités

$$\begin{cases} \|Q\|_{V,u} & \leq & C\,\|F\|_{V,u}\ ; \\ \|R\|_{V,u} & \leq & C\,\|F\|_{V,u}. \end{cases}$$

Soit F un élément de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$. D'après la proposition 3.2.14, il existe $u \in]t, 1]$ tel que

$$F \in \mathscr{O}(V)\langle |T| \leq u\rangle = \mathscr{O}(V)\langle |T| \leq u\rangle.$$

En appliquant le résultat précédent, nous obtenons deux éléments Q et R de $\mathscr{B}(V)\langle |T| \leq u\rangle$ et donc de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$, d'après le théorème 3.2.16. On en déduit que $Q\,\Omega$ appartient à $\mathscr{N}(\overline{D}_V(t))$ et donc que R appartient à $\mathscr{N}(\overline{D}_V(t))$. Il existe $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathscr{O}(V)$ tels que

$$R(T) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\,T^i.$$

Nous définissons un morphisme de groupes r en associant à l'élément F la famille $(a_0, \ldots, a_{d-1})$. Les majorations du théorème de division de Weierstraß et du lemme 2.1.2 nous assurent que

$$\|r(F)\|_{V,t} \leq Ct^{1-d}\,\|F\|_{V,t}.$$

Notons $\mathscr{N}''$ le sous-$\mathscr{O}_{B,\tilde{a}_{\mathrm{m}}}$-module de $\mathscr{O}_{B,\tilde{a}_{\mathrm{m}}}^d$ formé par les familles de coefficients des polynômes de $\mathscr{N}$ dont le degré est strictement inférieur à d. Notons $\mathscr{N}'$ l'idéal de $\mathscr{O}_{X,x}$ engendré par Ω et

$$u : \mathscr{N}'(\overline{D}_V(t)) \to \mathscr{N}(\overline{D}_V(t))$$

l'injection canonique. D'après le théorème de division de Weierstraß, nous disposons alors d'une suite exacte

$$0 \to \mathscr{N}'(\overline{D}_V(t)) \xrightarrow{u} \mathscr{N}(\overline{D}_V(t)) \xrightarrow{r} \mathscr{N}''(\overline{D}_V(t)) \to 0.$$

Montrons qu'elle vérifie les conditions du lemme 6.6.8. Le morphisme u est bien une isométrie. Nous pouvons choisir l'identité de $\mathscr{O}_Y(\overline{D}_V(t))$ pour le morphisme u_0. Nous avons montré précédemment que le morphisme r était borné. Pour le morphisme τ, nous choisissons le morphisme naturel $\mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$. Il est également borné.

En outre, la famille (G) engendre fortement le module $\mathscr{N}'$ sur V pour la norme $\|.\|_{V,t}$, toujours d'après le théorème de division de Weierstraß. La description explicite de l'espace V et des fonctions sur cet espace assure que le module $\mathscr{N}''$ est également fortement engendré sur V pour la norme $\|.\|_V$. Nous déduisons alors du lemme 6.6.8 que le module $\mathscr{N}$ est fortement engendré sur V pour la norme $\|.\|_{V,t}$.

□

Remarque 6.6.18. — Ce résultat vaut également pour les points rationnels des autres fibres. La démonstration en est d'ailleurs plus simple puisque l'anneau local en le point de la base est alors un corps. Il vaut encore pour les points rationnels des fibres des espaces affines de dimension plus grande. Nous pourrions également l'adapter pour les points rigides, à condition de prendre la peine définir des normes adéquates.

Démontrons, à présent, le résultat sur la fermeture des modules que nous avions en vue.

Théorème 6.6.19. — *Soient x un point de X, p un entier non nul et $\mathscr{M}$ un sous-module de $\mathscr{O}_{X,x}^p$. Soient U un voisinage de x dans X et F un élément de $\mathscr{O}(U)^p$. Supposons qu'il existe une suite $(F_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{O}(U)^p$ qui converge vers uniformément vers F sur U et que, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, on ait $(F_k)_x \in \mathscr{M}$. Alors, on a*

$$F_x \in \mathscr{M}.$$

Démonstration. — Nous devons distinguer plusieurs cas : celui où l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps, celui où c'est un anneau de valuation discrète et celui où le point x est un point rigide de sa fibre. La démonstration est similaire dans les trois cas. Nous ne traiterons que le dernier qui est le plus difficile, en particulier à cause de la différence, pour les fonctions définies sur des disques, entre leur norme en tant que série et leur norme uniforme. Seuls les point rigides des fibres

extrêmes ne sont pas traités dans les autres cas. Nous supposerons donc que x est de ce type. D'après la proposition 3.3.1, nous pouvons nous ramener au cas d'un point rationnel. Quitte à nous placer sur un voisinage assez petit du point x, puis à effectuer une translation, nous pouvons supposer que le point x est le point de sa fibre défini par l'équation $T(x) = 0$.

D'après la proposition 2.4.3, il existe un voisinage W de b dans B et un nombre réel $u > 0$ tels que la partie $\overline{D}_V(t)$ soit contenue dans U. D'après le théorème 6.6.17, il existe un voisinage compact et connexe V de b dans W, un nombre réel $t \in]0, u[$, un entier $q \in \mathbf{N}$ et des éléments $G_1, \ldots, G_q$ de $\overline{D}_V(t)$ tels que la famille $(G_1, \ldots, G_q)$ engendre fortement le module $\mathscr{M}$ sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|.\|_{V,t}$, avec une certaine constante C.

Quitte à extraire une sous-suite de $(F_k)_{k\in\mathbf{N}}$, nous pouvons supposer que, quel que soit $k \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\|F_k - F_{k-1}\|_{\overline{D}_V(u)} \leq 2^{-k}.$$

D'après la proposition 2.1.3, nous avons alors

$$\|F_k - F_{k-1}\|_{V,t} \leq \frac{u}{u-t}\, 2^{-k}.$$

Construisons, à présent, par récurrence, des suites $(f_{k,1})_{k\in\mathbf{N}}, \ldots, (f_{k,q})_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant les propriétés suivantes : quel que soit $k \in \mathbf{N}$, nous avons

$$F_k = \sum_{j=1}^{q} f_{k,j} G_j$$

et, quel que soit $k \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\forall j \in [\![1, q]\!],\ \|f_{k,j} - f_{k-1,j}\|_{\overline{D}_V(t)} \leq \frac{C}{2^k}.$$

Initialisons la récurrence. Pour construire $f_{0,1}, \ldots, f_{0,q}$, il suffit d'utiliser le fait que la famille $(G_1, \ldots, G_q)$ engendre fortement le module $\mathscr{M}$ sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|.\|_{V,t}$ avec la constante C et de l'appliquer à la fonction F_0.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et supposons avoir construit $f_{k-1,1}, \ldots, f_{k-1,q} \in \mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant les propriétés demandées. En appliquant la propriété de génération forte à la fonction $F_k - F_{k-1}$, on montre qu'il existe $g_{k,1}, \ldots, g_{k,q} \in \mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant

$$F_k - F_{k-1} = \sum_{j=1}^{q} g_{k,j} G_j$$

et

$$\forall j \in [\![1, q]\!],\ \|g_{k,j}\|_{V,t} \leq C\|F_k - F_{k-1}\|_{V,t} \leq \frac{C}{2^k}.$$

Pour $j \in [\![1, q]\!]$, posons

$$f_{k,j} = f_{k-1,j} + g_{k,j}.$$

On obtient alors le résultat voulu car, quel que soit $j \in [\![1, q]\!]$, nous avons

$$\|g_{k,j}\|_{\overline{D}_V(t)} \leq \|g_{k,j}\|_{V,t}.$$

Soit $j \in [\![1, q]\!]$. D'après les inégalités précédentes, la suite $(f_{k,j})_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{O}(\overline{D}_V(t))$. Soit U_0 un voisinage du point x dans X contenu dans l'intérieur de $\overline{D}_V(t)$. La suite $(f_{k,j})_{k\in\mathbf{N}}$ converge alors dans $\mathscr{O}(U_0)$. Notons $f_j \in \mathscr{O}(U_0)$ sa limite. Nous avons alors

$$F = \sum_{j=1}^{q} f_j G_j \text{ dans } \mathscr{O}(U_0).$$

On en déduit finalement que

$$F_x \in \mathscr{M}.$$

□

6.6.3. Conclusion

Nous nous intéresserons ici à l'étude des lemniscates au-dessus de n'importe quelle partie connexe de l'espace de base B. Commençons par énoncer un résultat topologique. Il se démontre à l'aide des descriptions explicites du numéro 3.1.1

Lemme 6.6.20. — *Toute partie connexe de l'espace B possède une exhaustion par des parties compactes et connexes.*

Soit V une partie connexe de l'espace B. Soit $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une exhaustion de V par des parties compactes et connexes de l'espace B.

Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s < t$. Soient $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles vérifiant les conditions suivantes :

i) la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante et tend vers s ;
ii) la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et tend vers t ;
iii) $s_0 \leq t_0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante et tendant vers l'infini d'éléments de $[s_0, +\infty[$.

Posons

$$\begin{array}{rcl} V_{s,t}^{(0)} & = & \left\{x \in X_V \,\middle|\, s \leq |T(x)| \leq t\right\}, \\ V_{s,t}^{(1)} & = & \left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |T(x)| \leq t\right\}, \\ V_{s,t}^{(2)} & = & \left\{x \in X_V \,\middle|\, s \leq |T(x)| < t\right\}, \\ V_{s,t}^{(3)} & = & \left\{x \in X_V \,\middle|\, s < |T(x)| < t\right\}, \\ V_{s}^{(4)} & = & \left\{x \in X_V \,\middle|\, |T(x)| \geq s\right\} \\ \text{et} \quad V_{s}^{(5)} & = & \left\{x \in X_V \,\middle|\, |T(x)| > s\right\}. \end{array}$$

Désignons par C l'une de ces six parties de X. Définissons alors une exhaustion $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de C par des parties compactes en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{array}{rcll} C_n & = & X_{V_n} \cap \overline{C}(s,t) & \text{si} \quad C = V_{s,t}^{(0)}, \\ C_n & = & X_{V_n} \cap \overline{C}(s_n,t) & \text{si} \quad C = V_{s,t}^{(1)}, \\ C_n & = & X_{V_n} \cap \overline{C}(s,t_n) & \text{si} \quad C = V_{s,t}^{(2)}, \\ C_n & = & X_{V_n} \cap \overline{C}(s_n,t_n) & \text{si} \quad C = V_{s,t}^{(3)}, \\ C_n & = & X_{V_n} \cap \overline{C}(s,u_n) & \text{si} \quad C = V_{s}^{(4)} \\ \text{et} \quad C_n & = & X_{V_n} \cap \overline{C}(s_n,u_n) & \text{si} \quad C = V_{s}^{(5)}. \end{array}$$

Nous allons montrer que l'exhaustion $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une exhaustion de Stein de C relativement à tout faisceau de $\mathscr{O}_C$-modules cohérent. Nous savons déjà, d'après le théorème 6.6.29 que, pour tout élément n de $\mathbf{N}$, la partie C_n est de Stein. Fixons un faisceau de $\mathscr{O}_C$-modules cohérent $\mathscr{S}$.

Il nous faut, à présent, définir une semi-norme sur chacune des couronnes compactes considérées. Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le théorème A et le lemme 6.1.3, il existe un entier $l_n \in \mathbf{N}^*$ et un morphisme de $\mathscr{O}_{C_n}$-modules surjectif

$$\alpha_n : \mathscr{O}_{C_n}^{l_n} \to \mathscr{S}_{C_n}.$$

Le théorème B assure qu'il induit un morphisme de $\mathscr{O}(C_n)$-modules surjectif

$$\varepsilon_n : \mathscr{O}(C_n)^{l_n} \to \mathscr{S}(C_n).$$

Introduisons une notation. Pour toutes parties E et F de X vérifiant $E \subset F$ et tout entier positif l, nous noterons $\|.\|_{\infty,E}$ la semi-norme sur l'anneau $\mathscr{O}(F)^l$ obtenue en prenant le maximum des normes uniformes sur E des coefficients.

Nous définissons alors une semi-norme $\|.\|_n$ sur $\mathscr{S}(C_n)$ en posant, pour toute section $s \in \mathscr{S}(C_n)$,

$$\|s\|_n = \inf\{\|t\|_{\infty,C_n},\, t \in \varepsilon_n^{-1}(s)\}.$$

Il nous reste à vérifier que les conditions de la définition 6.6.4 sont satisfaites. Soit $n \in \mathbf{N}$. Introduisons, tout d'abord, quelques notations. Nous désignerons

par r_n et ρ_n les applications de restriction suivantes :

$$r_n : (\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}, \|.\|_{\infty,C_{n+1}}) \to (\mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}}, \|.\|_{\infty,C_n})$$

et

$$\rho_n : (\mathscr{S}(C_{n+1}), \|.\|_{n+1}) \to (\mathscr{S}(C_n), \|.\|_n).$$

Le morphisme r_n est borné.

D'après le théorème B, le morphisme surjectif $\alpha_{n+1} : \mathscr{O}_{C_{n+1}}^{l_{n+1}} \to \mathscr{S}_{C_{n+1}}$ considéré précédemment induit un morphisme surjectif

$$\varepsilon'_n : \mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}} \to \mathscr{S}(C_n).$$

Nous pouvons donc définir une nouvelle semi-norme $\|.\|'_n$ sur $\mathscr{S}(C_n)$ en posant, pour toute section $s \in \mathscr{S}(C_n)$,

$$\|s\|'_n = \inf\{\|t\|_{\infty,C_n},\, t \in {\varepsilon'}_n^{-1}(s)\}.$$

Nous noterons

$$\sigma_n : \mathscr{S}(C_n), \|.\|'_n) \to (\mathscr{S}(C_n), \|.\|_n)$$

le morphisme identité allant de l'anneau $\mathscr{S}(C_n)$ muni de la norme $\|.\|'_n$ à l'anneau $\mathscr{S}(C_n)$ muni de la norme $\|.\|_n$.

Lemme 6.6.21. — *Quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe un morphisme borné*

$$\eta_n : \mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}} \to \mathscr{O}(C_n)^{l_n}$$

qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}} \arrow[r, "\varepsilon'_n"] \arrow[d, "\eta_n"] & \mathscr{S}(C_n) \arrow[d, "\sigma_n"] \\
\mathscr{O}(C_n)^{l_n} \arrow[r, "\varepsilon_n"] & \mathscr{S}(C_n)
\end{tikzcd} .$$

Démonstration. — Soit $(e_1, \ldots, e_{l_{n+1}})$ la base canonique du $\mathscr{O}(C_{n+1})$-module $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$. Quel que soit $i \in [\![1, l_{n+1}]\!]$, on choisit $g_i \in \mathscr{O}(C_n)^{l_n}$ tel que

$$\varepsilon_n(g_i) = (\sigma_n \circ \varepsilon'_n)(e_i) \text{ dans } \mathscr{S}(C_n).$$

L'application

$$\eta_n : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}} & \to & \mathscr{O}(C_n)^{l_n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l_{n+1}} f_i\, e_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{l_{n+1}} f_i\, g_i \end{array}$$

convient. Elle fait clairement commuter le diagramme qui précède. En outre, pour tous éléments $f_1, \ldots, f_{l_{n+1}}$ de $\mathscr{O}(C_n)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{l_{n+1}} f_i\, g_i \right\|_{\infty, C_n} &\leq \sum_{i=1}^{l_{n+1}} \|f_i\|_{C_n}\, \|g_i\|_{\infty, C_n} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq l_{n+1}} (\|f_i\|_{C_n}) \sum_{i=1}^{l_{n+1}} \|g_i\|_{\infty, C_n} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{l_{n+1}} f_i\, e_i \right\|_{\infty, C_n} \sum_{i=1}^{l_{n+1}} \|g_i\|_{\infty, C_n}
\end{aligned}$$

□

Finalement, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}, \|.\|_{\infty, C_{n+1}}) \arrow[r, "\varepsilon_{n+1}"] \arrow[d, "r_n"] & (\mathscr{S}(C_{n+1}), \|.\|_{n+1}) \arrow[d, "\cdot|C_n"] \arrow[dd, bend left, "\rho_n"] \\
(\mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}}, \|.\|_{\infty, C_n}) \arrow[r, "\varepsilon'_n"] \arrow[d, "\eta_n"] & (\mathscr{S}(C_n), \|.\|'_n) \arrow[d, "\sigma_n"] \\
(\mathscr{O}(C_n)^{l_n}, \|.\|_{\infty, C_n}) \arrow[r, "\varepsilon_n"] & (\mathscr{S}(C_n), \|.\|_n).
\end{tikzcd}$$

Démontrons, à présent, que les conditions de la définition 6.6.4 sont satisfaites.

Lemme 6.6.22. — *Pout tout entier positif n, le morphisme ρ_n est borné.*

Démonstration. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Les morphismes r_n, η_n et ε_n sont bornés. Par conséquent, il existe un nombre réel M tel que, pour tout élément t de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$, nous ayons

$$\|\varepsilon_n \circ \eta_n \circ r_n(t)\|_n \leq M\, \|t\|_{\infty, C_{n+1}}.$$

Soit s un élément de $\mathscr{S}(C_{n+1})$. Soit $\delta > 0$. Il existe un élément t_δ de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$ tel que

$$\|t_\delta\|_{\infty, C_{n+1}} \leq \|s\|_{n+1} + \delta.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|\rho_n(s)\|_n &= \|\varepsilon_n \circ \eta_n \circ r_n(t_\delta)\|_n \\
&\leq M \|t_\delta\|_{\infty, C_{n+1}} \\
&\leq M \|s\|_{n+1} + M\delta.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre le nombre réel δ vers 0. □

Lemme 6.6.23. — *Pout tout entier positif n, l'image du morphisme ρ_n est dense dans $\mathscr{S}(C_n)$ pour la norme $\|.\|_n$.*

Démonstration. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque le morphisme σ_n est surjectif et borné, il suffit de montrer que l'image du morphisme de restriction

$$\mathscr{S}(C_{n+1}) \to \mathscr{S}(C_n)$$

est dense pour la norme $\|.\|'_n$.

Soit s un élément de $\mathscr{S}(C_n)$. Soit $\delta > 0$. Il existe un élément t de $\mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}}$ tel que $\varepsilon'_n(t) = s$. On déduit du lemme 3.2.12 et de la proposition 3.2.18 (respectivement 3.2.14) que l'anneau $A[T, T^{-1}]$ (respectivement $A[T]$) est dense dans $\mathscr{O}(C_n)$ si $s_n > 0$ (respectivement $s_n = 0$). En particulier, l'anneau $\mathscr{O}(C_{n+1})$ est dense dans l'anneau $\mathscr{O}(C_n)$ et il existe un élément t' de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$ tel que

$$\|r_n(t') - t\|_{\infty, C_n} \leq \delta.$$

Posons $s' = \varepsilon_{n+1}(t') \in \mathscr{S}(C_{n+1})$. Nous avons alors

$$\left\| s'_{|C_n} - s \right\|'_n \leq \delta.$$

□

Lemme 6.6.24. — *Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $s \in \mathscr{S}(C_{n+1})$ telle que $\|s\|_{n+1} = 0$. Alors la section s est nulle sur l'ouvert $(C_{n+1})^\circ$. En particulier, elle est nulle sur C_n.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe $t \in \varepsilon_{n+1}^{-1}(s)$ et une suite $(t_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathrm{Ker}(\varepsilon_{n+1})$ vérifiant

$$\lim_{j \to +\infty} \|t - t_j\|_{\infty, C_{n+1}} = 0.$$

En d'autres termes, la suite $(t_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers t sur $(C_{n+1})^\circ$.

Soit $x \in (C_{n+1})^\circ$. La suite des germes $((t_j)_x)_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers t_x dans $\mathscr{O}_{Y,x}^{l_{n+1}}$. D'après le théorème 6.6.19, nous avons

$$t_x \in \mathscr{K}er(\varepsilon_{n+1})_x.$$

Par conséquent, $t \in \mathscr{K}er(\varepsilon_{n+1})((C_{n+1})^\circ)$ et la section s est nulle sur $(C_{n+1})^\circ$.

□

Lemme 6.6.25. — *Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $(s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(C_{n+1})$ qui est de Cauchy pour la semi-norme $\|.\|_{n+1}$. Il existe un élément s de $\mathscr{S}(C_n)$ tel que la suite $(\rho_n(s_k))_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers s pour la semi-norme $\|.\|_n$.*

Si s' est une limite de la suite $(\rho_n(s_k))_{k \in \mathbf{N}}$ dans $\mathscr{S}(C_n)$, alors elle coïncide avec l'élément s sur l'ouvert $(C_n)^\circ$.

Démonstration. — Il existe une application $\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \|s_{\alpha(k)} - s_{\alpha(k+1)}\|_{n+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Pour tout entier positif k, choisissons un élément d_k de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$ qui relève l'élément $s_{\alpha(k)} - s_{\alpha(k+1)}$ de $\mathscr{S}(C_{n+1})$ et vérifie

$$\|d_k\|_{\infty, C_{n+1}} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Choisissons également un élément t_0 de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$ qui relève s_0. Pour tout entier positif k, posons

$$t_k = t_0 + \sum_{l=0}^{k} d_l.$$

C'est un élément de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$ qui relève s_k. On vérifie aisément que la suite $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathscr{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$. Puisque la couronne C_n est contenue dans l'intérieur de C_{n+1}, la suite $(r_n(t_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathscr{O}(C_n)^{l_{n+1}}$. Notons t sa limite.

Puisque les morphismes η_n et ε_n sont bornés, la suite $(\varepsilon_n(\eta_n(r_n(t_k))))_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{S}(C_n)$ converge vers $s = \varepsilon_n(\eta_n(t))$. Or, pour tout entier positif k, nous avons

$$\varepsilon_n(\eta_n(r_n(t_k))) = \rho_n(s_{\alpha(k)}).$$

Par conséquent, la suite $(\rho_n(s_k))_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{S}(C_n)$ possède une valeur d'adhérence. Puisque le morphisme ρ_n est borné et que la suite $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, la suite $(\rho_n(s_k))_{k\in\mathbf{N}}$ l'est encore. On en déduit qu'elle converge vers s.

Soit s' une limite de la suite $(\rho_n(s_k))_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathscr{S}(C_n)$. Nous avons $\|s' - s\|_n = 0$. D'après le lemme 6.6.24, les éléments s et s' coïncident sur l'ouvert $(C_n)^\circ$. □

Lemme 6.6.26. — *Soit $n \in \mathbf{N}$. L'image du morphisme*

$$\mathscr{S}(C) \to \mathscr{S}(C_n)$$

est dense pour la semi-norme $\|.\|_n$.

Démonstration. — D'après le lemme 6.6.22, pour tout entier $k \geq n$, il existe $M_k \geq 1$ tel que, pour tout élément t de $\mathscr{S}(C_{k+1})$, nous ayons

$$\left\|t_{|C_k}\right\|_k \leq M_k \|t\|_{k+1}.$$

Soit s un élément de $\mathscr{S}(C_n)$. Soit $\delta > 0$. Choisissons une suite $(\delta_k)_{k\geq n}$ d'éléments de $\mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\sum_{k\geq n}\left(\prod_{i=n}^{k-1} M_i\right)\delta_k \leq \delta.$$

En utilisant le lemme 6.6.23, on montre, par récurrence, qu'il existe un élément

$$(s_k)_{k\geq n} \in \prod_{k\geq n} \mathscr{S}(C_k)$$

tel que $s_n = s$ et, pour tout entier $k \geq n$,

$$\left\| s_{k+1|C_k} - s_k \right\|_k \leq \delta_k.$$

Soit $k \geq n$. Pour tout entier $l \geq k$, nous avons

$$\|s_{l+1|C_k} - s_{l|C_k}\|_k = \|(s_{l+1|C_l} - s_l)_{|C_k}\|_k \leq \left(\prod_{i=k}^{l-1} M_i\right)\delta_l \leq \left(\prod_{i=n}^{l-1} M_i\right)\delta_l.$$

On en déduit que la suite $(s_{l|C_k})_{l\geq k}$ de $\mathscr{S}(C_k)$ est de Cauchy. D'après le lemme 6.6.25, elle possède une limite t_k dans $\mathscr{S}(C_k)$.

Soient k_1 et k_2 deux entiers vérifiant $k_1 \geq k_2 \geq n$. Puisque le morphisme de restriction de $\mathscr{S}(C_{k_1})$ à $\mathscr{S}(C_{k_2})$ est borné, l'élément $t_{k_2|C_{k_1}}$ de $\mathscr{S}(C_{k_1}$ est une limite de la suite $(s_{l|C_{k_1}})_{l\geq k_2}$. D'après le lemme 6.6.25, les éléments $t_{k_2|C_{k_1}}$ et t_{k_1} coïncident sur $(C_{k_1})^\circ$. Puisque $(C_k)_{k\geq n}$ est une exhaustion de C, la famille $(t_k)_{k\geq n}$ détermine une section t de $\mathscr{S}(C)$.

Pour tout entier $k \geq n$, nous avons

$$t_{|C_n} - s = t_{|C_n} - s_{k+1|C_n} + \sum_{l=n}^{k}(s_{l+1|C_n} - s_{l|C_n}).$$

Par conséquent, pour tout entier $k \geq n$, nous avons

$$\|t_{|C_n} - s\|_n \leq \|t_{|C_n} - s_{k+1|C_n}\|_n + \sum_{l=n}^{k}\left(\prod_{i=n}^{l-1} M_i\right)\delta_l.$$

En faisant tendre k vers l'infini, nous obtenons

$$\|t_{|C_n} - s\|_n \leq \delta.$$

Cela termine la démonstration. □

Les résultats des quatre lemmes qui précèdent correspondent aux quatre conditions requises pour que l'exhaustion $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une exhaustion de Stein relativement au faisceau $\mathscr{S}$ (*cf.* définition 6.6.4). Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Théorème 6.6.27. — *La suite $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une exhaustion de Stein de la couronne C, relativement à tout faisceau de $\mathscr{O}_C$-modules cohérent.*

Le théorème 6.6.6 nous permet alors d'en déduire le résultat voulu.

Théorème 6.6.28. — *La couronne C est une partie de Stein de la droite analytique X.*

À l'aide des résultats sur les morphismes finis que nous avons obtenus, nous pouvons déduire que d'autres parties de la droite analytique X sont de Stein. Regroupons ces résultats dans le théorème qui suit.

Théorème 6.6.29. — *Soit V une partie connexe de l'espace B. Soient s et t deux nombres réels tels que $0 \leq s \leq t$. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$ dont le coefficient dominant est inversible. Les parties suivantes de la droite analytique X sont des espaces de Stein :*

i) $\{x \in X_V \mid s \leq |P(T)(x)| \leq t\}$;
ii) $\{x \in X_V \mid s \leq |P(T)(x)| < t\}$;
iii) $\{x \in X_V \mid s < |P(T)(x)| \leq t\}$;
iv) $\{x \in X_V \mid s < |P(T)(x)| < t\}$;
v) $\{x \in X_V \mid |P(T)(x)| \geq s\}$;
vi) $\{x \in X_V \mid |P(T)(x)| > s\}$.

Démonstration. — Comme expliqué au numéro 5.5, le morphime

$$\mathscr{O}(V)[T] \to \mathscr{O}(V)[T,S]/(P(S)-T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(V)[S]$$

induit un morphisme

$$\varphi : X_V \to X_V.$$

Chacune des parties qui figure dans l'énoncé est l'image réciproque d'une couronne par ce morphisme. D'après le corollaire 6.6.28, les couronnes sont des espaces de Stein. Nous pouvons donc conclure en utilisant le théorème 6.1.10. Les hypothèses en sont vérifiées d'après la proposition 5.5.1, le corollaire 5.5.6, le corollaire 5.6.2, la proposition 5.6.6 et le théorème 4.5.5.

□

CHAPITRE 7

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous exposons quelques résultats sur les séries arithmétiques convergentes. Rappelons que nous désignons par cette expression les séries à coefficients dans un anneau d'entiers de corps de nombres, éventuellement localisé par une partie multiplicative finiment engendrée, qui possèdent un rayon de convergence strictement positif en toute place. Nous allons montrer que les théorèmes géométriques que nous avons obtenus jusqu'ici peuvent être appliqués à leur étude.

Nous consacrons le numéro 7.1 aux problèmes de Cousin : le problème de Cousin multiplicatif consiste à prescrire l'ordre des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe et le problème de Cousin additif consiste à prescrire ses parties principales (c'est-à-dire ses parties non holomorphes). En géométrie analytique complexe, l'origine de ces questions remonte au XIXème siècle. Elle sont, désormais, bien comprises et la théorie des espaces de Stein permet de leur apporter une solution élégante. Pour plus de précisions, l'on consultera avec profit le deuxième paragraphe du chapitre V de l'ouvrage [**14**] de H. Grauert et R. Remmert.

Au numéro 7.2, nous nous intéressons à la noethérianité de certains anneaux de séries arithmétiques convergentes. Pour tout nombre réel positif r, notons $\mathbf{Z}_{r^+}[\![T]\!]$ l'anneau formé des séries en une variable à coefficients entiers dont le rayon de convergence complexe est strictement supérieur à r. D. Harbater a démontré, par une preuve purement algébrique, que, pour tout nombre réel positif r, l'anneau $\mathbf{Z}_{r^+}[\![T]\!]$ est noethérien. En géométrie analytique complexe, un résultat analogue figure dans un article de J. Frisch. Nous adaptons sa méthode,

très géométrique, au cadre de la droite analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres afin de redémontrer et étendre le résultat de D. Harbater.

Au numéro 7.3, nous nous intéressons au problème de Galois inverse. Notons $\mathbf{Z}_{1^-}[\![T]\!]$ l'anneau formé des séries en une variable à coefficients entiers dont le rayon de convergence complexe est supérieur ou égal à 1. D. Harbater a montré que tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps $\mathrm{Frac}(\mathbf{Z}_{1^-}[\![T]\!])$. Nous proposons une démonstration géométrique et conceptuellement très simple de ce résultat, ainsi qu'une généralisation à d'autres anneaux de séries arithmétiques.

De nouveau, nous reprenons les notations du chapitre 4.

7.1. Problèmes de Cousin arithmétiques

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux problèmes de Cousin pour les anneaux de séries arithmétiques.

Nous allons nous intéresser à ces problèmes sur la droite analytique $X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ au-dessus de $B = \mathcal{M}(A)$. Puisque les seules fonctions méromorphes sur X sont les fractions rationnelles (*cf.* corollaire 4.4.6), nous n'étudierons pas véritablement les problèmes de Cousin sur l'espace X, mais nous restreindrons au disque unité ouvert de rayon 1. À cet effet, nous utiliserons les résultats obtenus au chapitre précédent sur les sous-espaces de Stein de X. Signalons que les démonstrations que nous proposons présentent encore des similitudes frappantes avec celles de la géométrie analytique complexe.

Fixons quelques notations. Posons

$$\mathbf{D} = \mathring{D}(0,1) = \left\{x \in X \,\middle|\, |T(x)| < 1\right\}$$

et, quel que soit $\sigma \in \Sigma$,

$$\mathbf{D}_{a_\sigma} = \left\{x \in X_{a_\sigma} \,\middle|\, |T(x)| < 1\right\}.$$

7.1.1. Problème de Cousin multiplicatif

Annonçons tout de suite un résultat négatif : le problème de Cousin multiplicatif n'admet pas toujours de solution sur le disque $\mathbf{D}$, c'est-à-dire qu'il existe un diviseur qui ne provient d'aucune fonction méromorphe. En fait, tel est déjà le cas sur un corps ultramétrique, dès que celui-ci n'est pas maximalement complet. Ce résultat est dû à M. Lazard (*cf.* [**22**], proposition 6). Fixer les ordres des zéros est donc impossible, mais nous allons montrer que nous pouvons les minorer.

Définition 7.1.1. — *Soit x un point rigide de $\mathbf{D}_{a_\sigma}$. Notons $p_x \in \hat{K}_{\mathfrak{m}}[T]$ le polynôme irréductible et unitaire qui lui est associé. L'anneau local $\mathscr{O}_{\mathbf{D},x}$ est alors un anneau de valuation discrète dont p_x est une uniformisante. Soient f une fonction définie sur un voisinage du point x et n un entier. On dit que la fonction f* **s'annule à l'ordre** *n* **en** *x si p_x^n divise f dans l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.*

Introduisons une autre définition afin de préciser sous quelles conditions nous entendons prescrire les ordres d'annulation.

Définition 7.1.2. — *Une* **distribution d'ordres** *o* **sur D** *est la donnée de*

i) un sous-ensemble fini Σ_o *de* Σ *;*
ii) pour tout $\sigma \in \Sigma_o$*, un sous-ensemble* E_σ *de points rigides de* $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ *;*
iii) pour tout $\sigma \in \Sigma_o$ *et tout point* $e \in E_\sigma$*, un nombre entier* n_e

vérifiant la condition suivante : quel que soit $\sigma \in \Sigma_o$*, l'ensemble* E_σ *est fermé, discret et ne contient pas le point* 0*.*

À toute distribution d'ordres est donc associé un diviseur de Cartier sur le disque ouvert analytique $\mathbf{D}_{a_\sigma}$. Il est presque immédiat que ce diviseur s'étend en un diviseur de Cartier sur $\mathbf{D} \cap X'_\sigma$. Pour l'étendre également à la fibre centrale, nous utiliserons le résultat topologique qui suit.

Lemme 7.1.3. — *Soient* $\sigma \in \Sigma$*,* I *un ensemble,* $\Pi = (P_i)_{i\in I}$ *une famille de polynômes à coefficients dans* $\hat{K}_\sigma$*, deux à deux distincts, irréductibles et unitaires et* $(x_i)_{i\in I}$ *la famille de points rigides de* X_{a_σ} *associée. Supposons que l'ensemble* E *des points* x_i*, avec* $i \in I$*, soit contenu dans* $\mathbf{D}_{a_\sigma}$*, fermé et discret dans* $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ *et évite le point* 0*. Alors la partie*

$$V_\Pi = \bigcup_{i\in I} \{y \in X'_\sigma \mid P_i(y) = 0\}$$

est fermée dans $(X'_\sigma \cup X_0) \cap \mathbf{D}$*.*

Démonstration. — Nous allons montrer que le complémentaire U de V_Π dans la partie $(X'_\sigma \cup X_0) \cap \mathbf{D}$ est ouvert. Par hypothèse, la partie $U \cap \mathbf{D}_{a_\sigma}$ est ouverte. La structure de produit de X'_σ (*cf.* propositions 3.4.1 et 3.4.2) nous permet d'en déduire que la partie $U \cap X'_\sigma$ est encore ouverte.

Soit y un point de $U \cap X_0 = \mathbf{D} \cap X_0$. Il existe un élément r de $[0, 1[$ tel que y soit le point η_r de la fibre centrale X_0. Puisque la partie E du disque $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ est fermée et ne contient pas 0, il existe $t > 0$ vérifiant

$$\big\{z \in E \,\big|\, |T(z)| < t\big\} = \emptyset.$$

Par conséquent, la partie

$$\bigcup_{0<\varepsilon\leq 1} \{z \in X_{a_\sigma^\varepsilon} \mid |T(z)| < t^\varepsilon\}$$

ne coupe pas V_Π.

Soit $s \in]r, 1[$. Il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que $t^\alpha > s$. La partie définie par

$$V = \{z \in \pi^{-1}([a_0, a_\sigma^\alpha[) \mid |T(z)| < s\}$$

est un voisinage de y dans X_σ. Observons qu'elle ne coupe pas V_Π. En effet, la partie V_Π ne coupe pas la fibre centrale X_0 et ne coupe pas non plus $V \cap X'_\sigma$,

par choix de s. Finalement, nous avons bien montré que la partie V_Π est fermée dans $(X'_\sigma \cup X_0) \cap \mathbf{D}$. $\square$

Soit o une distribution d'ordres sur $\mathbf{D}$. Pour montrer qu'il existe une fonction analytique qui possède des zéros d'ordre supérieur à ceux prescrits par o, nous allons commencer par interpréter une telle fonction comme une section d'un faisceau. À cet effet, construisons explicitement le diviseur de Cartier mentionné plus haut. Plus précisément, nous allons associer à la distribution d'ordres o un sous-faisceau inversible $\mathscr{S}_o$ de $\mathscr{O}$ sur l'espace

$$\mathbf{D}_o = \mathbf{D} \setminus \left(\bigcup_{\mathfrak{m} \in \Sigma_o \cap \Sigma_f} \tilde{X}_{\mathfrak{m}} \right).$$

Soient $\sigma \in \Sigma_o$. Pour chaque élément e de E_σ, choisissons un voisinage ouvert U_e du point e dans $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ et évitant le point 0. Quitte à restreindre ces ouverts, nous pouvons supposer qu'ils sont deux à deux disjoints. Soit $e \in E_\sigma$. Notons p_e le polynôme à coefficients dans $\hat{K}_\sigma$, irréductible et unitaire associé à ce point. L'image de l'ouvert U_e par le flot,

$$V_e = \bigcup_{y \in U_e} T_X(y),$$

est un voisinage ouvert dans $\mathbf{D}_o$ du fermé de Zariski

$$Z_e = \{y \in X'_\sigma \mid p_e(y) = 0\}.$$

Pour $f \in E_\sigma \setminus \{e\}$, les ouverts V_e et V_f sont disjoints. Définissons le faisceau $\mathscr{S}_o$ sur l'ouvert V_e par

$$\mathscr{S}_{o|V_e} = p_e^{n_e}\, \mathscr{O}_{|V_e}.$$

D'après le lemme 7.1.3, la partie

$$U = \mathbf{D}_o \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_o, e \in E_\sigma} Z_e \right)$$

est ouverte. Nous y définissons le faisceau $\mathscr{S}_o$ par

$$\mathscr{S}_{o|U} = \mathscr{O}_{|U}.$$

On vérifie sans peine que cette définition est cohérente avec les précédentes et que le faisceau $\mathscr{S}_0$ ainsi construit est un sous-faisceau inversible de $\mathscr{O}_{|\mathbf{D}_o}$.

Théorème 7.1.4. — *Soit o une distribution d'ordres sur $\mathbf{D}$. Alors il existe une fonction φ holomorphe sur $\mathbf{D}_o$ et non nulle vérifiant la condition suivante : quel que soient $\sigma \in \Sigma_o$ et $e \in E_\sigma$, la fonction φ s'annule au point e à un ordre supérieur à n_e.*

Démonstration. — Le faisceau $\mathscr{S}_o$ construit précédemment est inversible et donc cohérent. D'après le théorème 6.6.28, ce faisceau satisfait le théorème A sur $\mathbf{D}_o$. On en déduit qu'il existe une section globale non nulle φ du faisceau $\mathscr{S}_o$ sur $\mathbf{D}_o$. Cette fonction convient. □

7.1.2. Problème de Cousin additif

Soient F un ensemble fermé et discret de points de $\mathbf{C}$ et $(R_f)_{f\in F}$ une famille de polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$ sans terme constant. En géométrie analytique complexe, la résolution du problème de Cousin additif sur $\mathbf{C}$, appelé encore théorème de Mittag-Leffler, nous assure qu'il existe une fonction méromorphe φ sur $\mathbf{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) la fonction φ est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus F$;
ii) pour tout point f de F, nous avons $\varphi(z) - R\left(\frac{1}{z-f}\right)$ dans $\mathscr{O}_{\mathbf{C},f}$.

Comme précédemment, nous allons chercher à adapter ce résultat pour des fonctions méromorphes sur le disque unité ouvert $\mathbf{D}$. Rappelons que nous avons introduit le faisceau des fonctions méromorphes à la définition 4.4.3. Commençons par une nouvelle définition.

Définition 7.1.5. — *Le faisceau quotient*

$$\mathscr{P} = \mathscr{M}/\mathscr{O}$$

est appelé **faiceau des parties principales** *sur* X.

Par construction, nous disposons de la suite exacte courte

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{M} \to \mathscr{P} \to 0.$$

Soit U un ouvert de X. La suite exacte longue de cohomologie associée commence comme suit :

$$0 \to \mathscr{O}(U) \to \mathscr{M}(U) \to \mathscr{P}(U) \to H^1(U,\mathscr{O}) \to \cdots$$

En particulier, si le groupe $H^1(U,\mathscr{O})$ est nul, alors l'application canonique

$$\mathscr{M}(U) \to \mathscr{P}(U)$$

est surjective. Cette simple remarque permet de démontrer le théorème de Mittag-Leffler en l'appliquant avec $U = \mathbf{C}$. Nous allons adopter la même démarche pour apporter une solution au problème de Cousin additif sur l'espace analytique X.

Soit $\sigma \in \Sigma$. Fixons une clôture algébrique L_σ de $\hat{K}_\sigma$. Soit x un point rigide de $\mathbf{D}_{a_\sigma}$. Le théorème 3.3.12 assure qu'il existe un élément $\alpha(x)$ de L_σ tel que l'on ait un isomorphisme

$$\hat{K}_\sigma(\alpha(x)) \simeq \mathscr{H}(x)$$

et un voisinage U'_x du point rationnel $\alpha(x)$ de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(x)}$ tel que le morphisme naturel

$$u_x : U'_x \to \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\hat{K}_\sigma}$$

induise un isomorphisme sur son image U_x. En particulier, nous avons un isomorphisme

$$v_x : \mathscr{O}_{\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\hat{K}_\sigma},x} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(x)},\alpha(x)}.$$

Définition 7.1.6. — *Une* **distribution** p **de parties principales sur** $\mathbf{D}$ *est la donnée de*

i) un sous-ensemble fini Σ_p *de* Σ *;*
ii) pour tout $\sigma \in \Sigma_p$*, un sous-ensemble* F_σ *de points rigides de* $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ *;*
iii) pour tout $\sigma \in \Sigma_p$ *et tout point* $f \in F_\sigma$*, un élément* R_f *de* $\mathscr{H}(f)[T]$ *sans terme constant*

vérifiant la condition suivante : quel que soit $\sigma \in \Sigma_p$*, l'ensemble* F_σ *est fermé, discret et ne contient pas le point* 0.

Si p désigne une distribution de parties principales sur $\mathbf{D}$, nous posons

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D} \setminus \left(\bigcup_{\mathfrak{m} \in \Sigma_p \cap \Sigma_f} \tilde{X}_{\mathfrak{m}} \right).$$

Théorème 7.1.7. — *Soit* p *une distribution de parties principales sur* $\mathbf{D}$*. Alors, il existe une fonction* φ *méromorphe sur* $\mathbf{D}_p$ *vérifiant les conditions suivantes :*

i) quel que soit $\sigma \notin \Sigma_p$*, la série* φ *définit une fonction holomorphe sur* $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ *;*
ii) quel que soit $\sigma \in \Sigma_p$ *la fonction* φ *définit une fonction méromorphe sur* $\mathbf{D}_{a_\sigma}$*, holomorphe sur le complémentaire de* F_σ *;*
iii) quel que soient $\sigma \in \Sigma_p$ *et* $f \in F_\sigma$*, nous avons*

$$v_f{}^*\varphi - R_f\left(\frac{1}{T-\alpha(f)}\right) \in \mathscr{O}_{\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(f)},\alpha(f)} \ ;$$

iv) $\varphi \in \left(A\left[\frac{1}{\Sigma_p}\right][\![T]\!] \right) \cap \mathscr{O}_{\mathbf{D}_{a_\sigma},0}$.

Démonstration. — Nous allons associer à la distribution de parties principales p une section s_p du faisceau $\mathscr{P}$ sur $\mathbf{D}_p$. Soit $\sigma \in \Sigma_p$. Pour chaque élément f de F_σ, nous avons défini précédemment un voisinage ouvert U_f du point f dans $\mathbf{D}_{a_\sigma}$.

Puisque la partie F_σ est discrète et ne contient pas 0, quitte à restreindre ces ouverts, nous pouvons supposer qu'ils sont deux à deux disjoints et évitent le point 0. Soit $f \in F_\sigma$. En utilisant les propositions 2.5.3 et 1.3.10, on montre que l'isomorphisme u_f^{-1}, défini sur U_f, se prolonge à l'image de l'ouvert U_f par le flot,

$$V_f = \bigcup_{y \in U_f} T_X(y).$$

C'est un voisinage ouvert dans $\mathbf{D}_p$ du fermé de Zariski

$$Z_f = \{y \in X'_\sigma \,|\, p_f(y) = 0\}.$$

Pour $g \in F_\sigma \setminus \{f\}$, les ouverts V_f et V_g sont disjoints. Définissons la section s_p du faisceau $\mathscr{P}$ sur l'ouvert V_f par

$$s_{p|V_f} = (u_f^{-1})^* \left(R_f \left[\frac{1}{T - \alpha(f)} \right] \right).$$

D'après le lemme 7.1.3, la partie

$$U = \mathbf{D}_p \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_p, f \in F_\sigma} Z_f \right)$$

est ouverte. Nous y définissons la section s_p par

$$s_{p|U} = 0.$$

On vérifie sans peine que cette définition est cohérente avec les précédentes et que nous avons bien construit ainsi une section s_p de $\mathscr{P}$ sur l'ouvert $\mathbf{D}_p$.

D'après le théorème 6.6.28, nous avons $H^1(\mathbf{D}_p, \mathscr{O}) = 0$. On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathscr{M}(\mathbf{D}_p) \to \mathscr{P}(\mathbf{D}_p)$$

est surjectif. Par conséquent, la section s_p possède un antécédent φ par ce morphisme. Quel que soit $\sigma \in \Sigma$, la fonction φ définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{D}_{a_\sigma}$ qui possède les propriétés prescrites par l'énoncé.

Remarquons également que la fonction φ est holomorphe au voisinage de la section nulle de $\mathbf{D}_p$. On en déduit que le développement en 0 de φ est à coefficients dans $A[1/\Sigma_p]$, par la proposition 3.2.14. □

Sous cette forme, le résultat du théorème peut être obtenu à partir du résultat analogue de géométrie analytique complexe et d'un argument d'approximation. Nous en proposons, à présent, un raffinement qui, à notre connaissance, ne peut se démontrer ainsi.

Théorème 7.1.8. — *Soient o une distribution d'ordres sur $\mathbf{D}$ et p une distribution de parties principales sur $\mathbf{D}$. Supposons que, quel que soit $\sigma \in \Sigma_o \cap \Sigma_p$, les ensembles E_σ et F_σ soient disjoints. Alors, il existe une fonction φ méromorphe sur $\mathbf{D}' = \mathbf{D}_o \cap \mathbf{D}_p$ vérifiant les conditions suivantes :*

i) quel que soit $\sigma \notin \Sigma_p$, la série φ définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}_{a_\sigma}$;
ii) quel que soit $\sigma \in \Sigma_p$ la fonction φ définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{D}_{a_\sigma}$, holomorphe sur le complémentaire de F_σ ;
iii) quel que soient $\sigma \in \Sigma_p$ et $f \in F_\sigma$, nous avons

$$v_f{}^*\varphi - R_f\left(\frac{1}{T-\alpha(f)}\right) \in \mathscr{O}_{\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathscr{H}(f)},\alpha(f)} \ ;$$

iv) quel que soient $\sigma \in \Sigma_o$ et $e \in E_\sigma$, la fonction φ s'annule au point e à un ordre supérieur à n_e ;
v) $\varphi \in \left(A\left[\dfrac{1}{\Sigma_o \cup \Sigma_p}\right][\![T]\!]\right) \cap \mathscr{O}_{\mathbf{D}_{a_\sigma},0}$.

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve du théorème précédent en l'appliquant à d'autres faisceaux. Juste avant le théorème 7.1.4, nous avons construit un sous-faisceau $\mathscr{S}_o$ de $\mathscr{O}_{|\mathbf{D}_o}$. Construisons un sous-faisceau $\mathscr{T}_o$ de $\mathscr{M}_{|\mathbf{D}_o}$ par la même méthode. Reprenons les notations utilisées lors de la définition du faisceau $\mathscr{S}_o$. Nous pouvons, en outre, supposer que les ouverts U_e, et donc V_e, sont connexes. Soient $\sigma \in \Sigma_o$ et $e \in E_\sigma$. Notons S_e l'ensemble des éléments de $\mathscr{O}_{|V_e}$ qui ne sont pas identiquement nuls sur Z_e. C'est une partie multiplicative de $\mathscr{O}_{|V_e}$. Nous posons

$$\mathscr{T}_{o|V_e} = p_e^{n_e}\, S_e^{-1}\mathscr{O}_{|V_e}.$$

Nous posons également

$$\mathscr{T}_{o|U} = \mathscr{M}_{|U}.$$

Nous avons bien construit ainsi un sous-faisceau de $\mathscr{M}_{|\mathbf{D}_o}$.

Le faisceau $\mathscr{S}_o$ s'injecte dans ce faisceau. Nous allons, à présent, construire une section s_p du faisceau quotient $\mathscr{T}_o/\mathscr{S}_o$ sur l'ouvert $\mathbf{D}' = \mathbf{D}_o \cap \mathbf{D}_p$. Nous pouvons procéder exactement comme dans la preuve du théorème précédent. Il suffit de prendre garde à choisir des ouverts U_f qui évitent les points des ensembles E_σ.

Considérons la suite exacte courte

$$0 \to \mathscr{S}_o \to \mathscr{T}_o \to \mathscr{T}_o/\mathscr{S}_o \to 0.$$

Le faisceau $\mathscr{S}_o$ est inversible et donc cohérent. D'après le théorème 6.6.28, nous avons donc $H^1(\mathbf{D}', \mathscr{S}_o) = 0$. On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathscr{T}(\mathbf{D}') \to (\mathscr{T}_o/\mathscr{S}_o)(\mathbf{D}')$$

est surjectif. Par conséquent, la section s_p possède un antécédent φ par ce morphisme. Cette fonction possède les propriétés requises. □

Nous donnerons à la fin de la partie suivante (*cf.* corollaire 7.1.10) une interprétation en termes de séries de ce théorème.

7.1.3. Théorème de Poincaré

Dans la lignée des problèmes de Cousin, le théorème de Poincaré sur $\mathbf{C}$ nous assure que toute fonction méromorphe s'écrit *globalement* comme un quotient de deux fonctions holomorphes. Ici encore, les techniques des espaces de Stein s'avèreront utiles.

Théorème 7.1.9. — *Soit M une partie connexe et de Stein de la droite X. L'anneau $\mathscr{O}(M)$ est intègre et le morphisme naturel*

$$Frac(\mathscr{O}(M)) \to \mathscr{M}(M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Le corollaire 4.4.5 assure donc que l'anneau $\mathscr{O}(M)$ est intègre. Il suffit de démontrer que le morphisme naturel

$$\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(M)) \to \mathscr{M}(M)$$

est surjectif. Soit h un élément de $\mathscr{M}(M)$. Le faisceau de $\mathscr{O}_M$-modules $\mathscr{O}_M \cap h\mathscr{O}_M$ est cohérent. Puisque la fonction nulle appartient évidemment à l'image du morphisme précédent, nous pouvons supposer que h n'est pas nulle. Le faisceau $\mathscr{O}_M \cap h\mathscr{O}_M$ n'est alors pas nul. D'après le théorème A, il possède une section globale non-nulle f sur M. On en déduit le résultat voulu. □

Ce théorème nous permet, par exemple, de décrire les fonctions méromorphes sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 comme quotient de fonctions holomorphes sur ce disque. Nous allons utiliser ce résultat pour donner une version explicite, c'est-à-dire en termes de séries convergentes, du théorème 7.1.8.

Soit $\sigma \in \Sigma$. Soient L_σ une clôture algébrique de $\hat{K}_\sigma$ et $\hat{L}_\sigma$ son complété pour la valeur absolue $|.|_\sigma$. Remarquons que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$

agit sur $\hat{L}_\sigma$. Pour tout élément x de L_σ, nous noterons p_x le polynôme minimal unitaire de x sur $\hat{K}_\sigma$. Nous noterons également

$$L_\sigma^{\circ\circ} = \left\{ x \in L_\sigma \,\middle|\, |x|_\sigma < 1 \right\}.$$

Rappelons, finalement, que l'on peut interpréter les fonctions holomorphes sur $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\hat{K}_\sigma}$ comme des fonctions holomorphes sur $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_{\hat{L}_\sigma}$ invariantes par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$.

Corollaire 7.1.10. — *Soit Σ_Δ une partie finie de Σ. Pour $\sigma \in \Sigma_\Delta$, soient E_σ et F_σ deux sous-ensembles de $L_\sigma^{\circ\circ}$ disjoints, fermés, discrets et évitant 0. Pour $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et $e \in E_\sigma$, soit n_e un entier. Pour $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et $f \in F_\sigma$, soit R_f un polynôme à coefficients dans $\mathscr{H}(f)$ sans terme constant. Supposons que*

i) quel que soient $\sigma \in \Sigma_\Delta$, $e \in E_\sigma$ et $\tau \in Gal(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$, nous avons

$$\tau(e) \in E_\sigma \text{ et } n_{\tau(e)} = n_e \ ;$$

ii) quel que soient $\sigma \in \Sigma_\Delta$, $f \in F_\sigma$ et $\tau \in Gal(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$, nous avons

$$\tau(f) \in F_\sigma \text{ et } R_{\tau(f)} = \tau(R_f).$$

Alors, il existe deux séries $u, v \in A[1/\Sigma_\Delta][\![T]\!]$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) quel que soit $\sigma \notin \Sigma_\Delta$, la série u/v, vue comme fonction analytique sur $\hat{L}_\sigma$, est développable en 0 en une série entière de rayon de convergence supérieur à 1 ;

b) quel que soit $\sigma \in \Sigma_\Sigma$ et $z \notin F_\sigma$, la série u/v, vue comme fonction analytique sur $\hat{L}_\sigma$, est développable en z en une série entière de rayon de convergence strictement positif ;

c) quel que soit $\sigma \in \Sigma_\Sigma$ et $e \in E_\sigma$, la série u/v, vue comme fonction analytique sur $\hat{L}_\sigma$, s'annule en e à un ordre supérieur à n_e ;

d) quel que soient $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et $f \in F_\sigma$, la série u/v, vue comme fonction analytique sur $\hat{L}_\sigma$, est développable en f en une série de Laurent de partie principale $R_f\left(\frac{1}{T-f}\right)$ et de rayon de convergence strictement positif.

7.2. Noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques

7.2.1. Sous-variétés analytiques

Jusqu'ici, nous avons étudié les propriétés de la droite analytique X ou de certaines de ces parties, comme les disques et les couronnes relatifs. Il est également naturel de s'intéresser aux fermés analytiques de la droite X, c'est-à-dire aux parties définies localement par l'annulation de fonctions analytiques. Nous en proposons ici une brève étude.

Définition 7.2.1. — *Soit U un ouvert de X. On appelle* **sous-variété analytique** *de U tout espace localement annelé de la forme*

$$(V(\mathscr{I}), \mathscr{O}_U/\mathscr{I}),$$

où $\mathscr{I}$ est un faisceau d'idéaux de type fini de $\mathscr{O}_U$.

Remarque 7.2.2. — Soient U un ouvert de X et $\mathscr{I}$ un faisceau d'idéaux de type fini de $\mathscr{O}_U$. L'espace topologique $V(\mathscr{I})$ est donc fermé dans U. Puisque le faisceau $\mathscr{O}_U$ est cohérent, le faisceau d'idéaux de type fini $\mathscr{I}$ l'est également. Nous en déduisons que le faisceau $\mathscr{O}_U/\mathscr{I}$ l'est encore.

Définition 7.2.3. — *Soient U un ouvert de X et $(Z, \mathscr{O}_Z)$ une sous-variété analytique de U. Soit x un point de Z. On dit que la sous-variété $(Z, \mathscr{O}_Z)$ est* **intègre en** *x si l'anneau local $\mathscr{O}_{Z,x}$ est intègre. On dit que la sous-variété $(Z, \mathscr{O}_Z)$ est* **intègre** *si elle est intègre en chacun de ses points.*

Nous allons, à présent, décrire les germes de sous-variétés analytiques intègres en un point. Soit x un point de X. Soient U un voisinage ouvert de x dans X et $\mathscr{I}$ un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_U$ tel que la sous-variété analytique

$$(Z, \mathscr{O}_Z) = (V(\mathscr{I}), \mathscr{O}_U/\mathscr{I})$$

soit intègre en x. L'idéal $\mathscr{I}_x$ est donc un idéal premier de $\mathscr{O}_{X,x}$. Nous allons distinguer plusieurs cas.

Supposons tout d'abord, que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps. L'idéal $\mathscr{I}_x$ ne peut alors être que l'idéal nul. Par le principe du prolongement analytique (*cf.* théorème 4.4.2), au voisinage du point x, l'idéal $\mathscr{I}$ est nul et la sous-variété $(Z, \mathscr{O}_Z)$ coïncide avec $(X, \mathscr{O}_X)$.

Supposons, à présent, que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante τ. L'idéal $\mathscr{I}_x$ est alors soit l'idéal nul, soit l'idéal (τ).

Si $\mathscr{I}_x = (0)$, localement, la sous-variété $(Z, \mathscr{O}_Z)$ n'est autre que l'espace total, comme précédemment. Supposons donc que $\mathscr{I}_x = (\tau)$. D'après 6.6.13, l'idéal $\mathscr{I}$ est localement engendré par τ. Distinguons de nouveau plusieurs cas.

Supposons, tout d'abord, que le point $b = \pi(x)$ est un point interne de B. Il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que ce point appartienne à la branche σ-adique ouverte. Il existe donc un polynôme $P(T) \in \mathscr{H}(b)[T] = K_\sigma[T]$ irréductible et unitaire tel que le point x soit le point de la fibre X_b défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. En outre, nous pouvons supposer que $\tau = P(T)$. Notons V un voisinage ouvert et connexe de b dans $\pi(U)$ au-dessus duquel l'idéal $\mathscr{I}$ est engendré par $P(T)$. Nous pouvons supposer que V est contenu dans la branche σ-adique ouverte. Alors l'application qui à tout point c de V associe l'unique point y de la fibre X_c défini par l'équation $P(T)(y) = 0$ réalise un homéomorphisme de V sur $X_V \cap Z$. On en déduit que $X_V \cap Z$ est connexe et localement connexe par arcs. En outre, en tout point y de $X_V \cap Z$, l'anneau local $\mathscr{O}_{Z,y}$ est un corps. Par conséquent, les parties ouvertes et connexes de la sous-variété $X_V \cap Z$ vérifient le principe du prolongement analytique.

Supposons, à présent, que $b = \pi(x)$ soit le point central a_0 de B. Il existe encore un polynôme $P(T) \in \mathscr{H}(b)[T] = K[T]$, irréductible et unitaire, tel que le point x soit le point de la fibre X_b défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. Nous pouvons également supposer que $\tau = P(T)$. Au voisinage de x, la sous-variété définie par l'équation $P(T) = 0$ est un revêtement topologique de B, ramifié au point x. Il suffit de choisir pour voisinage de x un ouvert de X sur lequel $\mathscr{I}$ est engendré par $P(T)$ et qui évite les fibres extrêmes $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ correspondant à un idéal $\mathfrak{m}$ tel que le polynôme $P(T)$ ait des racines multiples dans $k_{\mathfrak{m}}$ (il n'existe qu'un nombre fini de tels idéaux). Comme précédemment, il existe un voisinage W de x dans U tel que la sous-variété $W \cap Z$ soit connexe, localement connexe par arcs et que ses parties ouvertes et connexes vérifient le principe du prolongement analytique.

Supposons, pour finir, que $b = \pi(x)$ soit un point extrême de B. Il existe alors $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $b = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète si, et seulement si, le point x est de type 2 ou 3. Nous pouvons alors choisir l'uniformisante $\tau = \pi_{\mathfrak{m}}$. Par conséquent, au voisinage du point x, la sous-variété Z n'est autre que la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. De nouveau, nous en déduisons qu'il existe un voisinage W de x dans U tel que la sous-variété $W \cap Z$ soit connexe, localement connexe par arcs et que ses parties ouvertes et connexes vérifient le principe du prolongement analytique.

Il nous reste à traiter le cas où l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est ni un corps, ni un anneau local. Le point x est alors nécessairement un point rigide d'une fibre extrême : il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et un polynôme irréductible et unitaire $P(T) \in k_{\mathfrak{m}}[T]$ tel que x soit l'unique point de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. L'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$ est $(\pi_\sigma, P(T))$. L'idéal premier $\mathscr{I}_x$ peut être de plusieurs sortes. Tout d'abord, comme dans les cas précédents, nous pouvons avoir $\mathscr{I}_x = (0)$. La sous-variété Z coïncide alors localement avec l'espace X tout entier. Si l'idéal $\mathscr{I}_x$ est de hauteur 2, c'est l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ et la sous-variété Z est, localement, réduite au point x. Si l'idéal $\mathscr{I}_x$ est de hauteur 1, alors nous pouvons avoir $\mathscr{I}_x = (\pi_{\mathfrak{m}})$, auquel cas la sous-variété Z coïncide localement avec la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$, ou bien $\mathscr{I}_x = (Q(T))$, où $Q(T)$ est un polynôme irréductible de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$ qui relève $P(T)$. Dans ce dernier cas, il est encore possible de construire une section de π qui soit un homéomorphisme d'un voisinage de $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B vers un voisinage de x dans Z. Dans tous les cas, il existe un voisinage W de x dans U tel que la sous-variété $W \cap Z$ soit connexe, localement connexe par arcs et que ses parties ouvertes et connexes vérifient le principe du prolongement analytique.

À l'aide de ces descriptions explicites, nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 7.2.4. — *Soit x un point de X. Soient U un voisinage ouvert de x dans X et $\mathscr{I}$ un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_U$ tel que la sous-variété analytique*

$$(Z, \mathscr{O}_Z) = (V(\mathscr{I}), \mathscr{O}_U/\mathscr{I})$$

soit intègre en x. Alors il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que la sous-variété $Z \cap V$ de V soit intègre.

Proposition 7.2.5. — *Soient U un ouvert de X et $(Z, \mathscr{O}_Z)$ une sous-variété analytique intègre de U. Alors Z est localement connexe par arcs et ses parties ouvertes et connexes satisfont au principe du prolongement analytique.*

7.2.2. Théorème de Frisch

Dans ce paragraphe, nous démontrons que l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de certains compacts est noethérien. Le premier résultat de ce type a été obtenu par J. Frisch dans le cadre de la géométrie analytique complexe (*cf.* [**12**], théorème I, 9) :

Théorème (J. Frisch). — *Soit X une variété analytique réelle ou complexe. Soit K une partie compacte de X, semi-analytique et de Stein. Alors l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de K est noethérien.*

Par la suite, Y.-T. Siu a caractérisé les compacts de Stein K pour lesquels l'anneau $\mathscr{O}(K)$ est noethérien : il s'agit des compacts dont l'intersection avec un fermé de Zariski défini au voisinage ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes (*cf.* [**30**]). C'est cette condition qui a guidé la définition de partie morcelable que nous introduisons ci-dessous. Signalons qu'il existe également une version de ce théorème pour les variétés analytiques sur un corps valué complet (*cf.* [**26**], théorème A.5).

Dans ce paragraphe, nous démontrons un résultat similaire dans le cadre de la droite analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Notre preuve suit de près celle du théorème de J. Frisch qu'ont proposée C. Bănică et O. Stănăşilă (*cf.* [**1**], 5, fin du §3).

Définition 7.2.6. — *Soient E une partie de X et x un point de E. La partie E est dite* **morcelable au voisinage du point** *x si, pour tout voisinage ouvert U de x dans X et toute sous-variété analytique Z de U intègre en x, il existe un voisinage V de x dans $E \cap U$ qui possède un système fondamental de voisinages ouverts dans U dont les traces sur Z sont connexes.*

La partie E est dite **morcelable** *si elle est morcelable au voisinage de chacun de ses points.*

Proposition 7.2.7. — *Soit E une partie morcelable de X. Soient $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur E et $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-faisceaux cohérents de $\mathscr{F}$. Alors la suite $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est localement stationnaire dans E au sens où, quel que soit $x \in E$, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ et un voisinage U de x dans E tels que*

$$\forall n \geq n_0,\ \forall z \in U,\ (\mathscr{F}_{n_0})_z \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}_n)_z.$$

Démonstration. — Soit $x \in E$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_0$, on ait

$$(\mathscr{F}_{n_0})_x \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}_n)_x.$$

Quitte à remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F}/\mathscr{F}_{n_0}$ et $\mathscr{F}_n$ par $\mathscr{F}_n/\mathscr{F}_{n_0}$, pour $n \geq n_0$, puis à décaler les indices, nous pouvons supposer que

$$(\mathscr{F}_n)_x = 0,$$

quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque $\mathscr{F}_x$ est un module de type fini sur $\mathscr{O}_{X,x}$, il existe un entier $r \in \mathbf{N}$ et une filtration

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \cdots \subset M^r = \mathscr{F}_x$$

de $\mathscr{F}_x$ par des sous-modules de type fini et des idéaux premiers $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de $\mathscr{O}_{X,x}$ vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in [\![0, r-1]\!]$, on dispose d'un isomorphisme

$$M^{(i+1)}/M^{(i)} \simeq \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_i.$$

Cette filtration et ces isomorphismes se prolongent au niveau des faisceaux. Il existe une filtration de $\mathscr{F}$

$$0 = \mathscr{F}^{(0)} \subset \mathscr{F}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathscr{F}^{(r)} = \mathscr{F}$$

par des sous-faisceaux cohérents définis au voisinage de a et r sous-variétés analytiques $Z_0, \ldots, Z_{r-1}$ définies au voisinage de x, intègres en x et vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in [\![0, r-1]\!]$, on dispose d'un isomorphisme de faisceaux

$$\mathscr{F}^{(i+1)}/\mathscr{F}^{(i)} \simeq \mathscr{O}_{Z_i}.$$

Il suffit, à présent, de montrer que, pour chaque $i \in [\![0, r-1]\!]$, la sous-suite $(\mathscr{G}_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{F}^{(i)}/\mathscr{F}^{(i+1)} \simeq \mathscr{O}_{Z_i}$ induite par $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stationne au voisinage de x dans E et même au voisinage de x dans $E \cap Z_i$. Soit U un voisinage ouvert de x dans X sur lequel Z_i est définie. D'après la proposition 7.2.4, nous pouvons supposer que $Z_i \cap U$ est une sous-variété intègre de U. Par hypothèse, la partie E de X est morcelable au voisinage du point x. Il existe donc un voisinage V de x dans $E \cap U$ qui possède un système fondamental de voisinages ouverts dans X dont les intersections avec Z_i sont connexes.

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathscr{G}_{i,n}$. Il existe un voisinage ouvert W de V dans X sur lequel la fonction f est définie et tel que $W \cap Z_i$ soit une sous-variété intègre et connexe de W. Puisque $(\mathscr{G}_{i,n})_x = 0$, la fonction f est nulle au voisinage de x dans Z_i. D'après 7.2.5, $W \cap Z_i$ vérifie le principe du prolongement analytique. On en déduit que f est nulle sur $W \cap Z_i$. Finalement, le faisceau $\mathscr{G}_{i,n}$ est nul sur $V \cap Z_i$, et donc sur V. □

Corollaire 7.2.8. — *Soient E une partie de X morcelable et de Stein, $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de sections de $\mathscr{F}$ sur E. Le sous-faisceau de $\mathscr{F}$ engendré par la famille $(f_i)_{i\in I}$ est cohérent.*

Théorème 7.2.9. — *Soient E une partie compacte morcelable et de Stein de X. L'anneau $\mathscr{O}(E)$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de E est noethérien.*

Démonstration. — Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante d'idéaux de type fini de $\mathscr{O}(E)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathscr{I}_n$ le faisceau d'idéaux cohérents de $\mathscr{O}_X$ engendré par I_n. D'après la proposition 7.2.7 et la compacité de E, il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ à partir duquel la suite $(\mathscr{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stationne.

Puisque l'idéal I_{n_0} est de type fini, il possède un système générateur fini $(f_1, \ldots, f_p)$, avec $p \in \mathbf{N}$ et, quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in \mathscr{O}(E)$. Le morphisme de faisceaux

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_X^p & \to & \mathscr{I}_{n_0} \\ (a_1, \ldots, a_p) & \mapsto & a_1 f_1 + \ldots + a_p f_p \end{array}$$

est alors surjectif.

Soit $n \geq n_0$. Notons $\mathscr{G}$ le noyau du morphisme de faisceaux φ. C'est encore un faisceau cohérent sur E. Nous disposons de la suite exacte

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{O}^p \to \mathscr{I}_n \to 0.$$

Puisque $H^1(E, \mathscr{G}) = 0$, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}(E)^p & \to & \mathscr{I}_n(E) \\ (a_1, \ldots, a_p) & \mapsto & a_1 f_1 + \ldots + a_p f_p \end{array},$$

est surjectif. Par conséquent, nous avons

$$I_n \subset \mathscr{I}_n(E) = (f_1, \ldots, f_p)\, \mathscr{O}(E) \subset I_{n_0}.$$

On en déduit que $I_n = I_{n_0}$. □

7.2.3. Séries arithmétiques

Dans ce paragraphe, nous appliquons le théorème obtenu afin de démontrer la noethérianité de certains anneaux de séries arithmétiques. Il est vraisemblable que l'analogue du théorème de Frisch vaut pour toute partie semi-analytique de la droite $X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$. Cependant, pour le démontrer par la méthode présentée ci-dessus, il nous faudrait savoir que les parties semi-analytiques de X sont localement connexes. Nous ne nous lancerons pas dans la démonstration de ce résultat et nous contenterons d'adapter le théorème de Frisch au cas des couronnes fermées au-dessus de certaines parties compactes de l'espace B.

Soit V une partie compacte et connexe de l'espace B. Soit s et t deux nombres réels vérifiant $0 \leq s \leq t$. Posons

$$C = \overline{C}_V(s, t) = \{x \in X_V \mid s \leq |T(x)| \leq t\}..$$

Proposition 7.2.10. — *La couronnne C de X est localement connexe par arcs.*

Démonstration. — Si x est un point intérieur à C, le résultat est vrai car il l'est pour l'espace X lui-même, d'après le théorème 4.4.1. Nous supposerons donc, désormais, que le point x est situé sur le bord de la couronne C. En particulier, nous avons nécessairement $|T(x)| = s$ ou $|T(x)| = t$. Nous supposerons que $|T(x)| = t$. L'autre cas se traite de même. Nous allons distinguer selon le type du point x et de son projeté $\pi(x)$ sur la base.

Supposons, tout d'abord, que le point $\pi(x)$ soit un point extrême : il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $\pi(x) = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. Si le point x est le point η_s, alors le résultat provient du corollaire 2.4.5, si $t \neq 1$, et de la proposition 4.3.3, si $t = 1$. Il faut plus précisément revenir à la description explicite des sections donnée dans la preuve de ces propositions. Il nous reste à traiter le cas où x vérifie $|T(x)| = 1$, mais n'est pas le point η_1. Un tel point appartient nécessairement à l'intérieur de la couronne C. En effet, il existe $\tilde{\alpha} \in \tilde{k}^*_{\mathfrak{m}}$ et $u \in [0, 1[$ tels que $x = \eta_{\tilde{\alpha},u}$. Choisissons un relevé α de $\tilde{\alpha}$ dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$. Soit $v \in]u, 1[$. Alors le voisinage de x dans X défini par

$$U = \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \,\middle|\, |(T - \alpha)(y)| < v \right\}$$

est contenu dans $\overline{C}(s, 1)$. En effet, soient $\varepsilon \in]0, +\infty]$ et $y \in U \cap X_{a^{\varepsilon}_{\mathfrak{m}}}$. Nous avons $|(T - \alpha)(y)| < v < 1$. Puisque $|\alpha(y)| = |\alpha|^{\varepsilon}_{\mathfrak{m}} = 1$, cela impose que $|T(y)| = 1$.

Lorsque le point $\pi(x)$ est le point central a_0 de B, le résultat se démontre de façon identique.

Venons-en, à présent, au cas de la partie archimédienne de X. Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. Rappelons que, d'après la proposition 3.4.2, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} X_{a_\sigma} \times]0, 1] & \to & X'_\sigma \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & x^{\varepsilon} \end{array}$$

est un homéomorphisme. Nous supposerons que $K_\sigma = \mathbf{C}$. Le cas $K_\sigma = \mathbf{R}$ se traite de même. Nous avons

$$\varphi^{-1}(X'_\sigma \cap \overline{C}(s, t)) = \left\{ (u, z) \in]0, 1] \times \mathbf{C} \,\middle|\, s^{1/u} \leq |z| \leq t^{1/u} \right\}.$$

Cette partie est localement connexe par arcs et il en est de même de son intersection avec la couronne C.

Il nous reste à traiter le cas où le point $\pi(x)$ est de la forme a^{λ}_{σ}, avec $\sigma \in \Sigma_f$ et $\lambda \in]0, +\infty[$. Nous pouvons supposer que $\lambda = 1$. Comme dans le cas des fibres au-dessus d'un corps trivialement valué, il nous suffit de traiter le cas où x est le point η_t de sa fibre. Nous supposerons que $t \in]0, 1[$. Les autres cas se traitent de même. Soit U un voisinage de x dans X. Il existe un voisinage connexe par

arcs V de x dans $X_{a_\sigma} \cap U$. Il existe $\beta \in]0,1[$ tel que, quel que soit $u \in]t^{1/\beta}, t^\beta[$, on ait $\eta_u \in X_{a_\sigma} \cap V$. D'après la proposition 3.4.1, quitte à augmenter β, nous pouvons supposer que la partie

$$W = \{x^\varepsilon,\, x \in X_{a_\sigma} \cap V, \varepsilon \in]\beta, 1/\beta[\}$$

est un voisinage de x dans U. La trace de W sur chaque fibre est connexe par arcs en tant qu'intersection sur un arbre de deux parties connexes par arcs (l'une étant homéomorphe à V, l'autre étant une couronne). En outre, ces fibres sont jointes par une section depuis la base : l'application qui au point $a_{\sigma,\varepsilon}$, avec $\varepsilon \in]\beta, 1/\beta[$, associe le point η_t de sa fibre. On en déduit que la trace de la partie W sur la couronne C est connexe par arcs. □

Corollaire 7.2.11. — *La couronne C de X est morcelable.*

Démonstration. — Soit x un point de C. Soient U un voisinage ouvert de x dans X et Z une sous-variété analytique de U intègre en x. Nous devons montrer qu'il existe un voisinage V de x dans $C \cap U$ qui possède un système fondamental de voisinages ouverts dans U dont les traces sur Z sont connexes.

Supposons, tout d'abord, que $Z = U$ au voisinage de x. Dans ce cas, la proposition précédente nous permet de conclure. Si, maintenant, Z est une sous-variété analytique stricte de U, nous en connaissons précisément la forme grâce aux descriptions données dans la partie 7.2.1. En particulier, au voisinage du point x, la sous-variété Z est soit un point, soit homéomorphe à un intervalle, soit une fibre extrême. Le résultat est immédiat dans chacun de ces cas. □

Théorème 7.2.12. — *L'anneau $\mathscr{O}(C)$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de la couronne C de X est noethérien.*

Démonstration. — Une telle partie est morcelable en vertu du corollaire précédent. Nous savons également qu'elle est de Stein, d'après le théorème 6.5.6. Le théorème 7.2.9 nous permet donc de conclure. □

Corollaire 7.2.13. — *Soient Σ' un sous-ensemble fini de Σ contenant Σ_∞ et $(r_\sigma)_{\sigma\in\Sigma'}$ une famille d'éléments de $]0,1[$. Il existe un élément $N \in A^*$ tel que*

$$\bigcap_{\sigma\in\Sigma'} A_\sigma = A\left[\frac{1}{N}\right].$$

Le sous-anneau de $K(\!(T)\!)$ constitué des séries de la forme $\sum_{k\geq k_0} a_k T^k$ vérifiant les conditions

i) $k_0 \in \mathbf{Z}$,

ii) $\forall k \geq k_0$, $a_k \in A[1/N]$,
iii) $\forall \sigma \in \Sigma'$, $\exists r > r_\sigma$, $\lim\limits_{k \to +\infty} |a_k|_\sigma \, r^k = 0$

est noethérien.

Le sous-anneau de $K[\![T]\!]$ *constitué des séries de la forme* $\sum_{k \geq 0} a_k \, T^k$ *vérifiant les conditions*

i) $\forall k \geq 0$, $a_k \in A[1/N]$,
ii) $\forall \sigma \in \Sigma'$, $\exists r > r_\sigma$, $\lim\limits_{k \to +\infty} |a_k|_\sigma \, r^k = 0$

est noethérien.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème précédent à une couronne bien choisie. Posons

$$t = \max_{\sigma \in \Sigma'} (r_\sigma) \in \,]0, 1[.$$

Quel que soit $\sigma \in \Sigma'$, il existe $\varepsilon_\sigma \in \,]0, 1]$ tel que

$$t^{1/\varepsilon_\sigma} = r_\sigma.$$

Définissons une partie compacte V de B par

$$V = \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} [a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}] \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \notin \Sigma'} B_\sigma \right).$$

Soit $s \in \,]0, t]$. D'après la proposition 3.2.24, le premier anneau considéré n'est autre que l'anneau $\mathscr{O}(\overline{C}_V(s, t))$. Il est noethérien, en vertu du théorème précédent.

Le second énoncé s'obtient de même en considérant le disque $\overline{D}_V(t)$, au lieu de la couronne $\overline{C}_V(s, t)$.

□

Comme cas particulier du théorème, nous retrouvons un résultat de D. Harbater (*cf.* [**18**], théorème 1.8). Signalons que notre démonstration se distingue très nettement de la sienne, qui passe par une description explicite de tous les idéaux premiers de l'anneau étudié.

Corollaire 7.2.14. — *Soit* $r_\infty \in \,]0, 1[$. *Considérons le sous-anneau* $\mathbf{Z}_{r_\infty^+}[\![T]\!]$ *de* $\mathbf{Z}[\![T]\!]$ *constitué des séries de la forme* $\sum_{k \geq 0} a_k \, T^k$ *vérifiant la condition*

$$\exists r > r_\infty, \ \lim_{k \to +\infty} |a_k|_\infty \, r^k = 0.$$

C'est l'anneau des fonctions holomorphes au voisinage du disque de centre 0 *et de rayon* r_∞ *de* $\mathbf{C}$ *dont le développement en série entière en* 0 *est à coefficients entiers. L'anneau* $\mathbf{Z}_{r_\infty^+}[\![T]\!]$ *est noethérien.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le second résultat du théorème précédent avec $K = \mathbf{Q}$ et $\Sigma' = \Sigma_\infty$. $\square$

7.3. Problème de Galois inverse

Nous exposons ici une application de notre théorie au problème de Galois inverse. De façon plus précise, nous nous proposons de démontrer que tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps $\mathscr{M}(\mathbf{D})$, où $\mathbf{D}$ désigne le disque relatif ouvert de rayon 1 centré en la section nulle de $X = \mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$. Signalons que, dans le cas où le corps de nombres K considéré n'est autre que le corps $\mathbf{Q}$, nous redémontrons un résultat de D. Harbater (*cf.* [**20**], corollaire 3.8). Nous souhaitons insister sur le fait que la démonstration que nous proposons est purement géométrique, ce qui la distingue de celle de D. Harbater, très algébrique.

Nous utilisons un procédé classique : construction de revêtements galoisiens cycliques, puis recollement de ces revêtements afin d'en obtenir un nouveau ayant pour groupe de Galois un groupe fini prescrit. L'on trouvera une introduction très agréable à ces techniques dans l'article [**24**] où Q. Liu démontre, après D. Harbater et en suivant une idée de J.-P. Serre, que, pour tout nombre premier p, tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps $\mathbf{Q}_p(T)$. La mise en œuvre de ces deux étapes que nous proposons ne présente aucune difficulté particulière, une fois connues les propriétés de la droite analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Les méthodes utilisées par D. Harbater nous paraissent d'une difficulté technique bien supérieure (*cf.* [**19**], proposition 2.2 pour la construction des revêtements cycliques et [**20**], théorème 3.6, dont la preuve fait appel aux résultats de l'article [**18**], pour le recollement).

Signalons que nous construisons en réalité des faisceaux d'algèbres cohérents ayant pour groupes d'automorphismes des groupes finis prescrits. Bien entendu, ces faisceaux sont les images directes de faisceaux structuraux de revêtements ramifiés de la droite analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres et il y aurait tout intérêt à mener plutôt nos constructions dans ce langage. Nous nous en abstenons uniquement parce qu'aucune référence concernant ces espaces n'est disponible. Nous indiquons cependant en remarque les traductions dans ce cadre ; elles sont immédiates pour qui dispose d'une bonne théorie des courbes analytiques sur un anneau d'entiers de corps de nombres.

Mentionnons enfin que les méthodes présentées ici peuvent être appliquées avec succès dans d'autres situations, par exemple celle où l'on substitue au corps de nombres K un corps de fonctions. Elles peuvent également être adpatées de façon à fournir des revêtements non plus d'un disque, mais d'une droite projective sur un corps valué complet, permettant ainsi de retrouver le fait que

tout groupe fini est groupe de Galois sur le corps $\mathbf{Q}_p(T)$. Ces résultats ont été rédigés dans l'article [**27**].

Introduisons quelques notations. Rappelons que nous notons

$$\mathbf{D} = \mathring{D}(0,1) = \left\{ x \in X \,\middle|\, |T(x)| < 1 \right\}.$$

Pour tout élément $\mathfrak{m}$ de Σ_f, nous posons

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{m}} = \mathbf{D} \cap X_{\mathfrak{m}} \text{ et } \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}} = \mathbf{D} \cap X'_{\mathfrak{m}} = \mathbf{D}_{\mathfrak{m}} \setminus X_0.$$

7.3.1. Construction locale de revêtements cycliques

Soient V une partie de X et P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{O}(V)$. Notons n son degré. On définit un préfaisceau $\mathscr{F}_P$ sur V en posant, pour toute partie ouverte U de V,

$$\mathscr{F}_P(U) = \mathscr{O}(U)[S]/(P(S))$$

et en utilisant les morphismes de restriction induits par ceux du faisceau $\mathscr{O}$.

Lemme 7.3.1. — *Le préfaisceau $\mathscr{F}_P$ est un faisceau de $\mathscr{O}_V$-algèbres cohérent.*

Démonstration. — On constate immédiatement que le préfaisceau $\mathscr{F}_P$ est un préfaisceau de $\mathscr{O}_V$-algèbres. Il nous suffit donc de montrer que c'est un faisceau et un faisceau de $\mathscr{O}_V$-modules cohérent. Puisque le polynôme P est unitaire, le morphisme de $\mathscr{O}_V$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_V^n & \to & \mathscr{F}_P \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. On en déduit que le préfaisceau $\mathscr{F}$ est un faisceau, puis qu'il est cohérent, car le faisceau structural $\mathscr{O}$ l'est, en vertu du théorème 4.5.5. □

Remarque 7.3.2. — Le faisceau $\mathscr{F}_P$ est l'image directe du faisceau structural d'une courbe analytique sur A. Celle-ci nous est donnée comme un revêtement ramifié, de degré inférieur à n, de la partie V de la droite analytique $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$.

Nous allons, à présent, restreindre notre étude aux faisceaux $\mathscr{F}_P$ pour une classe de polynômes P particuliers. Soient n un entier supérieur à 1, p un nombre

premier congru à 1 modulo n et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de l'anneau A contenant p. Posons

$$Q(S) = S^n - \pi_{\mathfrak{m}}^n - T \in \mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})[S].$$

Le résultat du lemme suivant donne la raison du choix des entiers n et p.

Lemme 7.3.3. — *L'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ contient n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.*

Démonstration. — Puisque l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ contient l'anneau $\mathbf{Z}_p$, il suffit de montrer que le polynôme $U^n - 1$ possède n racines dans $\mathbf{Z}_p$. Le groupe multiplicatif $\mathbf{F}_p^*$ du corps résiduel $\mathbf{F}_p$ de $\mathbf{Z}_p$ est cyclique et d'ordre $p-1$. Puisque n divise $p-1$, le groupe $\mathbf{F}_p^*$ contient un élément d'ordre exactement n et le polynôme $U^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{F}_p$. Le lemme de Hensel assure qu'il l'est encore sur $\mathbf{Z}_p$. □

Pour tout entier positif i et tout nombre rationnel k, posons

$$C_k^i = \frac{k\,(k-1)\,\cdots\,(k-i+1)}{i!} \in \mathbf{Q}.$$

Rappelons que nous avons l'égalité

$$\left(\sum_{i\geq 0} C_{\frac{1}{n}}^i\, Z^i\right)^n = 1 + Z \text{ dans } \mathbf{Q}[\![Z]\!].$$

Lemme 7.3.4. — *Pour tout élément x de $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}$ et tout entier positif i, nous avons*

$$\left|C_{\frac{1}{n}}^i(x)\right| \leq 1.$$

Démonstration. — Soient x un élément de $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}$ et i un entier positif. Notons $|.|_x$ la valeur absolue sur le corps $\mathscr{H}(x)$. Remarquons que l'application

$$C_k^i : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$$

est polynomiale, et donc continue lorsque l'on munit le corps $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue $|.|_x$. Nous savons que, pour tout entier l, l'élément C_l^i est entier. Il vérifie donc l'inégalité

$$\left|C_l^i\right|_x \leq 1,$$

puisque la valeur absolue $|.|_x$ est ultramétrique. En outre, le nombre premier p ne divise pas l'entier n. Par conséquent, le nombre rationnel $\frac{1}{n}$ appartient à $\mathbf{Z}_p$ et il est donc limite d'éléments de $\mathbf{Z}$ pour la valeur absolue $|.|_x$. On en déduit le résultat voulu. □

Fixons ζ une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Notons τ la permutation cyclique $(1\ 2\ \cdots\ n)$ de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Posons

$$U = \left\{ x \in \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}} \,\middle|\, |T(x)| < |\pi_m(x)|^n \right\}.$$

Proposition 7.3.5. — *Il existe un isomorphisme de $\mathscr{O}_U$-algèbres*

$$\varphi : \mathscr{F}_Q \to \mathscr{O}^n$$

tel que, pour tout ouvert V de U et tout élément s de $\mathscr{F}_Q(V)$, nous ayons

$$\varphi(\zeta s) = \tau(\varphi(s)).$$

Démonstration. — Considérons la fonction

$$f = \pi_{\mathfrak{m}}^{-n} T$$

définie sur $X'_{\mathfrak{m}}$. Pour tout élément r de $]0,1[$, considérons la partie V_r de $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}$ définie par

$$V_r = \left\{ x \in \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}} \,\middle|\, |T(x)| \leq r|\pi_{\mathfrak{m}}(x)|^n \right\}.$$

Pour tout élément x de V_r et tous entiers $a \geq 0$ et $b \geq a$, nous avons

$$\left| \sum_{i=a}^{b} C^i_{\frac{1}{n}}(x)\, f(x)^i \right| \leq r^a.$$

On en déduit que la série $\sum_{i\geq 0} C^i_{\frac{1}{n}}\, f^i$ converge uniformément sur V_r. Puisque tout point de U possède un voisinage de la forme V_r, pour un certain élément r de $]0,1[$, la série $\sum_{i\geq 0} C^i_{\frac{1}{n}}\, f^i$ définit une fonction g sur U. Cette fonction vérifie l'égalité

$$g^n = 1 + f = 1 + \pi_{\mathfrak{m}}^{-n} T \text{ dans } \mathscr{O}(U).$$

On en déduit que nous avons l'égalité

$$Q(S) = S^n - \pi_{\mathfrak{m}}^n - T = \prod_{j=0}^{n} (S - \pi_{\mathfrak{m}} \zeta^j\, g) \text{ dans } \mathscr{O}(U)[S].$$

Par conséquent, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_Q & \to & \mathscr{O}^n \\ F(S) & \mapsto & \big(F(\pi_{\mathfrak{m}}\, g), F(\pi_{\mathfrak{m}}\, \zeta^{-1}\, g), \ldots, F(\pi_{\mathfrak{m}}\, \zeta^{-(n-1)}\, g)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme. On vérifie immédiatement qu'il satisfait la condition requise. □

Remarque 7.3.6. — La première partie du résultat signifie que le revêtement associé au faisceau $\mathscr{F}_Q$ est trivial au-dessus de l'ouvert U. La seconde assure que le groupe $\langle \zeta \rangle \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ agit sur le revêtement par une permutation cyclique des feuillets du lieu trivial.

Lemme 7.3.7. — *Le polynôme $Q(S) = S^n - \pi_{\mathfrak{m}}^n - T$ est irréductible sur le corps Frac($\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})$). En particulier, l'anneau $\mathscr{F}_Q(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})$ est intègre.*

Démonstration. — Notons x le point 0 de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. D'après le corollaire 3.2.5, l'anneau local en ce point est isomorphe à l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[\![T]\!]$. Remarquons que le polynôme $Q(S)$ est irréductible sur le corps $\hat{K}_{\mathfrak{m}}(\!(T)\!)$. En effet, il n'y a aucune racine, pour des raisons de valuation T-adique, est séparable et le groupe de Galois de son extension de décomposition agit transitivement sur ses racines.

D'après le principe du prolongement analytique (*cf.* théorème 4.4.2), le morphisme naturel $\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}) \to \mathscr{O}_{X,x}$ est injectif. Par conséquent, le corps $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\mathbf{D}'_m))$ est un sous-corps de $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,x})$, et donc de $\hat{K}_{\mathfrak{m}}(\!(T)\!)$. On en déduit que le polynôme $Q(S)$ est irréductible sur le corps $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}))$.

Puisque le polynôme $Q(S)$ est unitaire, l'unicité de la division euclidienne assure que le morphisme

$$\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})[S]/(Q(S)) \to \mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}))[S]/(Q(S))$$

est injectif. Puisque l'anneau au but est intègre, celui à la source, qui n'est autre que l'anneau $\mathscr{F}_Q(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})$, l'est également.

□

Remarque 7.3.8. — Ce résultat signifie que la courbe associée au faisceau $\mathscr{F}_Q$ est intègre, c'est-à-dire réduite et irréductible.

Nous pouvons être encore plus précis.

Lemme 7.3.9. — *Soient x un point de U et i un élément de $[\![1, n]\!]$. Le morphisme*

$$\rho : \mathscr{F}_Q(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}) \to \mathscr{F}_x \xrightarrow[\sim]{\varphi_x} \mathscr{O}_{X,x}^n \xrightarrow{p_i} \mathscr{O}_{X,x},$$

où p_i est la projection sur le $i^{\text{ème}}$ facteur, est injectif.

Démonstration. — Soit s un élément de l'anneau $\mathscr{F}_Q(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}) = \mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})/(Q(S))$ dont l'image par le morphisme ρ est nulle. Choisissons un élément $F(S)$ de $\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}})[S]$ qui représente la section s. Reprenons les notations de la preuve de la proposition 7.3.5. Par hypothèse, nous avons

$$R(\pi_{\mathfrak{m}}\, \zeta^{-i}\, g) = 0 \text{ dans } \mathscr{O}_{X,x}.$$

Pour montrer que l'élément s est nul, il suffit de montrer que le polynôme $Q(S)$ est le polynôme minimal de l'élément $\pi_{\mathfrak{m}}\, \zeta^{-i}\, g$ sur le corps $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}))$. C'est bien le cas, puisque le lemme précédent assure que le polynôme Q est irréductible sur le corps $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}))$. □

Remarque 7.3.10. — Ce résultat est une sorte de principe du prolongement analytique sur la courbe associée au faisceau $\mathscr{F}_Q$: si une fonction holomorphe sur la courbe est nulle au voisinage d'un point de l'un des feuillets du revêtement, alors elle est nulle partout. On attend que ce principe vaille pour toute courbe irréductible.

Terminons par un résultat topologique.

Lemme 7.3.11. — *La partie*

$$F = \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}} \setminus U = \left\{x \in \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}} \,\middle|\, |T(x)| \geq |\pi_m(x)|^n\right\}$$

est fermée dans le disque $\mathbf{D}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que F est fermée dans $\mathbf{D}_{\mathfrak{m}}$ puisque cette dernière partie est elle-même fermée dans $\mathbf{D}$. En d'autres termes, nous souhaitons montrer que la partie

$$V = U \cup (\mathbf{D} \cap X_0)$$

est ouverte dans $\mathbf{D}_{\mathfrak{m}}$. Puisque U est une partie ouverte de $\mathbf{D}_{\mathfrak{m}}$, il suffit de montrer que V est voisinage dans $\mathbf{D}_{\mathfrak{m}}$ de chacun des points de $\mathbf{D} \cap X_0$.

Soit x un point de $\mathbf{D} \cap X_0$. Posons $r = |T(x)|$. C'est un élément de l'intervalle $]0, 1[$. Soient s un élément de $]r, 1[$ et ε un élément de $]0, 1[$ tels que l'on ait $|\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{n\varepsilon} > s$. La partie

$$\left\{y \in \pi^{-1}([a_0, a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}[) \,\middle|\, |T(y)| < s\right\}$$

est un voisinage ouvert du point x dans $\mathbf{D}_{\mathfrak{m}}$ qui est contenu dans V. □

7.3.2. Recollement

Soit G un groupe fini. Notons n son ordre et $g_1, \ldots, g_n$ ses éléments. Chacun de ces éléments engendre un sous-groupe cyclique de G. Nous allons construire, par la méthode mise en place au numéro précédent, un revêtement galoisien cyclique associé à chacun des éléments du groupe G. Il ne nous restera plus ensuite qu'à les recoller convenablement.

En termes géométriques, nous allons recoller les revêtements au-dessus de leur lieu de trivialité en tenant compte des relations entre les éléments du groupe G. Ce procédé est simple et naturel et l'on ne doit pas se laisser rebuter par la technicité apparente de la construction qui suit.

Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Notons n_i l'ordre de l'élément g_i dans le groupe G. C'est un diviseur de n et nous noterons d_i le quotient. Soient p_i un nombre premier congru à 1 modulo n_i et $\mathfrak{m}_i$ un idéal maximal de l'anneau A qui contient p_i. Soit ζ_i une racine primitive $n_i^{\text{ème}}$ de l'unité dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Notons $\mathscr{F}_i$ le faisceau $\mathscr{F}_{S^{n_i}-\pi_{\mathfrak{m}_i}^{n_i}-T}$ sur $\mathbf{D}''_{\mathfrak{m}_i}$ et $\mathscr{G}_i$ le faisceau $\mathscr{F}_i^{d_i}$. Posons

$$U_i = \left\{x \in \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i} \,\middle|\, |T(x)| < |\pi_{m_i}(x)|^{n_i}\right\} \text{ et } F_i = \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i} \setminus U_i.$$

Notons τ_i la permutation cyclique $(1\ 2\ \cdots\ n_i)$ de l'ensemble $[\![1,n_i]\!]$. D'après la proposition 7.3.5, il existe un isomorphisme de $\mathscr{O}_{U_i}$-algèbres

$$\varphi_i : \mathscr{F}_i \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}^{n_i}$$

qui vérifie la condition suivante : pour tout ouvert V de U_i et toute section s de $\mathscr{F}_i$ sur V, nous avons

$$\varphi_i(\zeta_i\, s) = \tau_i(\varphi_i(s)).$$

Choisissons des éléments $a_{i,0}, \ldots, a_{i,d_i-1}$ de $[\![1,n]\!]$ de sorte que tout élément du quotient $G/\langle g_i\rangle$ possède un représentant et un seul parmi les éléments $g_{a_{i,0}}, \ldots, g_{a_{i,d_i-1}}$. Notons σ_i la permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\forall u \in [\![0,d_i-1]\!],\ \forall v \in [\![1,n_i]\!],\ g_{a_{i,u}}\, g_i^{v-1} = g_{\sigma_i(un_i+v)}.$$

D'après le lemme 7.3.11, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, la partie F_i est fermée dans $\mathbf{D}$. Définissons une partie ouverte de $\mathbf{D}$ par

$$U_0 = \mathbf{D} \setminus \bigcup_{1\leq i\leq n} F_i.$$

Notons $\mathscr{G}_0$ le faisceau $\mathscr{O}^n$ sur U_0.

Lemme 7.3.12. — *L'ouvert U_0 de la droite X est connexe.*

Démonstration. — Notons $\Sigma_0 = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$. Par définition, nous avons

$$U_0 = \bigcup_{1\leq i\leq n} \left\{x \in \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i} \,\middle|\, |T(x)| < |\pi_{\mathfrak{m}_i}(x)|^{n_i}\right\} \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma\setminus\Sigma_0} \mathbf{D}_\sigma.$$

La projection de cette partie est

$$B_0 = B \setminus \bigcup_{1\leq i\leq n} \{\tilde{a}_{\mathfrak{m}_i}\},$$

qui est connexe. En outre, la section nulle définit une section continue de l'application $\pi : U_0 \to B_0$ et, pour tout élément b de B_0, la partie $X_b \cap U_0$ est connexe. On en déduit que la partie U_0 est connexe. $\square$

La famille $(U_0, \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_1}, \ldots, \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_n})$ définit un recouvrement ouvert du disque $\mathbf{D}$. Les seules intersections de deux éléments de cette famille à n'être pas vides sont celles de la forme $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i} \cap \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i}$, pour $i \in [\![0, n]\!]$, et $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i} \cap U_0 = U_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. Pour définir un faisceau d'algèbres $\mathscr{G}$ en recollant les faisceaux $\mathscr{G}_0, \ldots, \mathscr{G}_n$, il suffit de choisir un isomorphisme de $\mathscr{O}$-algèbres entre $\mathscr{G}_i$ et $\mathscr{G}_0$ au-dessus de l'ouvert U_i, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$. Nous utiliserons l'isomorphisme

$$\psi_i : \mathscr{G}_i \xrightarrow[\sim]{(\varphi_i, \ldots, \varphi_i)} \mathscr{O}^n \xrightarrow[\sim]{\sigma_i^{-1}} \mathscr{O}^n = \mathscr{G}_0.$$

Remarquons que le faisceau $\mathscr{G}$ est cohérent, car nous l'avons construit en recollant des faisceaux cohérents (*cf.* lemme 7.3.1).

Proposition 7.3.13. — *Il existe un morphisme de groupes injectif du groupe G dans le groupe des automorphismes de $\mathscr{O}$-algèbres du faisceau $\mathscr{G}$.*

Démonstration. — Soit h un élément du groupe G. Notons α_h la permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ hg_j = g_{\alpha_h(j)}.$$

On définit à l'aide de cette permutation un automorphisme de $\mathscr{O}_{U_0}$-algèbres μ_h de $\mathscr{G}_0$:

$$\mu_h : \mathscr{G}_0 = \mathscr{O}^n \xrightarrow[\sim]{\alpha_h} \mathscr{O}^n = \mathscr{G}_0.$$

Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$. Notons β_h la permutation de l'ensemble $[\![0, d_i - 1]\!]$ telle que

$$\forall u \in [\![0, d_i - 1]\!],\ hg_{a_{i,u}} = g_{a_{i,\beta_h(u)}} \text{ dans } G/\langle g_i \rangle.$$

Notons β'_h la permutation de l'ensemble $[\![1, d_i]\!]$ définie par

$$\forall u \in [\![1, d_i]\!],\ \beta'_h(u) = \beta_h(u - 1) + 1.$$

Elle induit un automorphisme de $\mathscr{O}_{U_i}$-algèbres de $\mathscr{G}_i$:

$$\mathscr{G}_i = \mathscr{F}_i^{d_i} \xrightarrow[\sim]{\beta'_h} \mathscr{F}_i^{d_i} = \mathscr{G}_i.$$

Soit u un élément de $[\![0, d_i - 1]\!]$. Il existe un élément $m_{i,u}$ de $[\![0, n_i - 1]\!]$ tel que

$$hg_{a_{i,u}} = g_{a_{i,\beta_h(u)}}\, g_i^{m_{i,u}} \text{ dans } G.$$

On définit alors un automorphisme γ_h de $\mathscr{O}_{U_i}$-algèbres de $\mathscr{G}_i$:

$$\mathscr{G}_i = \mathscr{F}_i^{d_i} \xrightarrow[\sim]{(\zeta_i^{m_{i,1}}, \ldots, \zeta_i^{m_{i,d_i}})} \mathscr{F}_i^{d_i} = \mathscr{G}_i.$$

Un simple calcul montre qu'au-dessus de l'ouvert U_i, les automorphismes μ_h et $\gamma_h \circ \beta'_h$ de $\mathscr{G}$ coïncident.

Nous avons donc construit une application

$$\mu : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}}(\mathscr{G}) \\ h & \mapsto & \mu_h \end{array}.$$

Montrons que c'est un morphisme de groupes. Soient h_1 et h_2 deux éléments de G. Pour tout élément j de $[\![1, n]\!]$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} g_{\alpha_{h_1 h_2}(j)} & = & h_1 h_2 g_j \\ & = & h_1 g_{\alpha_{h_2}(j)} \\ & = & g_{\alpha_{h_1}(\alpha_{h_2}(j))}. \end{array}$$

Par conséquent, nous avons $\alpha_{h_1 h_2} = \alpha_{h_1} \circ \alpha_{h_2}$ et donc $\mu_{h_1 h_2} = \mu_{h_1} \circ \mu_{h_2}$. Par conséquent, l'application μ est un morphisme de groupes.

Montrons finalement que le morphisme μ est injectif. Soient h_1 et h_2 deux éléments de G tels que $\alpha_{h_1} = \alpha_{h_2}$. Nous avons alors

$$h_1 g_1 = g_{\alpha_{h_1}(1)} = g_{\alpha_{h_2}(1)} = h_2 g_1.$$

On en déduit que $h_1 = h_2$. Par conséquent, le morphisme μ est injectif. □

Remarque 7.3.14. — Il n'est guère difficile de montrer que le morphisme μ construit précédemment est en fait un isomorphisme de groupes.

Corollaire 7.3.15. — *Il existe un morphisme de groupes injectif du groupe G dans le groupe des automorphismes de $\mathscr{O}(\mathbf{D})$-algèbres du faisceau $\mathscr{G}(\mathbf{D})$.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathbf{D}}$-algèbres cohérents. Considérons l'application surjective

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{O}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{O}(\mathbf{D})}(\mathscr{A}(\mathbf{D}), \mathscr{B}(\mathbf{D})).$$

Elle est injective car les faisceaux $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ satisfont le théorème A (*cf.* corollaire 6.6.28).

On en déduit que le morphisme de groupes injectif

$$\mu : G \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}}(\mathscr{G})$$

construit précédemment induit un morphisme de groupes injectif

$$\mu_{\mathbf{D}} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}(\mathbf{D})}(\mathscr{G}(\mathbf{D})).$$

□

Lemme 7.3.16. — *Tout élément de $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ annule un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{M}(\mathbf{D})$ de degré inférieur à n.*

Démonstration. — Soit s un élément de $\mathscr{G}(\mathbf{D})$. Nous supposerons, tout d'abord, qu'il existe un point x_0 de U_0 tel que toutes les coordonnées de son image s_{x_0} dans $\mathscr{G}_{x_0} = \mathscr{O}^n_{X,x_0}$ soient distinctes. Puisque l'ouvert U_0 est connexe, le principe du prolongement analytique (*cf.* théorème 4.4.2) assure qu'en tout point x de U_0, toutes les coordonnées du germe s_x sont distinctes. Notons $a_1, \ldots, a_n$ les coordonnées de l'image de s dans $\mathscr{G}(U_0) = \mathscr{O}(U_0)^n$. Posons

$$M(Z) = \prod_{j=1}^{n} (Z - a_i) \in \mathscr{O}(U_0)[Z].$$

En tout point x de U_0, l'image du polynôme M est l'unique polynôme unitaire de degré inférieur à n à coefficients dans $\mathscr{M}_x$ qui annule le germe s_x.

Pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, posons $V_j = U_0 \cup \bigcup_{1 \leq i \leq j} \mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_i}$. Montrons, par récurrence, que pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, il existe un polynôme unitaire N_j de degré n à coefficients dans $\mathscr{M}(V_j)$ qui annule l'élément $s_{|V_j}$ de $\mathscr{G}(V_j)$. Nous avons déjà traité le cas $j = 0$. Soit maintenant un élément j de $[\![0, n-1]\!]$ pour lequel l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Puisque l'ouvert $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}}$ est connexe, l'anneau $\mathscr{M}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}})$ est un corps, d'après le corollaire 4.4.5, et tout élément de l'anneau $\mathscr{O}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}})/(S^{n_{j+1}} - \pi^{n_{j+1}}_{\mathfrak{m}_{j+1}} - T)$ est annulé par un polynôme unitaire de degré inférieur à n_{j+1} à coefficients dans le corps $\mathscr{M}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}})$. On en déduit que l'élément $s_{|U_{j+1}}$ de $\mathscr{G}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}})$ est annulé par un polynôme unitaire M_{j+1} de degré inférieur à n à coefficients dans le corps $\mathscr{M}(\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}})$. Soit x un élément de $\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}_{j+1}} \cap U_0 = U_{j+1}$. Nous avons démontré qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré inférieur à n à coefficients dans $\mathscr{M}_x$ qui annule le germe s_x. On en déduit que les images des polynômes N_j et M_{j+1} dans $\mathscr{M}_x[Z]$ coïncident. Par conséquent, les images de ces polynômes dans $\mathscr{M}(U_{j+1})[Z]$ coïncident. On en déduit que le polynôme N_j se prolonge en un polynôme unitaire N_{j+1} de degré inférieur à n à coefficients dans $\mathscr{M}(V_{j+1})$ qui annule l'élément $s_{|V_{j+1}}$ de $\mathscr{G}(V_{j+1})$.

On déduit finalement le résultat attendu du cas $j = n$.

Soit x_0 un point de l'ouvert U_0. La fibre du faisceau $\mathscr{G}$ au point x_0 est isomorphe à l'algèbre $\mathscr{O}^n_{X,x_0}$. D'après le théorème 6.6.29, le faisceau $\mathscr{G}$ vérifie le théorème A sur le disque $\mathbf{D}$. On en déduit qu'il existe un élément s_0 de $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ dont toutes les coordonnées de l'image dans la fibre $\mathscr{G}_{x_0} = \mathscr{O}^n_{X,x_0}$ sont distinctes.

Soit s un élément de $\mathscr{O}(\mathbf{D})$. Il existe un élément λ de $\mathscr{O}(\mathbf{D})$ tel que toutes les coordonnées du germe de la section $s_1 = s + \lambda s_0$ au point x_0 soient distinctes. Le raisonnement qui précède montre qu'il existe deux polynômes unitaires P_0 et P_1 de degré inférieur à n à coefficients dans $\mathscr{M}(\mathbf{D})$ qui annulent respectivement les sections s_0 et s_1. D'après le corollaire 4.4.5, l'anneau $\mathscr{M}(\mathbf{D})$ est un corps. On en

déduit qu'il existe un polynôme unitaire P de degré inférieur à n à coefficients dans $\mathscr{M}(\mathbf{D})$ qui annule la section s. □

Lemme 7.3.17. — *L'algèbre $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ est intègre.*

Démonstration. — Remarquons, tout d'abord, que l'algèbre $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ n'est pas nulle. En effet, les éléments 0 et 1 sont distincts. Il nous reste à montrer qu'elle ne contient aucun diviseur de zéro.

Soient s et t deux éléments de $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ dont le produit est nul. Au-dessus de l'ouvert U_0, le faisceau $\mathscr{G}$ n'est autre que le faisceau $\mathscr{O}^n$. D'après le lemme 7.3.12 et le corollaire 4.4.5, l'anneau $\mathscr{O}(U_0)$ est intègre. Par conséquent, la première coordonnée de l'une des deux sections doit être nulle. Supposons que ce soit celle de s. Notons

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \text{ dans } \mathscr{O}(U_0)^n.$$

Nous supposons donc que $s_1 = 0$.

Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$. Il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $g_j = g_i\, g_1^{-1}$ dans le groupe G. Notons

$$s = (t_1, \ldots, t_{d_j}) \text{ dans } \mathscr{F}_j(\mathbf{D}''_{\mathfrak{m}_j})^{d_j}.$$

Il existe des éléments u de $[\![0, d_j - 1]\!]$ et v de $[\![1, n_j]\!]$ tels que

$$g_1 = g_{a_{j,u}}\, g_j^{v-1}.$$

Par définition du morphisme ψ_j, nous avons alors

$$\varphi_j(t_{u+1}) = \begin{pmatrix} s_{\sigma_j(un_j+1)} \\ \vdots \\ s_{\sigma_j(un_j+n_j)} \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{O}(U_j)^{n_j}.$$

Par définition de σ_j, nous avons $\sigma_j(un_j+v) = 1$. Par conséquent, l'élément $s_{\sigma_j(un_j+v)}$ de $\mathscr{O}(U_j)$ est nul. Le lemme 7.3.9 assure que l'élément t_{u+1} de $\mathscr{F}_j(\mathbf{D}''_{\mathfrak{m}_j})$ est également nul. Nous avons choisi l'élément j de façon à avoir l'égalité $g_1 = g_i$ dans $G/\langle g_j \rangle$. On en déduit qu'il existe un élément w de $[\![1, n_j]\!]$ tel que $s_i = s_{\sigma_j(un_j+w)}$ dans $\mathscr{O}(U_j)$. Par conséquent, l'élément s_i est nul dans $\mathscr{O}(U_j)$ et donc dans $\mathscr{O}(U_0)$, par le principe du prolongement analytique.

Nous avons montré que l'élément $s_{|U_0}$ de $\mathscr{G}_0(U_0)$ est nul. En utilisant de façon répétée le lemme 7.3.9, on en déduit que l'élément s de $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ est nul. Par conséquent, l'algèbre $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ est intègre. □

Lemme 7.3.18. — *L'anneau A est intégralement fermé dans l'anneau $\mathscr{G}(\mathbf{D})$.*

Démonstration. — Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans A sans racines dans A. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une section s de $\mathscr{G}(\mathbf{D})$ qui est racine du polynôme P. Notons x le point 0 de la fibre centrale X_0 de l'espace X. C'est un point de l'ouvert U_0. Notons a la première coordonnée de l'image du germe s_x par l'isomorphisme $\mathscr{G}_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X,x}^n$. C'est un élément de $\mathscr{O}_{X,x}$ qui vérifie l'égalité $P(a) = 0$. D'après le corollaire 3.2.8, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ se plonge dans l'anneau $K[\![T]\!]$. On en déduit que le polynôme P possède une racine dans l'anneau $K[\![T]\!]$ et donc dans le corps K. Puisque l'anneau A est algébriquement fermé dans le corps K, cette racine doit appartenir à A. Nous avons abouti à une contradiction. On en déduit le résultat annoncé. □

Introduisons une définition correspondant à cette propriété.

Définition 7.3.19. — *Une extension L du corps $\mathscr{M}(\mathbf{D})$ est dite régulière si le corps K est algébriquement fermé dans L.*

Regroupons, à présent, les résultats obtenus.

Proposition 7.3.20. — *L'extension de corps*

$$\mathscr{M}(\mathbf{D}) \to \mathit{Frac}(\mathscr{G}(\mathbf{D}))$$

est finie de degré n, régulière et galoisienne de groupe de Galois G.

Démonstration. — L'extension $\mathscr{M}(\mathbf{D}) \to \mathrm{Frac}(\mathscr{G}(\mathbf{D}))$ est finie et de degré inférieur à n d'après le lemme 7.3.16. Elle est régulière d'après le lemme 7.3.18. On déduit du corollaire 7.3.15 que le groupe G s'injecte dans le groupe des $\mathscr{M}(\mathbf{D})$-automorphismes du corps $\mathrm{Frac}(\mathscr{G}(\mathbf{D}))$. Or le groupe G a pour cardinal n. On en déduit que l'extension $\mathscr{M}(\mathbf{D}) \to \mathrm{Frac}(\mathscr{G}(\mathbf{D}))$ est exactement de degré n, qu'elle est galoisienne et que son groupe de Galois est isomorphe au groupe G. □

Puisque nous sommes partis d'un groupe fini G arbitraire, nous avons finalement démontré le résultat suivant.

Théorème 7.3.21. — *Tout groupe fini est le groupe de Galois d'une extension finie, galoisienne et régulière du corps $\mathscr{M}(\mathbf{D})$.*

Pour finir, donnons une description explicite du corps $\mathscr{M}(\mathbf{D})$. Rappelons que l'anneau A est muni de la norme $\|.\|$ définie de la façon suivante :

$$\forall f \in A,\ \|f\| = \max_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} (|\sigma(f)|_\infty).$$

Proposition 7.3.22. — *Notons $A_{1-}[\![T]\!]$ le sous-anneau de $A[\![T]\!]$ formé des séries*

$$\sum_{k \geq 0} a_k T^k$$

qui vérifient la condition suivante :

$$\forall r < 1, \lim_{k \to +\infty} \|a_k\| \, r^k = 0.$$

Le morphisme naturel $A[T] \to \mathscr{M}(\mathbf{D})$ *induit un isomorphisme*

$$\mathit{Frac}(A_{1^-}[\![T]\!]) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(\mathbf{D}).$$

Démonstration. — D'après les théorèmes 6.6.29 et 7.1.9, le morphisme naturel

$$\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\mathbf{D})) \to \mathscr{M}(\mathbf{D})$$

est un isomorphisme.

On montre que le morphisme $A[T] \to \mathscr{O}(\mathbf{D})$ induit un isomorphisme

$$A_{1^-}[\![T]\!] \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\mathbf{D})$$

en écrivant

$$\mathscr{O}(\mathbf{D}) = \varinjlim_{r<1} \mathscr{O}(\overline{D}(r))$$

et en utilisant la description explicite de l'anneau $\mathscr{O}(\overline{D}(r))$ fournie par le théorème 3.2.14. On en déduit le résultat annoncé. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Constantin Bănică and Octavian Stănăşilă. *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes. Vol. 2.* Gauthier-Villars, Paris, 1977. Troisième édition, Traduit du roumain, Collection "Varia Mathematica".

[2] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[3] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78) :5–161 (1994), 1993.

[4] Jacek Bochnak, Michel Coste, and Marie-Françoise Roy. *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[5] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308. Hermann, Paris, 1964.

[7] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7 : Diviseurs.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1314. Hermann, Paris, 1965.

[8] Henri Cartan. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein : démonstration des théorèmes fondamentaux. In *Séminaire Henri Cartan*, volume 4, exposé n° 19, pages 1–15, 1951–1952.

[9] Antoine Ducros. Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich. *Sém. Bourbaki*, (Exp. 958), 2006.

[10] Antoine Ducros. Géométrie analytique p-adique : la théorie de Berkovich. *Gaz. Math.*, (111) :12–27, 2007.

[11] Alain Escassut and Nicolas Maïnetti. Shilov boundary for normed algebras. In *Topics in analysis and its applications*, volume 147 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 1–10. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[12] Jacques Frisch. Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. *Invent. Math.*, 4 :118–138, 1967.

[13] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[14] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.

[15] Elmar Grosse-Klönne. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. Reine Angew. Math.*, 519 :73–95, 2000.

[16] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas.*, volume 8 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[17] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[18] David Harbater. Convergent arithmetic power series. *Amer. J. Math.*, 106(4) :801–846, 1984.

[19] David Harbater. Mock covers and Galois extensions. *J. Algebra*, 91(2) :281–293, 1984.

[20] David Harbater. Galois covers of an arithmetic surface. *Amer. J. Math.*, 110(5) :849–885, 1988.

[21] Reinhardt Kiehl. Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Invent. Math.*, 2 :256–273, 1967.

[22] Michel Lazard. Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (14) :47–75, 1962.

[23] Qing Liu. Un contre-exemple au « critère cohomologique d'affinoïdicité ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(2) :83–86, 1988.

[24] Qing Liu. Tout groupe fini est un groupe de Galois sur $\mathbf{Q}_p(T)$, d'après Harbater. In *Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993)*, volume 186 of *Contemp. Math.*, pages 261–265. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[25] Jun-iti Nagata. *Modern dimension theory*, volume 2 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, revised edition, 1983.

[26] Jérôme Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p-adiques. Privilège et noethérianité. *Compos. Math.*, 144(1) :107–133, 2008.

[27] Jérôme Poineau. Raccord sur les espaces de Berkovich. *Algebra Number Theory*, 4(3) :297–334, 2010.

[28] Michel Raynaud. *Anneaux locaux henséliens*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[29] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[30] Yum-Tong Siu. Noetherianness of rings of holomorphic functions on Stein compact series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 :483–489, 1969.

[31] John Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12 :257–289, 1971.

GLOSSAIRE DES NOTATIONS

Espaces analytiques

$\mathscr{A}$	anneau de Banach, p.4
$\mathscr{M}(\mathscr{A})$	spectre analytique de l'anneau de Banach $\mathscr{A}$, p.6
$\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathscr{A}}$	espace affine analytique de dimension n sur l'anneau de Banach $\mathscr{A}$, p.7
$\mathfrak{p}_x$	noyau de la semi-norme associée au point x, p.6, 7
$\mathscr{H}(x)$	corps résiduel complété du point x, p.6, 7
$f(x)$	valeur de la fonction f au point x, p.6, 7
$\boldsymbol{\alpha}$	point rationnel, p.10
$\mathscr{O}$	faisceau structural, p.20
$\mathfrak{m}_x$	idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_x$, p.20
$\kappa(x)$	corps résiduel du point x, p.20

Points de la droite affine analytique au-dessus d'un corps trivialement valué

η_1	point de Gauß, associé à la valeur absolue triviale, p.13
$\eta_{P,0}$	(pour P irréductible) unique point défini par l'équation $P = 0$, p.12
$\eta_{P,r}$	(pour P irréductible et $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$) unique point défini par l'équation $\lvert P\rvert = r$, p.13
$\eta_{\alpha,r}$	($r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$) autre notation pour le point $\eta_{T-\alpha,r}$, p.14
η_r	(pour $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$) autre notation pour le point $\eta_{0,r}$, p.13
α	point rationnel, p.14

Points de la droite affine analytique au-dessus d'un corps ultramétrique complet

α	point rationnel, p.14, 17
$\eta_{\alpha,r}$	point de Shilov du disque de centre α et de rayon r, p.15, 17

η_r	autre notation pour le point $\eta_{0,r}$, p.17, 17
$\overline{D}(\alpha, r)(k)$	ensemble des k-points du disque fermé de centre α et de rayon r, p.15
$\eta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}}$	point de type 4, p.17
$\eta_{P,0}$	(pour P irréductible) unique point défini par l'équation $P = 0$, p.18

Faisceaux et fonctions

$\mathscr{K}$	préfaisceau des fractions rationnelles sans pôles, p.19
$\mathscr{O}$	faisceau structural, p.20
$\mathscr{B}(V)$	(pour V compact) complété de l'anneau $\mathscr{K}(V)$ pour la norme uniforme, p.25
$\mathscr{P}$	faisceau des parties principales, p.310
o	distribution d'ordres, p.307
p	distribution de parties principales, p.311
$\mathbf{Z}_{r+}[\![T]\!]$	séries à coefficients entiers de rayon de convergence strictement supérieur à r, p.325
$A_{1-}[\![T]\!]$	séries à coefficients dans A de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, p.338

Flot

I_b, I_x	intervalle de définition du flot, p.36
$\lvert.\rvert_x^{\varepsilon}$	(pour $\varepsilon \in I_x$) image d'un point par le flot, p.36
$\lvert.\rvert_x^{0}$	prolongement du flot en 0, p.37
D_Y	graphe du flot dans Y, p.38
$I_Y(x)$	intervalle de définition du flot dans Y, p.38
$T_Y(x)$	trajectoire du point x dans Y, p.38
$D_Y(x)$	graphe du flot de x dans Y, p.38

Disques et couronnes

$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$	polyrayons, p.45
$\boldsymbol{k}$	n-uplet d'entiers, p.45
$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}$	puissance d'un polyrayon, p.45, 47
$\boldsymbol{T}$	multivariable, p.45
$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$	puissance d'une multivariable, p.45
$\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s} < \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s} \prec \boldsymbol{t}$	relations d'ordre entre polyrayons, p.45
$\mathbf{max}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})$	maximum pour les polyrayons, p.46, 47
$\mathbf{min}(\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}})$	minimum pour les polyrayons, p.47
$\overline{D}(\boldsymbol{t})$	disque fermé, p.45
$\overline{C}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$	couronne fermée, p.46, 47
$\overline{D}_V(\boldsymbol{t})$	disque fermé au-dessus de V, p.113

$\mathring{D}_V(\boldsymbol{t})$	disque ouvert au-dessus de V, p.113
$\overline{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$	couronne fermée au-dessus de V, p.113
$\mathring{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$	couronne fermée au-dessus de V, p.113
$\mathbf{D}$	disque ouvert de rayon 1 centré en la section nulle de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, p.307
$\mathbf{D}_{a_\sigma}$	trace de $\mathbf{D}$ sur X_{a_σ}, p.307
$\mathbf{D}_{\mathfrak{m}}$	trace de $\mathbf{D}$ sur $X_{\mathfrak{m}}$, p.328
$\mathbf{D}'_{\mathfrak{m}}$	trace de $\mathbf{D}$ sur $X'_{\mathfrak{m}}$, p.328
$\mathscr{A}\langle\lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle$	algèbre de séries associée au disque $\overline{D}(\boldsymbol{t})$, p.45
$\mathscr{A}\langle\boldsymbol{s} \leq \lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle$	algèbre de séries associée à la couronne $\overline{C}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$, p.46, 47
$\mathscr{A}_s$	complété de $\mathscr{A}\langle\lvert T\rvert \leq s\rangle$ pour la norme uniforme sur son spectre, p.221
$\mathscr{O}(V)\langle\lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$	algèbre de séries surconvergentes associée au disque $\overline{D}_V(\boldsymbol{t})$, p.115
$\mathscr{O}(V)\langle\boldsymbol{s} \leq \lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle^\dagger$	algèbre de séries surconvergentes associée à la couronne $\overline{C}_V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$, p.118
$\lVert.\rVert_{\boldsymbol{t}}$	norme sur l'algèbre $\mathscr{A}\langle\lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle$, p.45
$\lVert.\rVert_{V,\boldsymbol{t}}$	norme sur l'algèbre $\mathscr{B}(V)\langle\lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle$, p.51
$\lVert.\rVert_{U,w,\text{rés}}$	semi-norme induite par $\lVert.\rVert_{U,w}$ sur l'anneau quotient $\mathscr{B}(U)[T]/(G(T))$, p.205
$\lVert.\rVert_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$	norme sur l'algèbre $\mathscr{A}\langle\boldsymbol{s} \leq \lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle$, p.46, 47
$\lVert.\rVert_{V,\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$	norme sur l'algèbre $\mathscr{B}(V)\langle\boldsymbol{s} \leq \lvert\boldsymbol{T}\rvert \leq \boldsymbol{t}\rangle$, p.65
L_b	anneau local limite d'algèbres de disques, p.51
$L_{b,\boldsymbol{r}}$	anneau local limite d'algèbres de couronnes, p.65

Corps de nombres

K	corps de nombres, p.86
A	anneau des entiers du corps K, p.86
$\lvert.\rvert_\infty$	valeur absolue usuelle, p.87
$\lvert.\rvert_0$	valeur absolue triviale, p.87
v_p	valuation p-adique, p.87
$\lvert.\rvert_p$	valeur absolue p-adique normalisée par $\lvert p\rvert_p = \frac{1}{p}$, p.87
$\mathfrak{m}$	idéal maximal de A, p.88
$A_{\mathfrak{m}}$	localisé de A en $\mathfrak{m}$, p.88
$\pi_{\mathfrak{m}}$	uniformisante de $A_{\mathfrak{m}}$, p.88
$k_{\mathfrak{m}}$	corps résiduel de $A_{\mathfrak{m}}$, p.88
$\hat{A}_{\mathfrak{m}}$	complété de $A_{\mathfrak{m}}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, p.88
$\hat{K}_{\mathfrak{m}}$	corps des fractions de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$, p.88
$p_{\mathfrak{m}}$	nombre premier vérifiant $\mathfrak{m} \cap \mathbf{Z} = p_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{Z}$, p.88
$n_{\mathfrak{m}}$	degré de l'extension $\hat{K}_{\mathfrak{m}}/Q_{p_{\mathfrak{m}}}$, p.88
$\lvert.\rvert_{\mathfrak{m}}$	valeur absolue sur K prolongeant $\lvert.\rvert_{p_{\mathfrak{m}}}$, p.88

σ	plongement du corps K dans $\mathbf{C}$ (et parfois idéal maximal de A), p.88
$\hat{K}_\sigma$	$\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ selon que le plongement est réel ou complexe, p.88
$\lvert.\rvert_\sigma$	valeur absolue associée au plongement, p.88
n_σ	degré de l'extension $\hat{K}_\sigma/\mathbf{R}$, p.88
r_1	nombre de plongements réels de K, p.89
r_2	moitié du nombre de plongements complexes non réels de K, p.89
Σ_f	ensemble des idéaux maximaux de A, p.89
Σ_∞	ensemble des plongements complexes de K à conjugaison près, p.89
Σ	réunion des deux ensembles précédents, p.89
$l(\sigma)$	1 si $\sigma \in \Sigma_f$, $+\infty$ si $\sigma \in \Sigma_\infty$, p.89

Spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres

$\mathscr{M}(A)$, B	spectre analytique de l'anneau A, p.87
$\mathscr{M}(A)_\sigma$, B_σ	branche σ-adique, p.90
$\mathscr{M}(A)'_\sigma$, B'_σ	branche σ-adique ouverte, p.90
$\mathscr{M}(A)''_\sigma$, B''_σ	branche σ-adique semi-ouverte, p.90
a_0	point associé à la valeur absolue triviale sur A, p.87
$a_\mathfrak{m}$	point associé à la valeur absolue $\lvert.\rvert_\mathfrak{m}$, p.88
$a_\mathfrak{m}^\varepsilon$	point associé à la valeur absolue $\lvert.\rvert_\mathfrak{m}^\varepsilon$, p.88
$a_\mathfrak{m}^0$	autre notation pour le point a_0, p.88
$\tilde{a}_\mathfrak{m}$	point associé à la valeur absolue triviale sur $k_\mathfrak{m}$, p.88
$a_\mathfrak{m}^{+\infty}$	autre notation pour le point $\tilde{a}_\mathfrak{m}$, p.88
a_σ	point associé à la valeur absolue $\lvert.\rvert_\sigma$, p.88
a_σ^ε	point associé à la valeur absolue $\lvert.\rvert_\sigma^\varepsilon$, p.88
a_σ^0	autre notation pour le point a_0, p.88

Espace affine analytique au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres

$\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$	espace affine analytique de dimension n au-dessus de A, p.87
X	$\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ au chapitre 3, p.105
	$\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$ aux chapitres 4, 6, 7 et au numéro 5.6, p.157, 233, 259, 306
π	morphisme de projection naturel $X \to B$, p.105
X_V	image réciproque de la partie V par le morphisme π, p.105
X_σ	partie σ-adique, p.105
X'_σ	partie σ-adique ouverte, p.105
X''_σ	partie σ-adique semi-ouverte, p.105
X_b	fibre du morphisme π au-dessus du point b, p.105

X_0	fibre du morphisme π au-dessus du point a_0, p.105
$\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$	fibre du morphisme π au-dessus du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$, p.105

Espaces de Stein

K^-, K^+	compacts, p.247
L	intersection de K^- et K^+, p.247
M	réunion de K^- et K^+, p.247
Ω	système de Banach associé au couple (K^-, K^+), p.248
K_0^-, K_0^+	compacts de B, p.259
L_0	intersection de K_0^- et K_0^+, p.259

INDEX

Adèles, voir Corps de nombres
Algébriquement trivial, 104
Anneau de Banach, 3
  uniforme, 19
Anneau local en un point
  de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 191
  de $\mathcal{M}(A)$, 100
  de type 2
    d'une fibre extrême, 176
    de la fibre centrale, 187
  de type 3
    d'une fibre extrême, 160, 169
    de la fibre centrale, 160, 172
  déployé, 75
    de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 105–112
  interne
    de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 147
    non-rigide de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 160
  rigide
    d'une fibre extrême de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 159
    d'une fibre extrême de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 140
    d'une fibre interne de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 159
    d'une fibre interne de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 141
    de la fibre centrale de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 159
    de la fibre centrale de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 141
  rigide de $\mathbf{A}_{\mathscr{A}}^{1,\mathrm{an}}$, 223
Bord analytique, 102
  au voisinage d'un point de $\mathcal{M}(A)$, 104
  au voisinage d'un point de type 2 d'une fibre extrême, 180
  au voisinage d'un point de type 3 d'une fibre extrême, 164, 170
  au voisinage d'un point déployé, 150
  au voisinage d'un point interne
    de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 164
    de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 149
  au voisinage d'un point rigide
    d'une fibre extrême de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 164
    de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 150
  au voisinage d'un point de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 193
  d'une couronne, 119–121
  de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$, 147
  des compacts de $\mathcal{M}(A)$, 103–104
Bord de Shilov, voir Bord analytique
Branche σ-adique, 90
  ouverte, 90
  semi-ouverte, 90
Caractère, 4
  équivalence, 5
Compacité
  disques, 7
  lemniscates, 8
  σ-compacité, 9
Compact
  de la base, 97
  pro-rationnel, 28, 29
  rationnel, 28, 29
  spectralement convexe, 29, 221
Condition (I_G), 213
  sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 233
Condition (R_G), 208
Condition (S), 221
  sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 235
Condition (S_P), 221
Condition (U), 58
  pour les points de $\mathcal{M}(A)$, 101
Connexité par arcs au voisinage d'un point
  de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 191

de $\mathcal{M}(A)$, 95
de type 2 d'une fibre extrême, 176
de type 2 de la fibre centrale, 187
de type 3 d'une fibre extrême, 160, 169
de type 3 de la fibre centrale, 160, 172
déployé, 75
interne, 145
non-rigide de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 160
rigide
de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 136
de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 137
rigide de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 159
Corps
maximalement complet, 17
résiduel complété, 6, 7
valué, 4
Corps de nombres
adèles, 100
formule du produit, 89
notations, 86–89
Couronne
algèbre associée, 46
bord de Shilov, 119–121
comparaison des normes, 50
connexité par arcs locale, 322
de Stein, voir Espace de Stein
morcelable, 324
noethérianité de l'anneau des sections, 324
relative, 114
sections globales, 119, 122
voisinages, 114
Dimension topologique
de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 191
de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 152
de $\mathcal{M}(A)$, 151
Disque, voir Couronne
algèbre associée, 45
comparaison des normes, 50
connexité par arcs locale, 322
de Stein, voir Espace de Stein
morcelable, 324
noethérianité de l'anneau des sections, 324
relatif, 114
sections globales, 116, 122
voisinages, 114
Distribution
d'ordres, 307
de parties principales, 311
Droite affine analytique
sur A, 157–197
cohérence du faisceau structural, 197
dimension topologique, 191
métrisabilité, 191
propriétés, 191
sous-variété analytique, 317–319
sur un corps trivialement valué, 11–15
sur un corps ultramétrique, 15–19
anneaux locaux, 22
Eisenstein, voir Théorème d'Eisenstein
Espace affine analytique, 7–11
sur A, 105–156
dimension topologique, 152
métrisabilité, 151
sur un corps archimédien, 11, 20
Espace analytique, 22
Espace de Stein, 242
compact, 242
compact de $\mathcal{M}(A)$, 265
couronne compacte d'une fibre de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 275
couronne compacte de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 282, 324
couronne quelconque de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 303, 309, 311, 335
exhaustion de Stein, voir Exhaustion
fonctions méromorphes, 314
lemniscate de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 303
stabilité par morphisme fini, 243, 244
théorème A, voir Théorème A
théorème B, voir Théorème B
Exhaustion, 283
de Stein, 284
pour les couronnes de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 296–303
sur $\mathcal{M}(A)$, 296
Extension immédiate, 17
Extension régulière, 338
Faisceau
cohérent, 195, 328
au voisinage d'un compact, 242
sur une partie morcelable de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 320
de type fini, 195
des fonctions méromorphes, voir Fonctions méromorphes
des parties principales, 310
des relations, 195
recollement de sections, 255
restriction à une partie quelconque, 23
sections sur une partie quelconque, 22
structural, voir Faisceau structural
Faisceau structural, 20
cohérence sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 197
fermeture des modules, 294

germes au voisinage d'un compact, 321
sections sur $\mathcal{M}(A)$, 98–100
sections sur un disque de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 116
sections sur une couronne de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 119
section sur une lemniscate de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 237
sections sur une partie connexe de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 192
Fermeture des modules, 294
Fibre
centrale, 105
extrême, 105
interne, 105, 143–150
structure de produit, 143, 145
Flot, 37
voisinages flottants, voir Voisinages flottants
Fonctions analytiques, voir Faisceau structural
Fonctions holomorphes, voir Faisceau structural
Fonctions méromorphes
extension galoisienne de $\mathscr{M}(\mathbf{D})$, 338
théorème de Poincaré, 314
Fonctions méromorphes sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 192–193
Formule du produit, voir Corps de nombres
Fortement engendré, 285
anneau de valuation discrète, 289
corps, 289
point rationnel d'une fibre extrême de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 292
Fractions rationnelles sans pôles, 19
Frisch, voir Théorème de Frisch
Harbater, voir Théorème d'Harbater
Hensélianité, 77–78
Isomorphisme local, 80
au voisinage d'un point de type 3
d'une fibre extrême, 168
de la fibre centrale, 172
au voisinage d'un point rigide
d'une fibre extrême, 125
d'une fibre interne, 128
de la fibre centrale, 129
de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 139
Lemme
de Cartan, 251
de Cousin, voir Système de Cousin
Métrisabilité, voir Espace affine analytique
Mittag-Leffler, voir Théorème de Mittag-Leffler
Morcelable, 320
couronne, 324
Morphisme borné, 3, 284
Morphisme fini
applications aux espaces de Stein, 243, 244
au sens topologique, 201–202, 211, 227
au-dessus de A, 233–237
endomorphisme d'une droite, 227–231
hypersurface d'une droite, 211–219
image directe du faisceau structural, 217–219, 230–231
Noethérianité
d'anneaux de séries arithmétiques, 324
des anneaux de sections sur un compact de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 321
des anneaux de sections sur une couronne de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 324
des anneaux locaux, voir Anneau local en un point
Norme
d'anneau, 3
spectrale, 19
sur un anneau d'entiers de corps de nombres, 87
uniforme, 19, 209
Ordre d'annulation en un point rigide, 307
Ouverture au voisinage d'un point
de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 191
de type 2 d'une fibre extrême, 176
de type 2 de la fibre centrale, 187
de type 3 d'une fibre extrême, 160, 169
de type 3 de la fibre centrale, 160, 172
déployé, 75
interne, 145
non-rigide de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 160
rigide de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 159
rigide de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 139
Partie σ-adique, 105
ouverte, 105
semi-ouverte, 105
Parties principales, 310
Poincaré, voir Théorème de Poincaré
Point
central, 91
de Gauß, 13, 18
de type 1, 15, 17–18, 22
de type 2, 16, 17, 22
d'une fibre extrême, 173–182
de la fibre centrale, 182–189
de type 3, 17, 22
d'une fibre extrême, 167–170
de la fibre centrale, 170–172
de type 4, 17, 22
déployé, 72

extrême, 91
interne, 91, 105, 143–150
rationnel, 10
rigide, 11, 18, 22
d'une fibre de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 125–141
Polynôme distingué, 54
Problème de Cousin
additif
sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 311, 313, 315
sur $\mathbf{C}$, 310
multiplicatif
sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 309, 313, 315
sur un corps ultramétrique, 307
Problème de Galois inverse, 327–339
construction locale, 328–332
recollement, 332–339
Théorème d'Harbater, 338
Prolongement analytique, 153
au voisinage d'un point de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 191
au voisinage d'un point de $\mathcal{M}(A)$, 153
au voisinage d'un point de type 2
d'une fibre extrême, 176
de la fibre centrale, 189
au voisinage d'un point de type 3
d'une fibre extrême, 165, 170
de la fibre centrale, 165, 172
au voisinage d'un point interne
de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 165
de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 154
au voisinage d'un point rigide
de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 165
pour les fonctions méromorphes sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 192
pour une sous-variété analytique intègre de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 319
Racines de l'unité, 329
Résultant, 208
Semi-norme
multiplicative bornée, 5
spectrale, 19
Séparation, 9
Shilov, voir Bord analytique
Spectre analytique, 6
de A, 87–104
dimension topologique, 151
Stein, voir Espace de Stein
Système
de Banach, 247
de Cousin, 248
de Cousin-Runge, 253
dans les fibres de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 269
pour les couronnes de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 280
sur $\mathcal{M}(A)$, 263
Théorème
A, voir Théorème A
B, voir Théorème B
d'Eisenstein, 113
d'Harbater, 325, 338
de Frisch
sur $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 321
sur un corps archimédien, 319
de Mittag-Leffler, 310
de Poincaré, 314
de Weierstraß, voir Théorème de Weierstraß
Théorème A, 241
$\Leftarrow$ théorème B, 243
cas d'un compact, 241
cas local, 241
couronne compacte de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 281
pour un compact de $\mathcal{M}(A)$, 264
pour un système de Cousin-Runge, 256
sur la fibre centrale de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 272
sur une fibre extrême de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 272
Théorème B, 242
$\Rightarrow$ théorème A, 243
couronne compacte de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 282
pour un compact de $\mathcal{M}(A)$, 264
pour un couple de compacts, 256
sur la fibre centrale de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 274
sur une fibre extrême de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 274
Théorème de Weierstraß
division au voisinage d'un point rigide, 224
division globale, 203
division locale, 53
division semi-locale, 54
préparation locale, 56
Uniformisante forte, 161
en un point de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 193
en un point de type 2 d'une fibre extrême, 180
en un point de type 3 d'une fibre extrême, 164, 170
en un point extrême de $\mathcal{M}(A)$, 161
en un point rigide
d'une fibre interne de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 162
de la fibre centrale de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 162
Valeur absolue
inégalité ultramétrique relâchée, 35
ultramétrique, 12
Voisinages d'un compact, 71
couronne, 114
disque, 114

Voisinages d'un point
de type 2
d'une fibre extrême, 175
de la fibre centrale, 185
déployé, 72, 74
interne
de $\mathbf{A}_A^{n,\mathrm{an}}$, 143, 145
rigide de $\mathbf{A}_A^{1,\mathrm{an}}$, 132
Voisinages flottants, 38
pour un point de type 3
d'une fibre extrême, 168
de la fibre centrale, 171
pour un point interne, 145
Weierstraß, voir Théorème de Weierstraß