SUR LES COMPOSANTES CONNEXES D'UNE FAMILLE D'ESPACES ANALYTIQUES p-ADIQUES

par

Jérôme Poineau

Résumé. — Soit $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ un espace affinoïde et soient $f, g \in \mathscr{A}$. Nous étudions les ensembles de composantes connexes des espaces définis par une inégalité de la forme $|f| \le r\,|g|$, avec $r \ge 0$. Nous montrons qu'il existe une partition finie de $\mathbf{R}_+$ en intervalles sur lesquels ces ensembles sont canoniquement en bijection et que les bornes de ces intervalles appartiennent à $\sqrt{\rho(\mathscr{A})}$.

Abstract

On the connected components of a family of p-adic analytic spaces. Let $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ be an affinoid space and let $f, g \in \mathscr{A}$. We study the sets of connected components of the spaces defined by an inequality of the form $|f| \le r\,|g|$, with $r \ge 0$. We prove that there exists a finite partition of $\mathbf{R}_+$ into intervals where those sets are canonically in bijection and that the bounds of those intervals belong to $\sqrt{\rho(\mathscr{A})}$.

Dans ce texte, nous nous intéressons à la variation des composantes connexes d'une famille particulière d'espaces analytiques p-adiques ou, plus généralement, d'espaces analytiques définis sur un corps ultramétrique. Pour aborder un tel problème, il est commode de se placer dans le cadre des espaces analytiques définis par V. Berkovich (*cf.* [**Ber90, Ber93**]). Sous-jacent à ceux-ci se trouve en effet un véritable espace topologique (par opposition à un site) qui jouit, de surcroît, de bonnes propriétés : compacité locale ou connexité par arcs locale, pour ne citer que les plus simples.

La topologie des espaces de Berkovich a récemment fait l'objet de plusieurs études approfondies qui ont révélé son caractère modéré. Dans le cas lisse, on sait, par exemple, depuis [**Ber99**], que ces espaces sont localement contractiles. Ce résultat a été étendu aux analytifiées de variétés quasi-projectives par E. Hrushovski et F. Loeser, *via* l'utilisation de théorie des modèles. L'introduction de ces nouvelles techniques a également permis de démontrer de nombreux résultats de même nature que ceux dont on dispose en géométrie algébrique réelle ou o-minimale. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article original [**HL10**] ou à sa recension [**Duc12**] pour le séminaire Bourbaki.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G22.
Mots clefs. — Espaces de Berkovich, géométrie analytique rigide, composantes connexes.

L'auteur est membre du projet ANR « GLOBES » : ANR-12-JS01-0007-01.

Notre article s'inscrit dans la lignée de ces travaux. Afin de donner un énoncé précis du théorème principal que nous souhaitons démontrer, fixons, et ce pour toute la suite du texte, un corps k muni d'une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$ pour laquelle il est complet.

Théorème A. — *Soit $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ un espace k-affinoïde. Soient $f, g \in \mathscr{A}$. Notons $\sqrt{\rho(\mathscr{A})}$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $\mathbf{R}_+^*$ engendré par les valeurs non nulles de la norme spectrale sur $\mathscr{A}$. Il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de $\mathbf{R}_+$ de la forme*

$$\mathcal{P} = \{[0, a_0[, [a_0, a_1[, \ldots, [a_{n-1}, a_n[, [a_n, +\infty[\},$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$, satisfaisant la condition suivante : quel que soit $I \in \mathcal{P}$ et quels que soient $r \leq s \in I$, l'application naturelle

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}) \to \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\})$$

est bijective.

Le même résultat vaut en remplaçant l'ensemble des composantes connexes par l'ensemble des composantes connexes géométriques, l'ensemble des composantes irréductibles ou l'ensemble des composantes irréductibles géométriques.

Mentionnons que, lorsque X est strictement k-affinoïde, ce qui correspond au cas rigide classique, on a $\sqrt{\rho(\mathscr{A})} = \sqrt{|k^*|}$.

En dépit de son apparence purement topologique, ce résultat possède des conséquences arithmétiques profondes. A. Abbes et T. Saito l'énoncent, pour des ensembles définis par des équations de la forme $|f| \geq \varepsilon$ et dans une version affaiblie, dans l'article [**AS02**] et l'utilisent pour définir la filtration de ramification d'un corps local à corps résiduel imparfait. Précisons que les informations sur la nature des bornes fournissent, dans ce contexte, un analogue du théorème de Hasse-Arf.

Indiquons encore que nous avons proposé une première démonstration de ce théorème, toujours pour des ensembles définis par des équations de la forme $|f| \geq \varepsilon$, dans [**Poi08**]. Dans la méthode utilisée alors, on interprète les espaces étudiés comme les fibres d'un morphisme analytique. On peut alors choisir un modèle formel de ce morphisme et étudier sa fibre spéciale, un morphisme de schémas, par les méthodes classiques de géométrie algébrique exposées en détails dans les EGA. Revenir du morphisme spécialisé au morphisme générique est une étape délicate qui n'est possible que sous certaines hypothèses sur le modèle formel choisi. Pour assurer l'existence d'un modèle convenable, nous avons dû invoquer des théorèmes difficiles, sortes de versions faibles de la résolution des singularités (théorème de la fibre réduite [**BLR95**] et théorème d'élimination de la ramification sauvage [**Epp73**]).

Mentionnons également que, dans le cas où toutes les données de l'énoncé sont algébriques (X est défini par des inégalités entre polynômes dans l'analytification d'une variété quasi-projective, etc.), alors le résultat découle de [**HL10**, theorem 13.4.3], et même dans une version bien plus forte requérant que les inclusions induisent des équivalences homotopiques.

Nous proposons ici une preuve simple du théorème A se dispensant notamment de tout recours aux schémas formels. Nous utilisons des techniques classiques en géométrie de Berkovich — la notion de bord de Shilov apparaît de façon cruciale — mêlées à des arguments de réduction au sens de la norme spectrale, dans la version raffinée graduée proposée par M. Temkin dans [**Tem04**].

Concluons cette introduction par quelques mots sur la structure de l'article. Dans la première section, on démontre une partie conséquente du théorème A : l'existence d'une partition finie en intervalles de la forme voulue et vérifiant les propriétés désirées, mais sans information sur la nature des bornes des intervalles. La preuve repose sur une observation assurant que, dans un espace affinoïde X, les composantes connexes d'un domaine affinoïde défini par une inégalité du type $|f| \le r\,|g|$, avec f et g sans zéros communs, peuvent être repérées par des points du bord de Shilov de X. L'observation elle-même se démontre à l'aide d'un analogue du principe du maximum.

Dans la seconde section, nous considérons un espace affinoïde X et l'application de réduction associée red: $X \to \tilde{X}$. Dans [**Bos77**], S. Bosch démontre que, sous certaines hypothèses, l'image inverse d'un point fermé de la $\tilde{k}$-variété $\tilde{X}$ est connexe. Nous montrons que ce résultat vaut sans autre hypothèse que l'équidimensionalité de X et l'étendons aux fermés de Zariski connexes de $\tilde{X}$.

La troisième section contient des rappels sur le lieu H-strict d'un espace analytique, H étant un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$. Grossièrement parlant, ce lieu est constitué des points qui possèdent un voisinage qui pouvant être défini par des inégalités où n'interviennent que des nombres réels appartenant à H. D'après des résultats de [**Tem04**] et [**CT10**], l'appartenance d'un point au lieu H-strict peut se lire sur la réduction du germe de l'espace en ce point.

Dans la dernière section, nous appliquons ces techniques pour démontrer que, si X est un espace analytique H-strict, f et g des fonctions analytiques sur X sans zéros communs et r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{H}$, les ensembles de composantes connexes des lieux définis respectivement par les inégalités $|f| < r\,|g|$ et $|f| \le r\,|g|$ sont canoniquement en bijection. Ce résultat et ses généralisations nous semblent présenter un intérêt indépendant, de même que les techniques, basées sur la réduction des germes, mises en œuvre pour les démontrer.

En regroupant les résultats obtenus, il est alors aisé de compléter la preuve du théorème A. Supposons, pour simplifier, que f et g ne s'annulent pas simultanément sur X. Choisissons un nombre réel $r > 0$. D'après la section 1, pour tout $s > r$ assez proche de r, les ensembles $\pi_0(\{|f| \le s\,|g|\})$ sont canoniquement en bijection, et donc également canoniquement en bijection avec $\pi_0(\{|f| < r\,|g|\})$. L'espace affinoïde X est H-strict avec $H = \rho(\mathscr{A})$. D'après la section 3, si r se trouve hors de $\sqrt{H}$, les ensembles de composantes connexes précédents s'identifient alors encore à $\pi_0(\{|f| \le r\,|g|\})$, empêchant ainsi le nombre réel r d'être une borne de l'un des intervalles considérés dans le théorème.

Pour terminer, nous voudrions souligner que, comme il apparaît dans l'argument précédent, même si l'on ne souhaite démontrer le résultat que pour les espaces strictement affinoïdes de la géométrie rigide classique, la méthode présentée ici impose de considérer des domaines affinoïdes définis par une inégalité du type $|f| \le r\,|g|$, où r est arbitraire, et donc de sortir du cadre strictement affinoïde.

1. Variation de connexité

Soit $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ un espace k-affinoïde. Nous noterons $\Gamma(X)$ son bord de Shilov (*cf.* [**Ber90**, section 2.4]).

Commençons par un résultat élémentaire.

Lemme 1.1. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$ et $r \geq 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit $s \in [r, r+\varepsilon]$, l'application naturelle*

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}) \to \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\})$$

soit injective.

Démonstration. — En utilisant le fait que X est compact, on montre que si $\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\})$ est vide, il en est de même pour $\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\}$, pour s assez proche de r.

Nous pouvons maintenant supposer que $V = \{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide. Considérons $Y = \mathcal{M}(\mathscr{A}\{r^{-1}T\})$ le disque relatif de rayon r au-dessus de X et son fermé de Zariski Z défini par l'équation $f = Tg$. La projection naturelle de Y sur X induit une surjection continue de Z sur V. Puisque Z est un espace affinoïde, il possède un nombre fini de composantes connexes, et il en va donc de même pour V.

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les composantes connexes de V. Ce sont des parties compactes de X. Puisque X est séparé, nous pouvons trouver des ouverts $U_1, \ldots, U_n$ de X deux à deux disjoints tels que pour tout i, U_i contient C_i. Notons U la réunion des U_i. L'application naturelle $\pi_0(V) \to \pi_0(U)$ est alors injective, et le même résultat vaut en remplaçant U par n'importe laquelle de ses parties qui contient V.

Si $U = X$, le résultat vaut pour tout choix de $\varepsilon > 0$. Supposons désormais que $U \neq X$. Dans ce cas, la partie $X \setminus U$ est compacte et non vide. Puisqu'elle est disjointe de V, la fonction $|g|/|f|$ y est donc définie et y possède un maximum $M < r^{-1}$. Choisissons un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $r + \varepsilon < M^{-1}$. Quel que soit $s \in [r, r+\varepsilon]$, la partie $\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\}$ est alors contenue dans U, ce qui permet de conclure. □

Proposition 1.2. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$ tels que $(f, g) = (1)$. Soit $r > 0$. Notons $V(f)$ le fermé de Zariski de X défini par f. Si $\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide, alors chacune de ses composantes connexes contient une composante connexe de $V(f)$ ou un point du bord de Shilov de X en lequel ni f ni g ne s'annule.*

Démonstration. — Supposons que $\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide. Soit C l'une de ses composantes connexes. Si elle coupe $V(f)$, alors elle contient l'une de ses composantes connexes.

Supposons donc que f ne s'annule pas sur C. D'après le lemme précédent, il existe $s > r$ et une composante connexe D de $\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\}$ telle que

$$C = D \cap \{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}.$$

Nous pouvons en outre choisir s de sorte que f ne s'annule pas sur D. La partie D est alors un domaine affinoïde de X sur laquelle g/f définit une fonction analytique h. Considérons un point γ du bord de Shilov de D en lequel la valeur absolue de h est maximale. Nous avons alors $|h(\gamma)| \geq r^{-1}$ et le point γ appartient à C, donc à l'intérieur de D. D'après le principe du maximum [**Ber90**, proposition 2.5.20], c'est un point du bord de Shilov de X. □

Corollaire 1.3. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$ et $r \geq 0$. Notons $V(f)$ le fermé de Zariski de X défini par f. Si $\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide, alors chacune de ses composantes connexes contient une composante connexe de $V(f)$ ou un point du bord de Shilov de X en lequel ni f ni g ne s'annule.*

Démonstration. — Supposons que $\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide. Soit C l'une de ses composantes connexes et supposons qu'elle ne contient aucun point du bord de Shilov de X en lequel ni f ni g ne s'annule.

Nous allons montrer que la fonction g s'annule sur C. En effet, sinon, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, la proposition précédente appliquée à l'espace $X_\varepsilon = \{x \in X \mid |g(x)| \geq \varepsilon\}$ assure que C contient un point y du bord de Shilov de X_ε en lequel ni f ni g ne s'annule. Par hypothèse, ce point ne peut appartenir au bord de Shilov de X. D'après le principe du maximum [**Ber90**, proposition 2.5.20], il appartient donc au bord de X_ε dans X et nous avons donc $|g(y)| = \varepsilon$. En utilisant la compacité de C, on montre alors que g s'annule sur C.

On en déduit que f s'annule également sur C et donc que C contient une composante connexe de $V(f)$. □

Corollaire 1.4. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$. Posons*

$$|f/g(\Gamma(X))^*| = \{|f(x)|/|g(x)| \mid x \in \Gamma(X), f(x) \neq 0, g(x) \neq 0\}.$$

C'est un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}_+^*$. Soient $a < b \in \mathbf{R}_+$ tels que $]a, b[\, \cap\, |f/g(\Gamma(X))^*| = \emptyset$. Alors, pour tous $r \leq s \in [a, b[$, l'application naturelle

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}) \to \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\})$$

est surjective. En particulier, l'application

$$r \in [a, b[\, \mapsto \mathrm{Card}(\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}))$$

est décroissante.

On peut décliner ce corollaire sous différentes formes, en faisant, par exemple, intervenir des schémas formels. Nous ignorons si le résultat suivant est connu.

Corollaire 1.5. — *Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel affine admissible dont la fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$ est réduite. Notons $\mathfrak{X}_\eta$ sa fibre générique. Soit g un élément de $\mathscr{O}(\mathfrak{X})$ qui ne s'annule identiquement sur aucune composante irréductible de $\mathfrak{X}_s$. Alors, pour tous $s \leq r \in [0, 1]$, l'application naturelle*

$$\pi_0(\{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |g(x)| \geq r\}) \to \pi_0(\{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |g(x)| \geq s\})$$

est surjective.

Démonstration. — Sous les hypothèses de l'énoncé, la fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ est un espace affinoïde et l'application de réduction $\mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$ coïncide avec celle induite par la norme spectrale sur $\mathfrak{X}_\eta$ (*cf.* [**BLR95**, proposition 1.1]). En outre, en tout point du bord de Shilov de $\mathfrak{X}_\eta$, on a $|g(\gamma)| = 1$. On peut alors appliquer le corollaire qui précède. □

Nous pouvons également déjà démontrer une partie du théorème A présenté en introduction.

Corollaire 1.6. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$. Il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de $\mathbf{R}_+$ de la forme*

$$\mathcal{P} = \{[0, a_0[, [a_0, a_1[, \dots, [a_{p-1}, a_p[, [a_p, +\infty[\}$$

satisfaisant la condition suivante : quel que soit $I \in \mathcal{P}$ et quels que soient $r \leq s \in I$, l'application naturelle

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}) \to \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \leq s\,|g(x)|\})$$

est bijective.

Le même résultat vaut en remplaçant l'ensemble des composantes par l'ensemble des composantes connexes géométriques, l'ensemble des composantes irréductibles ou l'ensemble des composantes irréductibles géométriques.

Démonstration. — D'après le corollaire 1.4, il existe une partition de la forme voulue sur les éléments de laquelle les applications entre π_0 sont surjectives. Puisque le bord de Shilov de X est finie, cette partition est finie.

On raffine cette partition en une partition satisfaisant la propriété requise à l'aide du lemme 1.1.

La dernière partie du résultat se démontre en remplacant X par $X \hat{\otimes}_k k^a$, où k^a désigne le complété d'une clôture algébrique de k, sa normalisée $\tilde{X}$ ou $\tilde{X} \hat{\otimes}_k k^a$. □

Nous tirons maintenant des conséquences de ce résultat. Nous nous contenterons ici d'esquisser les preuves en renvoyant à [**Poi08**] pour de plus amples détails.

Corollaire 1.7. — *Soit $g \in \mathscr{A}$. Si X est irréductible, alors il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \in]0, r_0]$, le domaine affinoïde $\{x \in X \mid |g(x)| \geq r\}$ soit irréductible.*

Démonstration. — On déduit du corollaire 1.6 que, pour $r > 0$ assez proche de 0, l'inclusion

$$\{x \in X \mid |g(x)| \geq r\} \subset \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$$

induit une bijection entre les ensembles de composantes irréductibles. Or, d'après [**Bar70**] et [**Lüt74**], l'ensemble de droite est irréductible. □

Corollaire 1.8. — *Un point d'un bon espace k-analytique en lequel l'anneau local est intègre possède une base de voisinages affinoïdes irréductibles.*

Démonstration. — On se ramène immédiatement à montrer qu'un point x situé sur une seule composante irréductible Z d'un espace k-affinoïde X possède un voisinage affinoïde irréductible. Considérons une fonction $g \in \mathscr{O}(X)$ qui ne s'annule pas en x, mais s'annule identiquement sur toute composante irréductible de X différente de Z. Le corollaire précédent assure alors que le domaine affinoïde $\{x \in X \mid g(x) \geq \varepsilon\}$ est irréductible pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ce qui permet de conclure. $\square$

2. Connexité des tubes

Fixons un espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$. Notons $\tilde{X}$ sa réduction et $\mathrm{red}\colon X \to \tilde{X}$ l'application de réduction.

Un résultat classique de S. Bosch permet d'obtenir des parties connexes de X en utilisant cette application.

***Théorème 2.1* (S. Bosch, [Bos77, Satz 6.1]).** — *Supposons que la valuation de k n'est pas triviale et que X est strictement k-affinoïde, distingué et équidimensionnel. Alors, pour tout point fermé $\tilde{x}$ de $\tilde{X}$, le tube* $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{x})$ *est connexe.*

Nous souhaitons généraliser ce résultat d'une part en supprimant les hypothèses autres que l'équidimensionalité et d'autre part en remplaçant le point fermé $\tilde{x}$ de $\tilde{X}$ par un fermé de Zariski connexe quelconque.

Nous renvoyons à [**Ber90**, chapter 9] ou [**Duc07**] pour la notion de dimension k-analytique d'un espace k-affinoïde (ou plus généralement k-analytique, même si nous n'en aurons pas l'utilité ici). Dans le cas strictement k-affinoïde, elle coïncide avec la dimension de Krull. Nous dirons que l'espace k-affinoïde X est équidimensionnel si toutes ses composantes irréductibles ont la même dimension k-analytique. Dans ce cas, pour toute extension valuée complète L de k, l'espace L-affinoïde $X \hat{\otimes}_k L$ est encore équidimensionnel.

Lemme 2.2. — *Soit K une extension finie de k munie de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de k. Soit L une extension valuée complète et algébriquement close du corps k. Alors tout morphisme $\tilde{k}$-linéaire $\tilde{K} \to \tilde{L}$ provient d'un morphisme k-linéaire isométrique $K \to L$.*

Démonstration. — Soit $\psi : \tilde{K} \to \tilde{L}$ un morphisme $\tilde{k}$-linéaire. Supposons tout d'abord que l'extension $k \to K$ n'est pas ramifiée. Dans ce cas, l'extension résiduelle $\tilde{k} \to \tilde{K}$ est finie et séparable, donc engendrée par un élément $\tilde{\alpha}$. Relevons-le en un élément α de K°. On se convainc aisément que $k[\alpha] = K$.

Soit $P \in k^\circ[T]$ le polynôme minimal unitaire de α sur k. Il existe une racine β de P dans L dont la réduction est $\psi(\tilde{\alpha})$. On vérifie alors que le morphisme k-linéaire $\varphi : K \to L$ défini en envoyant α sur β a pour réduction ψ.

Revenons, à présent, au cas d'une extension $k \to K$ quelconque. Le raisonnement précédent permet de remplacer k par sa plus grande extension non ramifiée contenue dans K et donc de supposer que l'extension $\tilde{k} \to \tilde{K}$ est radicielle. Notons p l'exposant caractéristique de $\tilde{k}$. Choisissons alors un morphisme k-linéaire isométrique $\varphi : K \to L$ quelconque. Son existence est assurée par le fait que L est algébriquement clos.

Soit $\tilde{\alpha} \in \tilde{K}$. Par hypothèse, il existe un entier positif n et un élément $\tilde{\beta}$ de $\tilde{k}$ tels que $\tilde{\alpha}^{p^n} = \tilde{\beta}$. Nous avons donc également $\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha})^{p^n} = \tilde{\beta}$ et donc $\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}) = \psi(\tilde{\alpha})$, puisque le polynôme $X^{p^n} - \tilde{\beta}$ possède une seule racine dans $\tilde{L}$. $\square$

Lemme 2.3. — *Supposons que l'espace X est strictement k-affinoïde. Soit L une extension valuée complète et algébriquement close du corps k. Notons $\pi\colon X\hat{\otimes}_k L \to X$ le morphisme de changement de base et $\tilde{\pi}$ le morphisme induit entre les réductions. Soit x un point rigide de X. Alors, l'application*

$$\pi^{-1}(x) \to \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})$$

induite par l'application de réduction est surjective.

Démonstration. — Nous pouvons écrire l'application $\pi^{-1}(x) \to \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})$ comme la composée des applications

$$\alpha\colon \mathcal{M}\left(\mathscr{H}(x)\hat{\otimes}_k L\right) \to \mathrm{Spec}\left(\widetilde{\mathscr{H}(x)\hat{\otimes}_k L}\right),$$

$$\beta\colon \mathrm{Spec}\left(\widetilde{\mathscr{H}(x)\hat{\otimes}_k L}\right) \to \mathrm{Spec}\left(\widetilde{\mathscr{H}(x)}\otimes_{\tilde{k}} \tilde{L}\right)$$

et

$$\gamma\colon \mathrm{Spec}\left(\widetilde{\mathscr{H}(x)}\otimes_{\tilde{k}} \tilde{L}\right) \to \mathrm{Spec}\left(\kappa(\tilde{x})\otimes_{\tilde{k}} \tilde{L}\right).$$

Il suffit de montrer que ces trois applications sont surjectives. Pour α, qui est une application de réduction, ce résultat provient de [**Ber90**, proposition 2.4.4 (i)]. Pour β, on le déduit du lemme précédent, car $\mathscr{H}(x)$ est une extension finie de k, et c'est bien connu pour γ. □

Lemme 2.4. — *Supposons que la valuation du corps k n'est pas triviale et que l'espace X est strictement k-affinoïde et équidimensionnel. Soit $\tilde{x}$ un point fermé de $\tilde{X}$. Alors l'ouvert* $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{x})$ *est connexe.*

Démonstration. — Soient x et y deux points de $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{x})$. Soit L une extension valuée complète et algébriquement close du corps $\mathscr{H}(y)$ et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X\hat{\otimes}_k L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{red}"] & X \arrow[d, "\mathrm{red}"] \\ \widetilde{X\hat{\otimes}_k L} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & \tilde{X} \end{tikzcd}.$$

Remarquons que, pour tout point $\tilde{L}$-rationnel α de $\mathrm{Spec}(\widetilde{X\hat{\otimes}_k L})$, le tube $\mathrm{red}^{-1}(\alpha)$ est connexe. En effet, nous pouvons supposer $X\hat{\otimes}_k L$ est réduit, car cela ne change ni l'espace topologique sous-jacent, ni l'application de réduction. Dans ce cas, puisque L est algébriquement clos et de valuation non triviale, l'espace strictement L-affinoïde $X\hat{\otimes}_k L$ est distingué, d'après [**BGR84**, theorem 6.4.3/1]. Le résultat découle alors du théorème 2.1 de S. Bosch.

Par choix de L, il existe un point L-rationnel u de $X\hat{\otimes}_k L$ au-dessus de y. Sa réduction $\mathrm{red}(u)$ appartient alors à $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})$. D'après la remarque précédente, le tube $C = \mathrm{red}^{-1}(\mathrm{red}(u))$ est connexe. D'après le lemme 2.3, il rencontre $\pi^{-1}(x)$. Par conséquent, son image $\pi(C)$ est une partie connexe de $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{x})$ qui contient à la fois les points x et y. □

Pour généraliser le résultat hors du cadre strictement affinoïde, nous allons utiliser les réductions graduées au sens de M. Temkin (*cf.* [**Tem04**]). Ce seront les seules que nous utiliserons dans la suite de cette section. Rappelons-en la construction en quelques mots. Soit $\mathscr{B}$ une k-algèbre de Banach et désignons par ρ sa norme spectrale. Pour tout nombre réel $r > 0$, on pose $\mathscr{B}_r^{\circ} = \{f \in \mathscr{B} \mid \rho(f) \leq r\}$, $\mathscr{B}_r^{\circ\circ} = \{f \in \mathscr{B} \mid \rho(f) < r\}$ et $\tilde{\mathscr{B}}_r = \mathscr{B}_r^{\circ}/\mathscr{B}_r^{\circ\circ}$. La réduction graduée de $\mathscr{B}$ est alors l'algèbre $\mathbf{R}_+^*$-graduée

$$\tilde{\mathscr{B}} = \bigoplus_{r>0} \tilde{\mathscr{B}}_r.$$

Lorsque $\mathscr{B}$ est une algèbre k-affinoïde, le spectre gradué de $\tilde{\mathscr{B}}$ possède des propriétés analogues à la réduction dans le cas strictement affinoïde classique.

Commençons par passer du cas d'un point fermé à celui d'un fermé de Zariski connexe quelconque. Notre preuve suit celle de [**Duc03**, lemme 3.1.2]. Pour la définition de l'intérieur d'un morphisme entre espaces k-analytiques, nous renvoyons à [**Ber90**, sections 2.5 et 3.1].

Lemme 2.5. — *Soient* $\varphi\colon Y \to Z$ *un morphisme entre un bon espace k-analytique Y et un espace k-affinoïde Z. Notons* $\mathrm{red}\colon Y \to \tilde{Y}$ *l'application de réduction graduée. Alors* $\mathrm{red}(\varphi(Y))$ *contient l'adhérence de Zariski de* $\mathrm{red}(\varphi(\mathrm{Int}(Y/Z)))$.

Démonstration. — Soit $y \in \mathrm{Int}(Y/Z)$. Nous allons montrer que $\mathrm{red}(\varphi(Y))$ contient l'adhérence Zariski de $\widetilde{\varphi(y)}$.

Par définition, il existe un voisinage affinoïde Y' de y et un voisinage affinoïde Z' de $\varphi(y)$ tels que $\varphi(Y') \subset Z'$ et $y \in \mathrm{Int}(Y'/Z')$. D'après [**Ber90**, proposition 3.1.3 (ii) et corollary 2.5.13 (ii)], nous avons $y \in \mathrm{Int}(Y'/X)$. Quitte à remplacer Y par Y', nous pouvons supposer que Y est affinoïde.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{red}"] & Z \arrow[d, "\mathrm{red}"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{Z} \end{tikzcd} .$$

Pour tout polyrayon $\boldsymbol{r}$, notons $\mathbf{D}_{\boldsymbol{r}}^{+}$ (resp. $\mathbf{D}_{\boldsymbol{r}}^{-}$) le disque fermé (resp. ouvert) de centre 0 et de polyrayon $\boldsymbol{r}$. Puisque $y \in \mathrm{Int}(Y/Z)$, il existe un polyrayon $\boldsymbol{r}$ et un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} & Z \times \mathbf{D}_{\boldsymbol{r}}^{+} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"] & Z \end{tikzcd} ,$$

où ψ est une immersion fermée qui envoie y dans $Z \times \mathbf{D}^-_{\boldsymbol{r}}$. En passant aux réductions, nous obtenons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Z} \times \widetilde{\mathbf{D}^+_{\boldsymbol{r}}} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] . \\ \tilde{Y} \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{Z} \end{tikzcd}$$

La $\tilde{k}$-variété graduée $\widetilde{\mathbf{D}^+_{\boldsymbol{r}}}$ est l'analogue d'une droite et le morphisme $\tilde{\pi}$ possède une section nulle σ. La condition $\psi(y) \in Z \times \mathbf{D}^-_{\boldsymbol{r}}$ se traduit alors par $\tilde{\psi}(\tilde{y}) = \sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{y}))$.

En outre, d'après [**Tem04**, proposition 3.1 (iii)], le morphisme $\tilde{\psi}$ est fini. On en déduit que son image est fermée. Ce résultat se démontre, comme d'habitude, par le théorème « going-up » de I. S. Cohen et A. Seidenberg adapté au cadre gradué. Par conséquent, $\sigma^{-1}(\tilde{\psi}(\tilde{Y}))$ est une partie fermée de $\tilde{Z}$ contenue dans $\tilde{\pi}(\tilde{\psi}(\tilde{Y})) = \tilde{\varphi}(\tilde{Y}) = \mathrm{red}(\varphi(Y))$ et contenant $\tilde{\varphi}(\tilde{y})$. Le résultat s'ensuit. □

Remarque 2.6. — On pourrait énoncer et démontrer ce résultat dans le cadre strictement affinoïde, mais la définition de l'intérieur, parce qu'elle autorise des rayons arbitraires, rend l'opération malaisée. Signalons cependant qu'A. Ducros a procédé ainsi dans la preuve de [**Duc03**, lemme 3.1.2] (en supposant le corps de base algébriquement clos).

Lemme 2.7. — *Supposons que la valuation du corps k n'est pas triviale et que l'espace X est strictement k-affinoïde et équidimensionnel. Soit $\tilde{Z}$ un fermé de Zariski connexe de $\tilde{X}$. Alors son tube* $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{Z})$ *est un ouvert connexe de X.*

Démonstration. — À l'aide d'une récurrence sur la dimension, on se ramène au cas où $\tilde{Z}$ est irréductible. Notons $\tilde{z}$ son point générique. Choisissons un point z de X au-dessus de Z.

Soit C une composante connexe de $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{Z})$. Le morphisme d'inclusion $C \to X$ est sans bord et le lemme 2.5 montre alors que $\mathrm{red}\, C$ est un fermé de Zariski de $\tilde{X}$. En particulier, il contient un point fermé $\tilde{x}$ de $\tilde{X}$.

Soit D la composante connexe de $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{Z})$ contenant z. Le même argument que précédemment montre que $\mathrm{red}\, D$ est un fermé de Zariski de $\tilde{X}$. Puisqu'il contient le point générique $\tilde{z}$, il est nécessairement égal à $\tilde{Z}$ et contient donc le point $\tilde{x}$. Le lemme 2.4 montre alors que $C = D$, autrement dit, que $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{Z})$ est connexe. □

Rappelons qu'un polyrayon $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbf{R}^*_+)^n$ est dit k-libre si la famille $(r_1, \ldots, r_n)$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^*_+/\sqrt{|k^*|}$ (*cf.* [**Duc07**, 1.1]). Pour un tel polyrayon $\boldsymbol{r}$, on note $k_{\boldsymbol{r}}$ l'ensemble des séries de la forme

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} a_{i_1,\ldots,i_n}\, u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n}$$

telle que la famille $\left(a_{i_1,\ldots,i_n}\, r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}\right)_{i_1,\ldots,i_n \geq 0}$ soit sommable. Muni de la norme définie par

$$\|f\|_{\boldsymbol{r}} = \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} a_{i_1,\ldots,i_n}\, r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n},$$

c'est un corps valué complet. Sa réduction graduée se calcule simplement :

$$\widetilde{k_{\boldsymbol{r}}} = \tilde{k}[r_1^{-1}\, T_1, r_1\, T_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1}\, T_n, r_n\, T_n^{-1}].$$

Théorème 2.8. — *Supposons que l'espace X est équidimensionnel. Soit $\tilde{Z}$ un fermé de Zariski connexe de sa réduction graduée $\tilde{X}$. Alors le tube* $\mathrm{red}^{-1}(\tilde{Z})$ *de $\tilde{Z}$ est un ouvert connexe de X.*

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{r}$ un polyrayon k-libre tel que l'espace $X\hat{\otimes}_k k_{\boldsymbol{r}}$ soit strictement $k_{\boldsymbol{r}}$-affinoïde. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \hat{\otimes}_k k_{\boldsymbol{r}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{red}"] & X \arrow[d, "\mathrm{red}"] \\ \widetilde{X \hat{\otimes}_k k_{\boldsymbol{r}}} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & \tilde{X} \end{tikzcd} .$$

D'après [**Tem04**, proposition 3.1 (i)], le morphisme $\tilde{\pi}$ n'est autre que le morphisme de changement de base à $\widetilde{k_{\boldsymbol{r}}}$. La formule explicite indiquée plus haut montre que ce morphisme préserve la connexité. Par conséquent, $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{Z})$ est un fermé de Zariski connexe de $\widetilde{X \hat{\otimes}_k k_{\boldsymbol{r}}}$. D'après le lemme 2.7, son image réciproque par red^{-1} est connexe et l'on conclut grâce à la surjectivité du morphisme π. □

Remarque 2.9. — Nous ignorons si le résultat vaut sans l'hypothèse d'équidimensionalité.

3. Lieu H-strict d'un espace affinoïde

Dans cette partie, nous fixons un espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ et un sous-groupe H de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $|k^*|$. Nous notons, comme d'habitude, ρ la semi-norme spectrale sur $\mathscr{A}$.

Nous allons effectuer quelques rappels sur la notion d'espace analytique H-strict, qui généralise celle d'espace strictement k-analytique (que l'on retrouve en choisissant $H = |k^*|$). Pour un traitement complet, nous renvoyons à [**CT10**, section 7].

Définition 3.1. — *L'espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ est dit H-strict si, pour tout élément f de $\mathscr{A}$, on a $\rho(f) \in \sqrt{H} \cup \{0\}$.*

Cette définition s'étend à des espaces k-analytiques généraux en requérant l'existence d'une structure H-stricte, c'est-à-dire d'un maillage (ce que V. Berkovich appelle « net » dans [**Ber93**]) par des domaines affinoïdes H-stricts.

Énonçons maintenant un analogue local de la définition valant pour les germes d'espaces en un point. Pour ce faire, nous supposerons que le groupe H n'est pas trivial. Cette condition est nécessaire pour qu'un point admettant un voisinage affinoïde H-strict possède automatiquement un système fondamental de tels voisinages.

Définition 3.2. — *Supposons que $H \neq \{1\}$. Soit x un point de X. Le germe (X, x) est dit H-strict si le point x possède un voisinage affinoïde H-strict.*

On appelle lieu H-strict de X la partie X_H de X formée des points x tels que le germe (X, x) est H-strict.

De nouveau, cette définition s'étend à des espaces k-analytiques généraux en requérant l'existence d'un voisinage H-strict (non nécessairement affinoïde).

Donnons un exemple simple. À cet effet, introduisons la relation $\prec$ sur $\mathbf{R}_+$ définie par

$$a \prec b \text{ si } a < b \text{ ou } a = b = 0.$$

Lemme 3.3. — *Supposons que $H \neq \{1\}$. Soient $f_1, \ldots, f_a, f'_1, \ldots, f'_a \in \mathscr{A}$ et $r_1, \ldots, r_a \in \mathbf{R}_+$. Soient $g_1, \ldots, g_b, g'_1, \ldots, g'_b \in \mathscr{A}$ et $s_1, \ldots, s_b \in \sqrt{H} \cup \{0\}$. Soient $h_1, \ldots, h_c, h'_1, \ldots, h'_c) \in \mathscr{A}$ et $t_1, \ldots, t_c \in \mathbf{R}^*_+ \setminus \sqrt{H}$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}&\big(\{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| < r_i\,|f'_i(x)|,\ \forall j, |g_j(x)| \le s_j\,|g'_j(x)|,\ \forall k, |h_k(x)| \le t_k\,|h'_k(x)|\}\big)_H\\ &\quad = \{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| < r_i\,|f'_i(x)|,\ \forall j, |g_j(x)| \le s_j\,|g'_j(x)|,\ \forall k, |h_k(x)| \prec t_k\,|h'_k(x)|\}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Posons

$$Y = \{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| < r_i\,|f'_i(x)|,\ \forall j, |g_j(x)| \le s_j\,|g'_j(x)|,\ \forall k, |h_k(x)| \le t_k\,|h'_k(x)|\}.$$

Il est immédiat que l'espace apparaissant au membre de droite de l'égalité appartient au lieu H-strict de Y. Il suffit donc de montrer qu'aucun point x de Y pour lequel il existe un k tel que $|h_k(x)| = t_k\,|h'_k(x)|$ et $h'_k(x) \neq 0$ n'y appartient.

Considérons donc un tel x. Pour tout voisinage affinoïde V de x dans Y assez petit, la fonction h'_k est inversible sur V et la norme spectrale de h_k/h'_k sur V est égale à t_k, interdisant ainsi au voisinage d'être H-strict. $\square$

Le fait qu'un germe soit H-strict peut se traduire purement en termes de la réduction graduée de ce germe, telle qu'elle a été définie par M. Temkin dans [**Tem04**, section 4]. Rappelons que dans le cas où x est un point d'un espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$, il s'agit de l'espace « birationnel » suivant :

$$\tilde{X}_x = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}\{\tilde{\chi}_x(\tilde{\mathscr{A}})\},$$

c'est-à-dire de l'ensemble des anneaux de valuation graduée de corps des fractions gradué $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ qui contiennent $\tilde{\chi}_x(\tilde{\mathscr{A}})$ et $\tilde{k}$.

M. Temkin a également défini la propriété d'être H-strict pour de tels espaces (*cf.* [**Tem04**, paragraphe précédant la proposition 2.5] et [**CT10**, fin de la section 5]). Nous nous contenterons de mentionner la caractérisation suivante dans le cas qui nous intéresse ici.

Proposition 3.4 **(M. Temkin,** [**Tem04**, proposition 2.5]**).** — *Soit $x \in X$. L'espace $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}\{\tilde{\chi}_x(\tilde{\mathscr{A}})\}$ est H-strict si, et seulement si, $\rho(\tilde{\chi}_x(\tilde{\mathscr{A}})) \subset \sqrt{H} \cup \{0\}$.*

Les propriétés pour les germes et leur réduction coïncident. Ce résultat vaut d'ailleurs pour un espace k-analytique X arbitraire.

Théorème 3.5 **(B. Conrad–M. Temkin,** [**CT10**, theorem 7.5]**)**

Supposons que $H \neq \{1\}$. Pour tout point x de X, le germe (X, x) est H-strict si, et seulement si, sa réduction graduée $\tilde{X}_x$ est H-stricte.

En combinant ces deux résultats, nous obtenons la caractérisation suivante.

Corollaire 3.6. — *Supposons que $H \neq \{1\}$. Notons $\tilde{I}_H$ l'idéal de $\tilde{\mathscr{A}}$ engendré par l'ensemble des éléments homogènes dont l'ordre n'appartient pas à $\sqrt{H} \cup \{0\}$ et $\tilde{Z}_H$ le fermé de Zariski de* $\mathrm{Spec}(\tilde{\mathscr{A}})$ *qu'il définit. Alors le lieu H-strict de X n'est autre que le tube de $\tilde{Z}_H$: $X_H = \mathrm{red}^{-1}(\tilde{Z}_H)$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Ce point appartient à X_H si, et seulement si, on a $\rho(\tilde{\chi}_x(\tilde{\mathscr{A}})) \subset \sqrt{H} \cup \{0\}$, autrement dit, si, et seulement si, tout élément de $\tilde{\mathscr{A}}$ dont l'ordre n'appartient pas à $\sqrt{H}$ est envoyé sur 0 par $\tilde{\chi}_x$. Cette dernière condition équivaut encore à l'inclusion $\tilde{I}_H \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\chi}_x)$ et le résultat s'ensuit. □

4. Rationalité des sauts

Soit $X = \mathcal{M}(\mathscr{A})$ un espace k-affinoïde. Dans cette dernière section, nous démontrons que les éléments $a_0, \dots, a_r$ qui apparaissent dans l'énoncé du corollaire 1.6 appartiennent à $\sqrt{\rho(\mathscr{A})}$, concluant ainsi la preuve du théorème A.

Lemme 4.1. — *Soit H un sous-groupe non trivial de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $|k^*|$. Soit V un domaine affinoïde connexe de X d'algèbre $\mathscr{B}$ tel que*

$$1 \notin \{uv \mid u, v \in \rho(\mathscr{B}), v \notin \sqrt{H}\}.$$

Alors, le lieu H-strict de V est connexe.

Démonstration. — Notons $\tilde{I}_H$ l'idéal de $\widetilde{\mathscr{B}}$ engendré par l'ensemble des éléments homogènes dont l'ordre n'appartient pas à $\sqrt{H} \cup \{0\}$ et $\tilde{Z}_H$ le fermé de Zariski de $\mathrm{Spec}(\widetilde{\mathscr{B}})$ qu'il définit. D'après le corollaire 3.6, le lieu H-strict de V n'est autre que le tube de $\tilde{Z}_H$.

Soit $\tilde{f}$ un idempotent homogène non nul de $\widetilde{\mathscr{B}}/\tilde{I}_H$. De l'égalité $\tilde{f}^2 = \tilde{f}$, on déduit $\rho(\tilde{f}) = 1$. Par conséquent, l'élément $\tilde{f}$ se relève en un élément homogène $\tilde{F}$ de $\widetilde{\mathscr{B}}$ tel que $\rho(\tilde{F}) = 1$ et $\tilde{F}^2 - \tilde{F} \in \tilde{I}_H$. Par hypothèse, l'idéal $\tilde{I}_H$ ne contient aucun élément d'ordre 1. On en déduit que $\tilde{F}$ est idempotent. Puisque V est connexe, sa réduction l'est aussi et $\tilde{F}$ ne peut être qu'un idempotent trivial. Il en est donc de même pour $\tilde{f}$.

Nous venons de montrer que $\tilde{Z}_H$ est un fermé de Zariski connexe de $\tilde{V}$. D'après le théorème 2.8, son tube est encore connexe. □

Pour toute partie P de $\mathbf{R}_+^*$, nous noterons $\langle P \rangle_{\mathrm{mon}}$ (resp. $\langle P \rangle$) le sous-monoïde (resp. sous-groupe) de $\mathbf{R}_+^*$ qu'elle engendre. Pour tout sous-monoïde M de $\mathbf{R}_+^*$, nous noterons $\sqrt{M}$ le sous-monoïde divisible de $\mathbf{R}_+^*$ qu'il engendre.

Lemme 4.2. — *Soient $f_1, \dots, f_n, g \in \mathscr{A}$ tels que $(f_1, \dots, f_n, g) = (1)$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}_+^*$. Nous avons*

$$\rho(\{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| \leq r_i\,|g(x)|\}) \subset \sqrt{\langle \rho(\mathscr{A}), r_1, \dots, r_n \rangle_{mon}}.$$

Démonstration. — La partie V de X définie par la conjonction des inégalités $|f_i| \leq r_i\,|g|$ est un domaine affinoïde d'algèbre

$$\mathscr{A}_V = \mathscr{A}\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}/(f_1 - T_1\,g, \dots, f_n - T_n\,g).$$

Par définition de la norme sur $\mathscr{B} = \mathscr{A}\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\}$, nous avons $\rho(\mathscr{B}) = \langle \rho(\mathscr{A}), r_1, \ldots, r_n\rangle_{\mathrm{mon}}$. D'après [**Tem04**, proposition 3.1 (iii)], le morphisme $\tilde{\mathscr{B}} \to \tilde{\mathscr{A}_V}$ induit par le morphisme quotient est fini. On en déduit que $\rho(\mathscr{A}_V) \subset \sqrt{\langle \rho(\mathscr{A}), r_1, \ldots, r_n\rangle_{\mathrm{mon}}}$. □

Corollaire 4.3. — *Soit H un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $|k^*|$. Soit Y un espace k-analytique H-strict. Soient $f_1, \ldots, f_n, g \in \mathscr{O}(Y)$ sans zéros communs et $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}_+^*$. Alors l'espace k-analytique*

$$\{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| \le r_i\,|g(x)|\}$$

est $\langle H, r_1, \ldots, r_n\rangle$-strict.

Rappelons que nous avons défini une relation $\prec$ sur $\mathbf{R}_+$ par

$$a \prec b \text{ si } a < b \text{ ou } a = b = 0.$$

Lemme 4.4. — *Soit H un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $|k^*|$. Soit Y un espace k-analytique H-strict. Soient $f, g \in \mathscr{O}(Y)$ et $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{H}$. Pour toute composante irréductible F de $\{y \in Y \mid |f(y)| \le r\,|g(y)|\}$, nous avons soit*

$$F \subset \{y \in Y \mid f(y) = g(y) = 0\},$$

soit

$$\overline{F \cap \{y \in Y \mid |f(y)| < r\,|g(y)|\}} = F,$$

où le surlignement désigne l'adhérence topologique.

Dans tous les cas, $F \cap \{y \in Y \mid |f(y)| \prec r\,|g(y)|\}$ est dense dans F. En particulier, pour toute composante connexe C de $\{y \in Y \mid |f(y)| \le r\,|g(y)|\}$, $C \cap \{y \in Y \mid |f(y)| \prec r\,|g(y)|\}$ est dense dans C.

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où H n'est pas trivial. Soit F une composante irréductible de $\{y \in Y \mid |f(y)| \le r\,|g(y)|\}$. Supposons qu'il existe un point y de F qui ne soit pas dans l'adhérence de $G = F \cap \{y \in Y \mid |f(y)| < r\,|g(y)|\}$. Il existe alors un voisinage U du point y dans F contenu dans $\{y \in Y \mid |f(y)| = r\,|g(y)|\}$. Nous pouvons supposer que U est ouvert.

Soit z un point de U en lequel g ne s'annule pas. Ce point possède alors un voisinage V dans Y sur lequel la fonction f est inversible et la norme spectrale de g/f égale à r^{-1}. Puisque $|g(z)|/|f(z)| = r^{-1}$, ces propriétés valent pour tout voisinage de z assez petit et nous pouvons donc supposer que V est compact et H-strict. En recouvrant V par un nombre fini de domaines affinoïdes H-stricts, on aboutit à une contradiction.

Nous venons de montrer que la fonction g s'annule sur U. On en déduit qu'elle est nulle sur F.

Supposons, maintenant, que $H = \{1\}$. On choisit alors un élément $s \in \mathbf{R}_+^* \setminus r^{\mathbf{Z}}$ et on se ramène au cas précédent à l'aide du morphisme de projection $\pi\colon X \hat{\otimes}_k k_s \to X$ (voir les rappels précédant le théorème 2.8 pour la notation k_s). En effet, l'espace $X \hat{\otimes}_k k_s$ est alors $\langle H, s\rangle$-strict et $r \notin \sqrt{\langle H, s\rangle}$. □

Proposition 4.5. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$ tels que $(f, g) = (1)$ et $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$. L'application naturelle*

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| < r\,|g(x)|\}) \to \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \le r\,|g(x)|\})$$

est bijective.

Le même résultat vaut en remplaçant les composantes connexes par les composantes irréductibles.

Démonstration. — Posons $V = \{x \in X \mid |f(x)| \le r\,|g(x)|\}$. Nous pouvons supposer que cette partie n'est pas vide. Considérons l'une de ses composantes connexes C. Il suffit de montrer que $C \cap \{x \in X \mid |f(x)| < r\,|g(x)|\}$ est connexe et non vide. La dernière propriété découle du lemme 4.4 en remarquant que f et g n'ont aucun zéro commun.

Supposons tout d'abord que $|k^*| \neq \{1\}$. Dans ce cas, d'après le lemme 1.1, nous pouvons trouver un élement $r' > r$ avec $r' \in \sqrt{|k^*|}$ et une composante connexe D de $\{x \in X \mid |f(x)| \le r'\,|g(x)|\}$ tels que $C = D \cap \{x \in X \mid |f(x)| \le r\,|g(x)|\}$. D'après le lemme 4.2, nous avons $\rho(\{x \in X \mid |f(x)| \le r'\,|g(x)|\}) \subset \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$. Choisissons une fonction g sur $\{x \in X \mid |f(x)| \le r'\,|g(x)|\}$ qui vaut 1 sur D et 0 sur les autres composantes connexes. Nous avons alors $D = \{x \in D \mid |g(x)| \ge 1\}$ et une nouvelle utilisation du lemme 4.2 montre que $\rho(D) \subset \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$.

Quitte à remplacer X par D, nous pouvons donc supposer que X est connexe. D'après le lemme 4.2, nous avons $\rho(V) \subset \sqrt{\langle \rho(\mathscr{A}), r\rangle_{\mathrm{mon}}}$. La condition du lemme 4.1 est donc vérifiée avec $H = \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$ et nous pouvons alors conclure en utilisant le lemme 3.3 (et, de nouveau, le fait que f et g n'ont aucun zéro commun).

Si $|k^*| = \{1\}$, on choisit un élément $s \in \mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{\langle \rho(\mathscr{A}), r\rangle}$ et on se ramène au cas précédent à l'aide du morphisme de projection $\pi\colon X \hat{\otimes}_k k_s \to X$. Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 2.8 montre en effet que cette application préserve la connexité par image directe et réciproque.

La dernière partie de l'énoncé se démontre en appliquant le résultat à la normalisée de l'espace X, opération qui ne modifie pas $\sqrt{\rho(\mathscr{A})}$. □

Corollaire 4.6. — *Soient $f, g \in \mathscr{A}$ et $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$. L'application naturelle*

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \prec r\,|g(x)|\}) \to \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \le r\,|g(x)|\})$$

est bijective.

Démonstration. — La preuve commence de la même façon que la précédente. Nous pouvons supposer que $V = \{x \in X \mid |f(x)| \le r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide. Considérons l'une de ses composantes connexes C. D'après le lemme 4.4, la partie $C \cap \{x \in X \mid |f(x)| \prec r\,|g(x)|\}$ n'est pas vide et il suffit de montrer qu'elle est connexe.

Le même argument que celui utilisé à la fin de la preuve précédente permet de supposer que k n'est pas trivialement valué.

Notons $F_1, \dots, F_m$ les composantes irréductibles de C. Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Si $F_i \subset \{x \in X \mid f(x) = g(x) = 0\}$, alors $\{x \in F_i \mid |f(x)| \prec r\,|g(x)|\} = F_i$ est connexe.

Sinon, d'après le corollaire 1.7, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, l'espace $F_{i,\varepsilon} = \{x \in F_i \mid |g(x)| \ge \varepsilon\}$ est connexe. Si l'on suppose de plus que $\varepsilon \in \sqrt{|k^*|}$, alors, d'après le lemme 4.2, en notant $\mathscr{B}_{i,\varepsilon}$ l'algèbre de $F_{i,\varepsilon}$, nous avons $\sqrt{\rho(\mathscr{B}_{i,\varepsilon})} \subset \sqrt{\rho(\mathscr{A})}$. Nous pouvons donc appliquer la proposition précédente et en déduire que $\{x \in F_{i,\varepsilon} \mid |f(x)| < r|g(x)|\}$ est connexe. En écrivant $\{x \in F_i \mid g(x) \neq 0\}$ comme la réunion des espaces $F_{i,\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in \sqrt{|k^*|}$ assez petit, on montre que l'espace

$$\{x \in F_i \mid g(x) \neq 0 \text{ et } |f(x)| < r|g(x)|\} = \{x \in F_i \mid |f(x)| < r|g(x)|\}$$

est connexe. Or, d'après le lemme 4.4, celui-ci est dense dans F_i et l'on en déduit que $\{x \in F_i \mid |f(x)| \prec r|g(x)|\}$ est connexe.

Nous venons donc de montrer que, pour toute composante irréductible F_i de C, $F_i \cap \{x \in X \mid |f(x)| \prec r\,|g(x)|\}$ est connexe. Pour montrer que $D = C \cap \{x \in X \mid |f(x)| \prec r\,|g(x)|\}$ est connexe et conclure, il suffit de montrer que si F_i et F_j sont deux composantes irréductibles de C qui se coupent, alors il existe des points x_i de F_i et x_j de F_j qui appartiennent à la même composante connexe de D.

Considérons donc deux telles composantes F_i et F_j. Si la fonction g s'annule sur $F_i \cap F_j$, alors

$$\{x \in F_i \mid |f(x)| \prec r|g(x)|\} \cap \{x \in F_j \mid |f(x)| \prec r|g(x)|\} \neq \emptyset$$

et le résultat est immédiat.

Supposons, à présent, que la fonction g est minorée en valeur absolue sur $F_i \cap F_j$ par une constante $\alpha > 0$. Nous pouvons supposer que $\alpha \in \sqrt{|k^*|}$. Alors, d'après le lemme 4.4, il existe des points $x_i \in F_i$ et $x_j \in F_j$ vérifiant $|f(x_i)| < r\,|g(x_i)|$ et $|f(x_j)| < r\,|g(x_j)|$. En particulier, la fonction g ne s'annule en aucun de ces deux points et, quitte à diminuer α, nous pouvons supposer que $|g(x_i)| \geq \alpha$ et $|g(x_j)| \geq \alpha$.

Notons $L = \{\ell \in [\![1, m]\!] \mid F_\ell \cap F_i \cap F_j \neq \emptyset\}$. D'après le corollaire 1.7, quitte à diminuer encore α, nous pouvons supposer que, pour tout $\ell \in L$, $\{x \in F_\ell \mid |g(x)| \geq \alpha\}$ est connexe. Dans ce cas, la partie

$$\bigcup_{\ell \in L} \{x \in F_\ell \mid |g(x)| \geq \alpha\}$$

est une partie connexe de $\{x \in X \mid |g(x)| \geq \alpha \text{ et } |f(x)| \leq r\,|g(x)|\}$. En utilisant de nouveau le lemme 4.2 et la proposition 4.5, on montre que la partie

$$\bigcup_{\ell \in L} \{x \in F_\ell \mid |g(x)| \geq \alpha\} \cap \{x \in X \mid |f(x)| < r\,|g(x)|\}$$

est contenue dans une partie connexe de D. Puisqu'elle contient les points x_i et x_j, nous pouvons conclure. □

En combinant ce résultat à celui du corollaire 1.6, on obtient le théorème A annoncé en introduction.

Corollaire 4.7. — *Soit H un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $|k^*|$. Soit Y un espace k-analytique H-strict. Soient $f, g \in \mathscr{O}(Y)$ et $s \in \mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{H}$. Les applications naturelles*

$$\pi_0(\{y \in Y \mid |f(y)| \prec s\,|g(y)|\}) \to \pi_0(\{y \in Y \mid |f(y)| \leq s\,|g(y)|\})$$

sont bijectives.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que $V = \{y \in Y \mid |f(y)| \leq s\,|g(y)|\}$ n'est pas vide. Soit C une composante connexe de V. Posons $V^{\prec} = \{y \in Y \mid |f(y)| \prec s\,|g(y)|\}$. Il suffit de montrer que $D = C \cap V^{\prec}$ est connexe et non vide. D'après le lemme 4.4, nous avons $\overline{D} = C$. En particulier, D n'est pas vide.

Notons $(D_i)_{i\in I}$ la famille des composantes connexes de D. Soit y un point de $C \setminus D$. Puisque l'espace Y est H-strict, il existe des domaines affinoïdes H-stricts $V_1, \ldots, V_n$ de Y contenant y dont la réunion est un voisinage de y et dont les intersections deux à deux sont H-strictes.

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $C \cap V_p$ est compact et possède donc un nombre fini de composantes connexes. D'après le corollaire 4.6, il en va de même pour $C \cap V_p \cap V^{\prec}$. En particulier, V_p ne rencontre qu'un nombre fini de composantes D_i.

Puisque la réunion des V_p forme un voisinage de y, il existe donc un élément $i \in I$ tel que $y \in \overline{D_i}$. Nous venons de montrer que

$$C = \overline{D} = \bigcup_{i\in I} \overline{D_i}.$$

Soient maintenant $i, j \in I$ tels que $y \in \overline{D}_i \cap \overline{D}_j$. Soit p tel que $y \in \overline{D_i \cap V_p}$ et soit q tel que $y \in \overline{D_j \cap V_q}$. Il existe un domaine affinoïde H-strict W de $V_p \cap V_q$ contenant y. D'après le lemme 4.4 et le corollaire 4.6, les espaces $W \cap V^{\prec}$, $V_p \cap V^{\prec}$ et $V_q \cap V^{\prec}$ ne sont pas vides et il existe une unique composante connexe E (resp. E_p, resp. E_q) de $W \cap V^{\prec}$ (resp. $V_p \cap V^{\prec}$, resp. $V_q \cap V^{\prec}$) telle que $y \in \overline{E}$ (resp. $y \in \overline{E}_p$, resp. $y \in \overline{E}_q$).

On en déduit d'une part que E est contenu dans E_p et E_q et d'autre part que ces deux derniers espaces rencontrent, et donc sont contenus dans, D_i et D_j respectivement. Par conséquent, $i = j$.

Finalement, nous avons montré que C est l'union des adhérences des composantes D_i et que ces adhérentes sont disjointes. Puisqu'elles sont connexes, ce sont les composantes connexes de C. On en déduit que I est réduit à un élément et donc que D est connexe. $\square$

À l'aide d'une récurrence basée sur le lemme 4.2 et le corollaire 4.7, nous pouvons finalement obtenir le résultat qui suit.

Corollaire 4.8. — *Soit H un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $|k^*|$. Soit Y un espace k-analytique H-strict. Soient $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in \mathscr{O}(Y)$ telles que, pour tout i, f_i et g_i ne s'annulent pas simultanément sur Y. Soient $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}_+^*$ tels que, pour tout i, r_i soit d'image non nulle dans $\mathbf{R}_+^*/\sqrt{\langle H, r_1, \ldots, r_{i-1}\rangle}$,*

Alors, l'application naturelle

$$\pi_0\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{y \in Y \mid |f_i(y)| < r_i\,|g_i(y)|\}\Big) \to \pi_0\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{y \in Y \mid |f_i(y)| \leq r_i\,|g_i(y)|\}\Big)$$

est bijective.

Corollaire 4.9. — *Les résultats de cette section restent valables en remplaçant l'ensemble des composantes connexes par l'ensemble des composantes connexes géométriques, l'ensemble des composantes irréductibles ou l'ensemble des composantes irréductibles géométriques.*

Démonstration. — On applique le résultat concerné à l'espace obtenu en étendant les scalaires au complété d'une clôture algébrique de k ou à la normalisée de l'espace. □

Références

[AS02] A. Abbes & T. Saito – « Ramification of local fields with imperfect residue fields », *Amer. J. Math.* **124** (2002), no. 5, p. 879–920.

[Bar70] W. Bartenwerfer – « Einige Fortsetzungssätze in der p-adischen Analysis », *Math. Ann.* **185** (1970), p. 191–210.

[Ber90] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[Ber93] ———, « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1993), no. 78, p. 5–161 (1994).

[Ber99] ———, « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible », *Invent. Math.* **137** (1999), no. 1, p. 1–84.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry.

[BLR95] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud – « Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem », *Invent. Math.* **119** (1995), no. 2, p. 361–398.

[Bos77] S. Bosch – « Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Räume », *Math. Ann.* **229** (1977), no. 1, p. 25–45.

[CT10] B. Conrad & M. Temkin – « Descent for non-archimedean analytic spaces », 2010, `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/descentnew.pdf`, `http://www.math.huji.ac.il/~temkin/papers/Descent.pdf`.

[Duc03] A. Ducros – « Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique », *Manuscripta Math.* **111** (2003), no. 4, p. 513–528.

[Duc07] ———, « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p-adique », *Compos. Math.* **143** (2007), no. 6, p. 1511–1532.

[Duc12] ———, « Les espaces de Berkovich sont modérés, d'après E. Hrushovksi et F. Loeser », *Sém. Bourbaki* (2012), no. Exp. 1056.

[Epp73] H. P. Epp – « Eliminating wild ramification », *Invent. Math.* **19** (1973), p. 235–249.

[HL10] E. Hrushovski & F. Loeser – « Non-archimedean tame topology and stably dominated types », arXiv, 2010, `http://arxiv.org/abs/1009.0252`.

[Lüt74] W. Lütkebohmert – « Der Satz von Remmert-Stein in der nichtarchimedischen Funktionentheorie », *Math. Z.* **139** (1974), p. 69–84.

[Poi08] J. Poineau – « Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p-adiques : privilège et noethérianité », *Compos. Math.* **144** (2008), no. 1, p. 107–133.

[Tem04] M. Temkin – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.

---

20 janvier 2014

Jérôme Poineau, Institut de recherche mathématique avancée, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France • *E-mail :* `jerome.poineau@math.unistra.fr`