

Thibaud Lemanissier
Jérôme Poineau

ESPACES DE BERKOVICH
GLOBAUX
CATÉGORIE, TOPOLOGIE,
COHOMOLOGIE

Thibaud Lemanissier

Lycée Pierre de Coubertin, Meaux.

E-mail : `thibaud.lemanissier@ac-creteil.fr`

Jérôme Poineau

Normandie Univ., UNICAEN, CNRS, Laboratoire de mathématiques Nicolas
Oresme, 14000 Caen, France.

E-mail : `jerome.poineau@unicaen.fr`

Url : `https://poineau.users.lmno.cnrs.fr/`

30 janvier 2024

**ESPACES DE BERKOVICH GLOBAUX
CATÉGORIE, TOPOLOGIE, COHOMOLOGIE**

Thibaud Lemanissier, Jérôme Poineau

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
0.1. Objectifs du manuscrit.....	4
0.2. Organisation du texte.....	6
0.3. Applications.....	13
0.4. Prérequis.....	17
0.5. Remerciements.....	18
1. Préliminaires et rappels	19
1.1. Spectre analytique d'un anneau de Banach.....	20
1.2. Espace affine analytique sur un anneau de Banach.....	30
1.3. Parties rationnelles et spectralement convexes.....	35
1.4. Disques, couronnes et domaines polynomiaux.....	38
1.5. Bases de voisinages.....	46
1.6. Résultats locaux.....	52
2. Catégorie des espaces analytiques : définitions	65
2.1. Catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques.....	66
2.2. Catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$	74
2.3. Immersions d'espaces analytiques.....	77
3. Quelques résultats topologiques sur les anneaux de fonctions analytiques	83
3.1. Normes sur les quotients.....	84
3.2. Division de Weierstraß avec contrôle sur les normes.....	93

3.3. Fermeture des idéaux du faisceau structural.....	103
4. Catégorie des espaces analytiques : propriétés.....	117
4.1. Analytification de schémas.....	118
4.2. Extension des scalaires.....	122
4.3. Produits fibrés.....	125
4.4. Morphismes propres.....	130
4.5. Parties spectralement convexes.....	132
4.6. Morphismes séparés.....	138
5. Étude des morphismes finis.....	143
5.1. Définition et premières propriétés.....	144
5.2. Images directes des faisceaux cohérents.....	146
5.3. Stabilité des morphismes finis.....	152
5.4. Changement de base fini.....	154
5.5. Nullstellensatz de Rückert.....	159
5.6. Critères d'ouverture de morphismes finis.....	166
6. Structure locale des espaces analytiques.....	171
6.1. Décomposition locale des espaces analytiques en composantes irréductibles.....	172
6.2. Un critère d'ouverture.....	175
6.3. Normalisation de Noether locale.....	176
6.4. Dimension locale d'un espace analytique.....	179
6.5. D'un schéma à son analytifié : premières propriétés.....	182
6.6. D'un schéma à son analytifié : platitude et conséquences.....	186
7. Propriétés topologiques des espaces analytiques.....	195
7.1. Espaces élastiques.....	195
7.2. Connexité par arcs locale.....	202
7.3. Dimension topologique.....	212
8. Espaces de Stein.....	219
8.1. Systèmes de Cousin-Runge.....	221
8.2. Théorèmes A et B sur les polydisques fermés relatifs.....	245
8.3. Affinoïdes surconvergeants.....	253
8.4. Quelques compléments.....	257

8.5. Théorème B sur certains ouverts.....	260
8.6. Noéthérianité d'anneaux de séries arithmétiques convergentes.....	266
Bibliographie.....	273
Index.....	279
Liste des notations.....	283

INTRODUCTION

À la fin des années 1980, V. Berkovich a proposé, dans l'ouvrage [Ber90], une nouvelle approche de la géométrie analytique sur un corps p -adique, ou plus généralement ultramétrique. Elle a rapidement connu un grand succès et trouvé des applications dans des domaines variés des mathématiques tels que le programme de Langlands, la dynamique complexe, ou encore la géométrie diophantienne.

L'une des spécificités des espaces de Berkovich réside dans les excellentes propriétés topologiques dont ils jouissent, et qu'ils partagent avec les espaces analytiques complexes : compacité locale, connexité par arcs locale, contractibilité locale, etc. Ces propriétés sont d'autant plus remarquables que les corps ultramétriques sur lesquels ces espaces sont définis, ne sont, en général, ni localement compacts, ni localement connexes. L'explication réside dans le fait que les espaces de Berkovich ne contiennent pas uniquement les points « classiques » (ceux du corps de base), mais de nombreux autres, que l'on peut, par exemple, utiliser pour tracer des chemins entre les premiers.

Par définition, les points des espaces de Berkovich sont associés à des semi-normes multiplicatives sur des anneaux bien choisis. Par exemple, tout point classique donne lieu à une semi-norme sur un anneau de polynômes, obtenue en composant l'application d'évaluation en ce point avec la valeur absolue sur le corps de base, mais bien d'autres types de semi-normes existent.

Un autre aspect particulièrement intéressant des espaces de Berkovich est la possibilité de les définir en prenant comme base, non seulement un corps ultramétrique complet, mais, de façon bien plus générale, un anneau de Banach

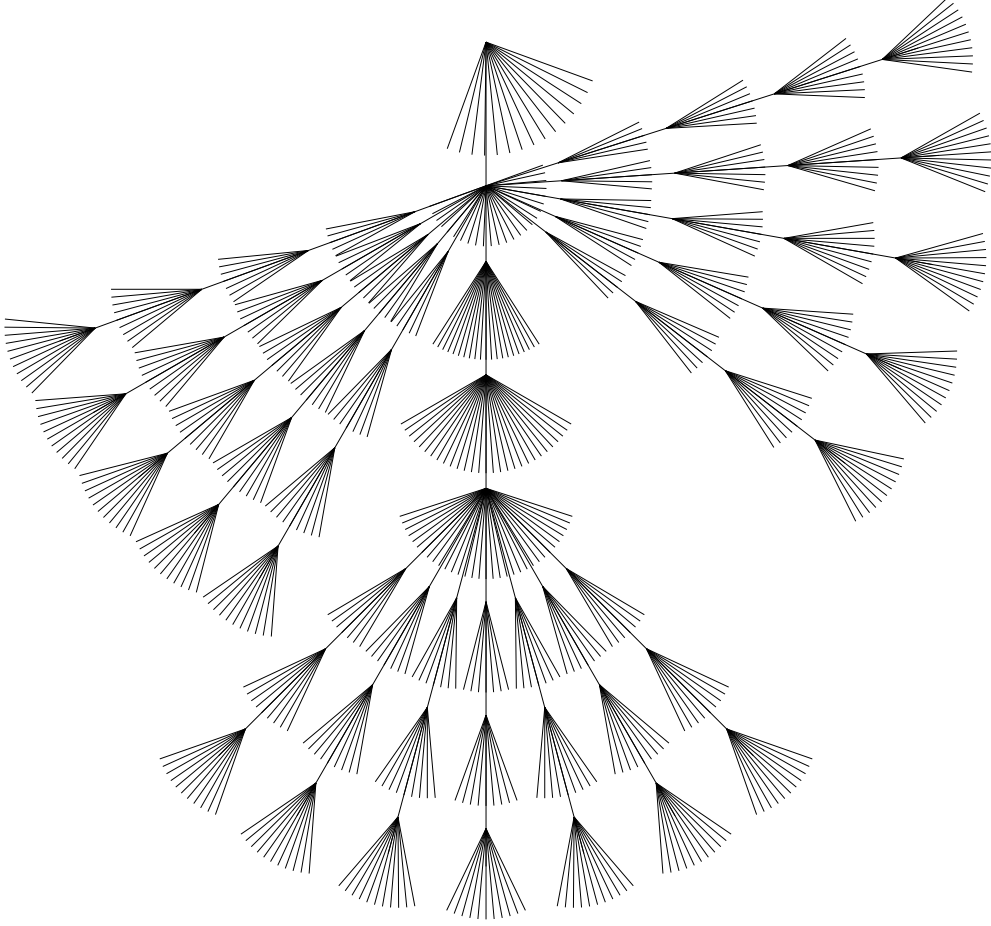


FIGURE 1. Une droite de Berkovich traditionnelle.

quelconque. On peut, par exemple, choisir comme base le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle. Les espaces de Berkovich qui en résultent sont alors les espaces analytiques complexes classiques. On peut également partir de l'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ muni de la valeur absolue usuelle. Comme la description en termes de semi-normes le laisse deviner, les espaces que l'on définit ainsi se composent à la fois de parties p -adiques, pour tout nombre premier p , et de parties archimédiennes, proches des espaces analytiques complexes. Plus précisément, tout espace de Berkovich sur $\mathbf{Z}$ se projette naturellement sur un espace noté $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, le spectre de $\mathbf{Z}$ au sens de Berkovich, représenté sur la figure 2. La fibre au-dessus d'un point p -adique de

ce spectre est un espace de Berkovich p -adique. La fibre au-dessus d'un point archimédien est presque un espace analytique complexe (en réalité, un espace analytique complexe quotienté par l'action de la conjugaison). De tels espaces présentent un intérêt du point de vue arithmétique.

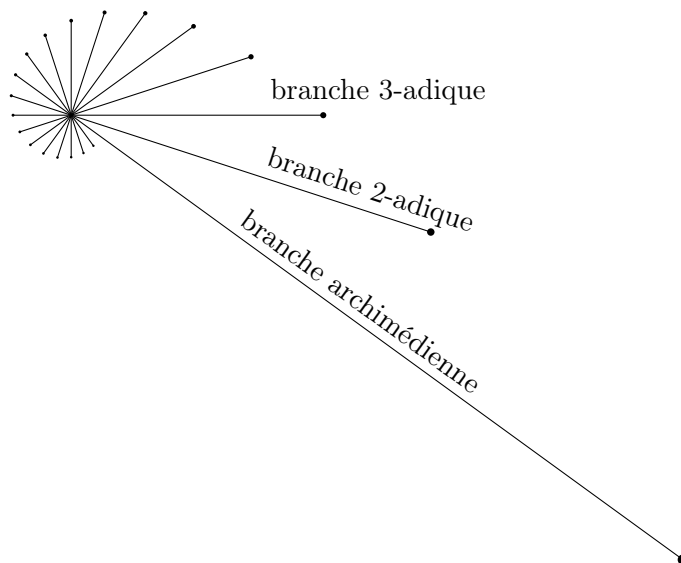
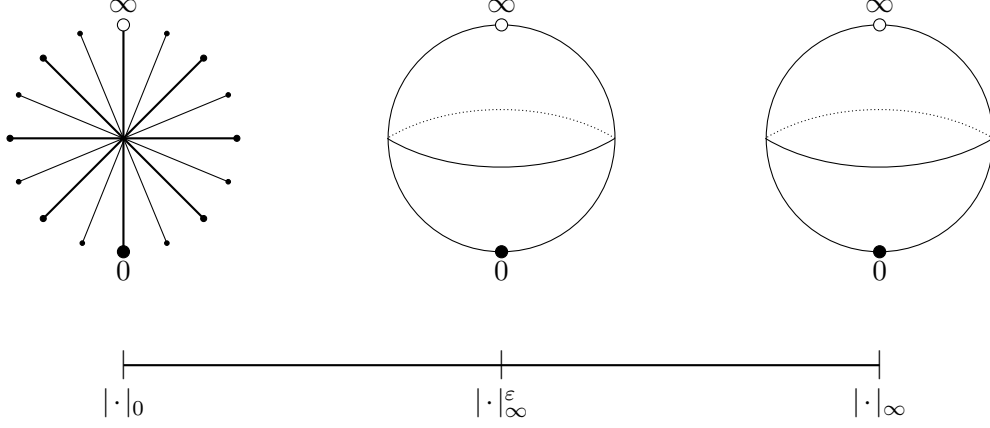


FIGURE 2. Le spectre de $\mathbf{Z}$ au sens de Berkovich.

Mentionnons un autre exemple d'anneau de Banach intéressant : le corps $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$, défini comme le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ muni de la norme dite hybride, égale au maximum entre la valeur absolue usuelle et la valeur absolue triviale. Les espaces de Berkovich sur $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$ se présentent comme des familles d'espaces analytiques complexes (au-dessus du corps $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_{\infty}$ ou d'une de ses puissances $|\cdot|_{\infty}^{\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in]0, 1]$) qui semblent dégénérer sur un espace de Berkovich ultramétrique (au-dessus du corps $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$), cf. figure 3. Ces espaces ont été introduits par V. Berkovich pour étudier la structure de Hodge mixte limite d'une famille d'espaces complexes dans [Ber09]. Ils ont, depuis, été utilisés pour d'autres types de problèmes : comportement asymptotique de formes volumes (cf. [BJ17]), de mesures d'équilibre d'endomorphismes (cf. [Fav18]), de produits de matrices aléatoires dans $\text{SL}_2(\mathbf{C})$ (cf. [DF19]), ou encore bornes uniformes de type Manin-Mumford en genre 2 (cf. [DKY20]).

FIGURE 3. La droite projective analytique sur $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$.

0.1. Objectifs du manuscrit

Bien qu'elle ait été formellement introduite dès le premier chapitre de [Ber90], la théorie des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach n'a guère été développée. Le second auteur leur a consacré deux textes. Le premier, [Poi10a], propose une étude détaillée de la droite de Berkovich sur $\mathbf{Z}$ selon différents aspects (algébriques, topologiques, cohomologiques, etc.). Le second, [Poi13a], traite d'espaces arbitraires sur une certaine classe d'anneaux de Banach (contenant $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$), mais uniquement d'un point de vue algébrique local (noethérianité des anneaux locaux, cohérence du faisceau structural, etc.).

L'objectif du présent manuscrit est de combler quelques lacunes de la théorie des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach $\mathcal{A}$ et d'étudier en profondeur certains aspects qui ont, jusqu'ici, été laissés de côté, en dépit de leur importance. Au cours du texte, nous devons imposer à l'anneau de Banach $\mathcal{A}$ diverses propriétés techniques, variant de chapitre en chapitre, en fonction des besoins. Pour simplifier, nous désignons par l'expression « espace de Berkovich global » un espace de Berkovich sur un anneau de Banach satisfaisant les propriétés requises. Le lecteur sourcilieux peut choisir de la remplacer par « espace de Berkovich sur $\mathbf{Z}$ » ou « espace de Berkovich sur $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$ », la théorie étant conçue de façon à toujours s'appliquer au moins dans ces deux contextes.

Notre étude s'organise selon trois axes principaux.

Axe ① : Définition de la catégorie des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach

V. Berkovich a défini les espaces de Berkovich sur un anneau de Banach dès les premières pages de son ouvrage fondateur [Ber90], mais n'a pas introduit de notion de morphisme dans ce contexte. Le premier objectif de ce texte est de combler ce manque. Une fois cette tâche effectuée, on dispose de la catégorie des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach et il devient possible de considérer et définir dans un langage adéquat différentes opérations d'usage courant : produits fibrés, extension des scalaires (de $\mathbf{Z}$ à un anneau d'entiers de corps de nombres, par exemple), analytification de schémas, etc.

Cette étude fait l'objet des chapitres 2 (définitions et propriétés générales dans le cadre des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach), 3 (compléments techniques sur des normes d'anneaux de Banach) et 4 (propriétés plus fines dans le cadre des espaces de Berkovich sur une bonne classe d'anneaux de Banach, contenant notamment $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$).

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, lorsque l'anneau de Banach considéré est un corps valué ultramétrique complet k , la définition proposée ici ne permet pas de retrouver tous les espaces k -analytiques définis par V. Berkovich dans [Ber90, Ber93], mais seulement les espaces sans bords.

Axe ② : Étude de la topologie des espaces de Berkovich globaux

Les propriétés topologiques des espaces de Berkovich forment l'un des points saillants de la théorie et recèlent nombre d'informations subtiles. Dans [Ber08], V. Berkovich explique s'être rendu compte dès les premiers instants que la topologie de l'analytifiée d'une courbe elliptique sur $\mathbf{C}_p$ (qui est contractile ou homotope à un cercle) permettait de retrouver son type de réduction (bonne ou mauvaise, respectivement). Citons également le travail [Thu07] d'A. Thuillier, qui identifie le type d'homotopie du complexe d'intersection d'un diviseur à croisements normaux compactifiant une variété sur un corps parfait à celui d'un espace de Berkovich canoniquement associé à la variété (montrant ainsi que ce type d'homotopie ne dépend pas du diviseur choisi).

En dépit de cet intérêt évident, les considérations topologiques sont presque totalement absentes de l'étude des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach. Seuls quelques résultats existent, limités, pour l'essentiel, au cas de

la droite affine analytique sur $\mathbf{Z}$ (connexité par arcs locale dans [Poi10a], contractibilité globale dans [LS19]).

Dans ce texte, nous développons les outils nécessaires à une étude topologique systématique des espaces de Berkovich globaux et obtenons de premiers résultats généraux concrets, telle la connexité par arcs locale.

Cette étude fait l'objet des chapitres 5 (préliminaires sur les morphismes finis), 6 (structure locale des espaces) et 7 (connexité par arcs locale et dimension topologique).

Axe ③ : Étude de la cohomologie des espaces de Berkovich globaux

Comme dans le domaine de la topologie, les aspects cohomologiques des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach n'ont été abordés que dans le cadre de la droite affine analytique sur $\mathbf{Z}$, dans [Poi10a]. Pourtant, les applications de la géométrie analytique, tant complexe que p -adique, interviennent souvent par le biais de calculs de dimension d'espaces de cohomologie ou de résultats d'annulation.

Nous initions ici l'étude de la cohomologie cohérente des espaces de Berkovich globaux en dimension supérieure. La première étape, indispensable à tout calcul, est de disposer d'une vaste classe d'espaces dont les groupes de cohomologie cohérente supérieurs soient nuls. On peut penser à ces espaces comme à des analogues des espaces affinoïdes en géométrie analytique rigide ou des espaces de Stein en géométrie analytique complexe.

Cette étude fait l'objet du chapitre 8 (et utilise de façon essentielle les résultats techniques du chapitre 3).

0.2. Organisation du texte

Exposons maintenant plus en détails, chapitre par chapitre, le contenu de ce texte. Nous mettons en valeur des résultats qui nous semblent importants, tout en en laissant quelques autres de côté. L'introduction de chacun des chapitres contient une description exhaustive de son contenu.

Le but principal de ce texte est de développer la théorie des espaces de Berkovich définis sur $\mathbf{Z}$ ou d'autres anneaux de Banach aux propriétés similaires : anneaux d'entiers de corps de nombres, corps hybrides comme $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$, anneaux de valuation discrète, etc. Nous ne sommes pas parvenus à isoler un ensemble de conditions naturelles à imposer à un anneau de Banach pour qu'il entre dans

le cadre de notre théorie. Les différents chapitres de ce texte contiennent donc différentes définitions (anneau de base, anneau de base géométrique, anneau de Dedekind analytique, etc.), adaptés à nos besoins spécifiques. Ce choix présente l'avantage de mettre en lumière les propriétés utilisées pour démontrer chacun des résultats, et nous espérons également qu'il permettra de prendre en compte plus facilement les développements ultérieurs de la théorie (qui pourraient faire intervenir d'autres anneaux de Banach, dont l'idée nous échappe à l'heure où nous écrivons).

Insistons sur le fait que tous les résultats que nous démontrons sont valables pour des espaces de Berkovich définis sur un anneau de Banach qui est l'un de ceux cités en exemple plus haut. Seule l'ultime section 8.6, spécifique aux anneaux d'entiers de corps de nombres, fait exception à cette règle. Comme précédemment, nous utiliserons l'expression « espace de Berkovich global » pour désigner un espace de Berkovich sur un anneau de Banach satisfaisant les propriétés requises.

Chapitre 1 : Préliminaires et rappels

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach. Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler en détail la construction des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, en suivant [Ber90]. Nous rappelons ensuite les principaux résultats obtenus par le second auteur dans ses travaux [Poi10a, Poi13a]. Nous en profitons pour démontrer quelques résultats techniques (par exemple sur les bases de voisinages des points, cf. propositions 1.5.11 et 1.5.12) et introduire quelques outils dont nous nous servirons dans la suite du texte.

Un résultat majeur est le théorème de division de Weierstraß (cf. [Poi13a, théorème 8.3]), dont nous rappelons maintenant l'énoncé. Considérons la droite affine analytique $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ (avec coordonnée T) et la projection $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soient b un point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et x un point de $\pi^{-1}(b)$. Nous supposons que x est rigide dans la fibre $\pi^{-1}(b) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1,\text{an}}$, où $\mathcal{H}(b)$ désigne le corps résiduel complété du point b . Cela signifie qu'il existe un polynôme irréductible $\mu_x \in \mathcal{H}(b)[T]$ qui s'annule exactement en ce point.

Théorème 1.6.5. — *Plaçons-nous dans le cadre décrit ci-dessus. Soit G un élément de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Supposons que son image dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(b),x}$ n'est pas nulle et notons n sa valuation.*

Alors, pour tout $F \in \mathcal{O}_{X,x}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathcal{O}_{X,x}^2$ tel que

- i) $F = QG + R$;
- ii) $R \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),b}[T]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $n \deg(\mu_x)$.

Dans un souci de précision, signalons que l'énoncé du théorème requiert des hypothèses sur le point b (par exemple de supposer que b est décent, cf. définition 1.6.2), qui sont toujours satisfaites si l'anneau $\mathcal{A}$ est $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$, par exemple.

Dans [Poi13a], on tire plusieurs conséquences de ce théorème dans le cadre des espaces de Berkovich globaux : noethérianité et excellence des anneaux locaux $\mathcal{O}_x$, cohérence du faisceau structural, etc. Elles sont rappelées à la fin du chapitre.

Chapitre 2 : Catégorie des espaces analytiques : définitions

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach. L'objet principal de ce chapitre est de définir la notion de morphisme entre deux espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Rappelons que la définition d'espace analytique sur $\mathcal{A}$, comme la définition d'espace analytique complexe, s'effectue en plusieurs étapes : on commence par les espaces affines analytiques, on considère ensuite les modèles locaux, qui sont des fermés analytiques d'ouverts des précédents, puis on recolle ces derniers.⁽¹⁾ La définition de morphisme procède de la même logique.

Soient U et V des ouverts d'espaces affines analytiques sur $\mathcal{A}$ et $\varphi: U \rightarrow V$ un morphisme d'espaces annelés. Pour tout compact U' de U et tout compact V' de V contenant $\varphi(U')$, $\varphi^\#$ induit un morphisme

$$\varphi_{U',V'}^\#: \mathcal{O}_V(V') \longrightarrow \mathcal{O}_U(U')$$

entre espaces normés (munis des normes uniformes sur V' et U' respectivement). Nous dirons que $\varphi: U \rightarrow V$ est un *morphisme analytique* de U dans V lorsque tous les morphismes $\varphi_{U',V'}^\#$ précédents sont contractants (cf. définition 2.1.10).

Soient X et Y des fermés analytiques d'ouverts d'espaces affines analytiques sur $\mathcal{A}$. Un *morphisme analytique* $\varphi: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces localement annelés qui se relève localement en un morphisme analytique d'ouverts d'espaces affines analytiques au sens précédent (cf. définition 2.1.10).

⁽¹⁾Si $\mathcal{A} = k$ est un corps valué ultramétrique complet, cette définition ne permet pas de retrouver tous les espaces k -analytiques définis par V. Berkovich dans [Ber90, Ber93], mais seulement les espaces sans bords.

La définition générale s'obtient par recollement, ce que nous formulerons précisément en termes d'atlas (*cf.* définition 2.1.24). Nous obtenons ainsi la *catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques*. Nous la notons $\mathcal{A}\text{--An}$.

Nous définissons également une seconde catégorie, la *catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$* , notée $\text{An}_{\mathcal{A}}$. Ses objets sont des couples formés d'un morphisme borné d'anneaux de Banach $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et d'un espace $\mathcal{B}$ -analytique (*cf.* définition 2.2.1). Ses morphismes sont définis de façon analogue à ceux de $\mathcal{A}\text{--An}$ (*cf.* définitions 2.2.2, 2.2.5 et 2.2.6). Dans la suite du texte, cette catégorie nous sera utile pour considérer des changements d'anneau de base.

Insistons sur le fait que, dans ce chapitre, il n'est besoin d'aucune hypothèse sur l'anneau de Banach $\mathcal{A}$. Nous n'en imposerons que plus tard, lorsque nous étudierons la catégorie $\mathcal{A}\text{--An}$.

Chapitre 3 : Quelques résultats topologiques sur les anneaux de fonctions analytiques

Ce chapitre est probablement le plus technique du manuscrit. Il débute par des considérations sur certains anneaux de Banach qui se présentent comme des quotients et des résultats de comparaison de normes (norme résiduelle, norme uniforme, etc.) sur ceux-ci. La conséquence principale en est une *version normée du théorème de division de Weierstraß* rappelé plus haut. Le diviseur G étant fixé, elle permet d'obtenir un contrôle de la norme du quotient Q et du reste R en fonction de la norme du dividende F (*cf.* théorème 3.2.1)

Ce théorème est utilisé, à la fin du chapitre, pour démontrer un résultat de fermeture des idéaux du faisceau structural. Au chapitre 8, nous le généraliserons en combinant la première version avec la théorie des espaces de Stein. Nous présentons ici directement la forme forte, dont l'énoncé est plus accessible. Elle est valable sous certaines hypothèses sur l'anneau de Banach $\mathcal{A}$. Nous ne les précisons pas ici, et nous contentons d'indiquer qu'elles sont satisfaites dans le cas de $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$.

Corollaire 8.4.8. — Soient x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et I un idéal de $\mathcal{O}_x$. Soient U un voisinage de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}(U)$ qui converge vers un élément g de $\mathcal{O}(U)$. Si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'image de g_n dans $\mathcal{O}_x$ appartient à I , alors l'image de g dans $\mathcal{O}_x$ appartient à I .

Chapitre 4 : Catégorie des espaces analytiques : propriétés

Ce chapitre prolonge l'étude de la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques initiée au chapitre 2. En imposant des conditions supplémentaires sur l'anneau $\mathcal{A}$, autrement dit en se restreignant à une certaine classe d'espaces analytiques globaux, on peut démontrer plusieurs propriétés attendues.

Notre premier résultat est l'analogue d'un résultat classique, d'apparence anodine, mais fondamental. Il affirme l'existence d'une bijection naturelle entre les fonctions globales sur un espace et les morphismes de cet espace vers la droite affine analytique.

Proposition 4.1.1. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}n}(X, \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\mathrm{an}}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^\sharp(T) \end{array},$$

où T est la coordonnée sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\mathrm{an}}$, est bijective.

En termes vagues, la surjectivité signifie qu'une fonction F sur X étant donnée (correspondant à $\varphi^\sharp(T)$), les séries convergentes en F font sens sur X (la série $\sum a_i F^i$ correspondant à $\varphi^\sharp(\sum a_i T^i)$). L'injectivité signifie que ces séries sont des fonctions sur X bien définies. L'espace X étant localement un fermé analytique (défini par un faisceau d'idéaux cohérent) d'un ouvert d'un espace affine analytique, on conçoit que le théorème de fermeture des idéaux énoncé plus haut (*cf.* corollaire 3.3.12) joue un rôle capital dans sa démonstration.

Ce résultat, et sa généralisation à un nombre fini de fonctions globales, permet de montrer que plusieurs foncteurs naturels sont représentables et ainsi de définir, de façon adéquate, l'analytifié d'un schéma localement de type fini sur $\mathcal{A}$ (*cf.* théorème 4.1.4), l'extension des scalaires d'un espace analytique sur $\mathcal{A}$ à un anneau d'entiers de corps de nombres (*cf.* théorème 4.2.4), ou encore les produits fibrés d'espaces analytiques sur $\mathcal{A}$ (*cf.* théorème 4.3.8).

Chapitre 5 : Étude des morphismes finis

Dans ce chapitre, on définit et étudie les morphismes finis d'espaces analytiques. Il s'agit d'une notion essentielle, puisque c'est par le biais des morphismes finis que nous pourrions passer des propriétés des espaces affines analytiques à celles des espaces analytiques généraux.

Nous démontrons les analogues de plusieurs résultats classiques sur les morphismes finis. En voici un emblématique.

Théorème 5.2.1. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces analytiques globaux et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors, le faisceau $\varphi_*\mathcal{F}$ est cohérent.

Ce théorème est l'un des ingrédients essentiels de la preuve du Nullstellensatz, que nous démontrons sous la forme suivante.

Corollaire 5.5.8. — Soit X un espace analytique global. Soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X . Notons $V(\mathcal{J})$ le lieu des zéros de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$ le faisceau d'idéaux des fonctions s'annulant en tout point de $V(\mathcal{J})$. Alors, on a

$$\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) = \sqrt{\mathcal{J}}.$$

Chapitre 6 : Structure locale des espaces analytiques

Dans ce chapitre, nous étudions la structure locale des espaces analytiques. Une version du lemme de normalisation de Noether assure que tout espace intègre se présente localement comme un revêtement fini (ramifié) d'un espace affine.

Théorème 6.3.2. — Soit X un espace analytique global. Notons $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ le morphisme structural. Soit x un point de X en lequel $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre. Alors, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un entier $n \in \mathbf{N}$, un ouvert V de l'espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ ou $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(\pi(x))}^{n,\text{an}}$ et un morphisme fini ouvert $\varphi: U \rightarrow V$.

D'autre part, la proposition 6.1.8 assure que tout espace analytique global peut s'écrire, localement au voisinage d'un point, comme union de fermés analytiques intègres en ce point. La combinaison de ces deux résultats fournit donc un résultat de structure locale précis pour n'importe quel espace.

Dans la suite du chapitre, nous utilisons cette description locale afin de comparer les propriétés d'un schéma à celle de son analytifié. Le résultat le plus important est le suivant.

Théorème 6.6.5. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de type fini sur $\mathcal{A}$. Notons $\mathcal{X}^{\text{an}}$ son analytifié. Alors, le morphisme canonique $\rho_{\mathcal{X}}: \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ est plat.

L'énoncé analogue en géométrie analytique complexe ou ultramétrique est fondamental. Il intervient notamment dans la preuve des théorèmes GAGA (cf. [Ser56]).

Chapitre 7 : Propriétés topologiques des espaces analytiques

Dans ce chapitre, nous étudions finalement la topologie des espaces analytiques. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 7.2.17. — *Tout espace analytique global est localement connexe par arcs.*

Comme on peut s'y attendre, nous démontrons tout d'abord le résultat pour les espaces affines analytiques. Nous en déduisons le cas général grâce aux résultats de structure locale du chapitre 6. Cette seconde étape n'est pas immédiate car un revêtement fini d'un espace connexe par arcs ne le reste pas nécessairement (cf. remarque 7.1.6). Cette difficulté nous conduit à introduire une nouvelle notion de topologie générale, appelée *élasticité* (cf. définition 7.1.2), raffinant la connexité par arcs.

Chapitre 8 : Espaces de Stein

Dans le dernier chapitre de cet ouvrage, nous initions la théorie des espaces de Stein dans le cadre des espaces de Berkovich globaux. Notre résultat principal concerne les polydisques fermés sur un anneau de Banach $\mathcal{A}$ adéquat, par exemple $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$.

Corollaires 8.2.15 et 8.2.16. — *Soient $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur le polydisque relatif $\overline{D} := \overline{D}(r_1, \dots, r_n)$ sur $\mathcal{A}$. Alors,*

- i) *pour tout entier $q \geq 1$, on a $H^q(\overline{D}, \mathcal{F}) = 0$;*
- ii) *le faisceau $\mathcal{F}$ est engendré par l'ensemble de ses sections globales $\mathcal{F}(\overline{D})$.*

Nous pouvons ensuite jeter les bases d'une théorie des espaces affinoïdes surconvergens (cf. définition 8.3.1) possédant des propriétés similaires à celle de la théorie ultramétrique classique. On peut y définir des domaines rationnels, de Laurent, de Weierstraß (cf. définition 8.3.4) et du résultat précédent découle un analogue du théorème d'acyclicité de Tate et du théorème de Kiehl (cf. théorème 8.3.9). En particulier, tout point d'un espace de Berkovich global possède une base de voisinages formé d'affinoïdes surconvergens, en particulier d'espaces dont la cohomologie cohérente supérieure s'annule.

Dans la section 8.5, nous adaptons ces résultats (sans la propriété de génération globale du faisceau) dans un cadre ouvert.

Nous terminons avec une application des résultats d'annulation cohomologique à la noéthérianité d'anneaux de *séries arithmétiques convergentes*. Soit

$n \in \mathbf{N}$. Pour $r_1, \dots, r_n \in]0, 1[$, notons

$$\mathbf{Z}[[T_1, \dots, T_n]]_{>(r_1, \dots, r_n)}$$

le sous-anneau de $\mathbf{Z}[[T_1, \dots, T_n]]$ formé des séries qui convergent au voisinage du polydisque complexe $\overline{D}(r_1, \dots, r_n)$. D. Harbater a montré dans [Har84] que ces anneaux sont noethériens lorsque $n = 1$. Nous tirons parti des résultats cohomologiques obtenus dans ce chapitre pour généraliser ce résultat.

Corollaire 8.6.12. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $r_1, \dots, r_n \in]0, 1[$, l'anneau $\mathbf{Z}[[T_1, \dots, T_n]]_{>(r_1, \dots, r_n)}$ est noethérien.*

Nous obtenons en réalité une version raffinée de ce résultat qui autorise des coefficients dans $\mathbf{Z}[1/N]$, pour $N \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, et fait intervenir des rayons de convergence aux places p -adiques, pour p divisant N . En outre, l'anneau $\mathbf{Z}$ peut être remplacé par n'importe quel anneau d'entiers de corps de nombres.

0.3. Applications

Que le lecteur ne s'y trompe pas, nous proposons ici un texte de fondement sur la théorie des espaces de Berkovich globaux, au contenu parfois aride et technique. En démontrant les résultats annoncés, nous franchissons une étape ingrate, mais nécessaire, pour établir la théorie sur des bases solides et la rendre utilisable, en l'état, dans divers domaines des mathématiques.

Comme indiqué plus haut, nous proposons, à la fin de ce texte, une première application de la théorie à des questions de noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques convergentes en plusieurs variables (*cf.* corollaire 8.6.12). Il s'agit d'un résultat original, dont l'énoncé est purement algébrique, et que nous démontrons ici par des méthodes élaborées, reposant de façon essentielle sur la théorie des espaces de Stein analytiques globaux développée au chapitre 8.

La théorie des espaces de Berkovich globaux se prête à bien d'autres applications dans des domaines variés. Nous en détaillons deux, que nous jugeons particulièrement emblématiques.

Dynamique analytique sur $\mathbf{Z}$

La théorie des systèmes dynamiques est bien établie dans le cas complexe et, depuis une vingtaine d'années, on assiste à l'apparition d'un analogue p -adique, sous la plume de nombreux auteurs. Nous renvoyons aux textes de survol [CCL10] et [Duc07a] pour des précisions et des références.

La question d'une théorie globale unifiant ces théories locales se pose désormais et, dans l'article [Poi22a], le second auteur en développe les premiers éléments. Les résultats présentés dans ce manuscrit y jouent un rôle fondamental, en particulier ceux concernant les morphismes finis et plats (*cf.* chapitre 5), nécessaires pour définir une notion de degré, et la connexité par arcs locale des espaces (*cf.* chapitre 7). Ils permettent de démontrer que l'on dispose, dans le cadre des espaces de Berkovich globaux, d'une bonne théorie des mesures de Radon, où l'on peut, par exemple, définir les images directe et réciproque par un morphisme fini et plat.

Le résultat principal de [Poi22a] énonce une propriété de continuité pour certaines mesures de Radon associées à des systèmes dynamiques. Son originalité réside dans le fait que, dans le cadre des espaces de Berkovich globaux, les mesures en question peuvent être supportées par des espaces de nature variée, complexe ou p -adique.

Rappelons que, pour tout corps valué complet k et toute fraction rationnelle non constante $\psi \in k(T)$, on peut définir une mesure de Radon μ_ψ sur l'espace de Berkovich $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ (qui n'est autre que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ si $k = \mathbf{C}$), dite mesure d'équilibre, essentiellement caractérisée par la propriété $\psi^* \mu_\psi = \deg(\psi) \mu_\psi$.

Théorème ([Poi22a, théorème A]). — *Soit Y un espace $\mathcal{A}$ -analytique global. Notons $X := Y \times_{\mathcal{A}} \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ la droite projective relative au-dessus de Y . Soit φ un endomorphisme polarisé de X au-dessus de Y .*

Pour tout point y de Y , l'endomorphisme φ induit un endomorphisme φ_y de la fibre $X_y \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)}^{1,\text{an}}$. Notons μ_{φ_y} la mesure d'équilibre associée, identifiée à son image sur X .

Alors la famille de mesures $(\mu_{\varphi_y})_{y \in Y}$ sur X est continue.

Ce résultat généralise un théorème démontré par C. Favre dans [Fav18], qui traite du cas particulier où la base Y est un disque hybride (mais autorise une dimension relative arbitraire).

Dans [Poi22b], le second auteur explore des conséquences arithmétiques du théorème de continuité précédent, en étudiant des points de torsion de courbes elliptiques, selon une stratégie empruntée à [DKY20]. Le système dynamique permettant d'établir le lien est celui associé à un morphisme de Lattès provenant de la multiplication par 2 sur une courbe elliptique, c'est-à-dire un morphisme L faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{[2]} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{L} & \mathbf{P}^1 \end{array},$$

où E est une courbe elliptique et π le quotient par $\{\pm 1\}$. Le résultat principal de l'article [Poi22b] est le suivant. Il résout par l'affirmative une conjecture due à F. Bogomolov, H. Fu et Yu. Tschinkel. Pour toute courbe elliptique E , on note $E[\infty]$ (resp. $E[2]$) l'ensemble de ses points de torsion (resp. de 2-torsion).

Théorème ([Poi22b, théorème A]). — *Il existe $M \in \mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour toutes courbes elliptiques E_a et E_b sur $\bar{\mathbf{Q}}$ et tous revêtements doubles $\pi_a: E_a \rightarrow \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{Q}}}^1$ et $\pi_b: E_b \rightarrow \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{Q}}}^1$ tels que $\pi_a(E_a[2]) \neq \pi_b(E_b[2])$, on ait*

$$\#(\pi_a(E_a[\infty]) \cap \pi_b(E_b[\infty])) \leq M.$$

L'apport des espaces de Berkovich sur $\mathbf{Z}$ dans la preuve du théorème est crucial en ce qu'il permet, par des résultats de continuité tel que celui de [Poi22a], de ramener l'étude du problème global à une étude, plus simple, au-dessus du point central de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Compactifications ultramétriques d'espaces complexes

Pour terminer cette introduction, présentons une autre application de la théorie des espaces de Berkovich globaux, cette fois-ci, dans le cas de l'anneau de base $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$. Elle concerne des questions de compactification de variétés analytiques complexes. Il s'agit d'un travail du second auteur en cours de rédaction (cf. [Poi19] pour une note introductive).

Soit X une variété algébrique complexe, c'est-à-dire un schéma séparé de type fini sur $\mathbf{C}$, et soit X^{h} son analytification au sens de la géométrie analytique complexe. Il existe souvent de nombreuses façons de compactifier X^{h} et certaines propriétés intéressantes de X , telles que la lissité, peuvent disparaître au cours du processus. Les résultats que nous exposons ici permettent

de remédier à ces défauts, pour peu que l'on s'autorise à quitter le monde des variétés complexes pour celui des espaces hybrides.

L'ingrédient principal de la construction est l'espace de Berkovich X^∞ introduit par A. Thuillier dans [Thu07]. C'est une partie fermée de l'analytification à la Berkovich $X_{\mathbf{C}^0}^{\text{an}}$ de X sur $\mathbf{C}^0$, le corps $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue triviale. A. Thuillier l'a utilisée de façon spectaculaire pour étudier le type d'homotopie du complexe dual associé à une compactification à croisements normaux de X (et notamment démontrer qu'il ne dépend pas de la compactification choisie).

En utilisant l'analytification $X_{\mathbf{C}^{\text{hyb}}}^{\text{an}}$ de X sur $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$, l'espace X^∞ , puis une procédure de normalisation, inspirée par le travail [Fan18] de L. Fantini sur les liens ultramétriques de singularités complexes, on construit un espace localement annelé $X^\natural$ dans lequel s'envoie naturellement X^h . L'espace $X^\natural$ possède localement une structure (non canonique) d'espace de Berkovich sur $\mathbf{C}^{\text{hyb}}$.

Théorème. — *Pour toute variété algébrique complexe X , l'espace $X^\natural$ est compact et l'application naturelle*

$$X^h \longrightarrow X^\natural$$

est une immersion ouverte. Le complémentaire de son image s'identifie à un quotient de X^∞ .

L'application $X \mapsto X^\natural$ est fonctorielle vis-à-vis des morphismes propres.

Remarquons que, $X^\natural$ étant construit à partir d'une analytification de X , il en hérite des propriétés : lissité⁽²⁾, interprétation modulaire s'il en existe, etc.

Les fonctions et faisceaux sur X et sur $X^\natural$ sont très proches, une propriété qui peut être rendue précise sous la forme d'un théorème GAGA. Pour l'énoncer, indiquons qu'il suit de la construction qu'à tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , on peut fonctoriellement associer un faisceau cohérent sur $X^\natural$, que nous noterons $\mathcal{F}^\natural$.

Théorème. — *Soit X une variété algébrique complexe. Le foncteur*

$$\mathcal{F} \in \text{Coh}(X) \longmapsto \mathcal{F}^\natural \in \text{Coh}(X^\natural)$$

est une équivalence de catégories.

⁽²⁾Nous renvoyons au travail [Ber23] de D. Berger pour la définition de morphisme lisse dans le cadre des espaces de Berkovich globaux.

Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout $q \in \mathbf{N}$, on a un isomorphisme naturel

$$H^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X^\nabla, \mathcal{F}^\nabla).$$

La théorie des espaces de Berkovich globaux développée dans ce manuscrit constitue un préliminaire indispensable à cette théorie de la compactification. Deux ingrédients y jouent un rôle prépondérant : le foncteur d’analytification (*cf.* chapitre 4), qui intervient dans la construction même des espaces X^∇ , et les résultats d’annulation cohomologiques (*cf.* chapitre 8), sur lesquels repose la preuve du théorème GAGA.

0.4. Prérequis

Ce texte est rédigé de façon à pouvoir servir d’introduction à la théorie des espaces de Berkovich globaux. Celle-ci trouve sa source dans le livre fondateur de Berkovich [Ber90] et les textes du second auteur [Poi10a, Poi13a]. Nous nous appuyons de façon essentielle sur ces références, dont nous utilisons parfois certains résultats sans les redémontrer, mais prenons soin de redéfinir toutes les notions inhérentes à la théorie des espaces de Berkovich globaux, afin que le manuscrit puisse être lu sans revenir aux textes sus-cités. Le chapitre 1 propose également un rappel des résultats principaux de [Poi10a, Poi13a].

Les espaces de Berkovich globaux mêlant espaces de Berkovich classiques (sur un corps valué ultramétrique) et espaces analytiques complexes, il est utile que le lecteur soit familier avec les rudiments de ces deux théories. Aucune connaissance poussée n’est nécessaire, le manuscrit traitant, pour l’essentiel, des propriétés de base des espaces globaux.

Pour les aspects analytiques complexes, nous renvoyons aux ouvrages classiques [GR09, GR84], ainsi qu’à [GR04] pour la théorie des espaces de Stein. Les méthodes utilisées dans ce texte empruntent largement à ces références, et le lecteur consultera avec profit les preuves qui y figurent, dans un cadre techniquement plus aisé.

Pour les aspects analytiques ultramétriques, nous renvoyons à l’ouvrage de Berkovich [Ber90]. Précisons que n’intervient dans ce manuscrit qu’une version simplifiée des espaces de Berkovich, définie de façon analogue aux espaces analytiques complexes, et non la version plus sophistiquée, héritée de la géométrie analytique rigide de John Tate (*cf.* [Tat71]), basée sur la théorie des

algèbres affinoïdes. Une connaissance approfondie de la théorie générale des espaces de Berkovich sur un corps valué n'est donc pas indispensable à la lecture de ce texte. En revanche, il est important de comprendre précisément la droite de Berkovich sur un corps valué, et particulièrement sa topologie, y compris lorsque le corps de base n'est pas algébriquement clos. Les textes introductifs [Tem15, PT21] peuvent ici apporter leur aide.

Attirons, une nouvelle fois, l'attention du lecteur sur le fait que, lorsqu'on choisit pour un anneau de Banach de base un corps valué ultramétrique, les espaces de Berkovich globaux considérés dans ce texte ne permettent pas de retrouver tous les espaces de Berkovich classiques, mais seulement ceux sans bord.

0.5. Remerciements

Le premier auteur tient tout particulièrement à remercier Antoine Ducros et Frédéric Paugam pour de nombreuses discussions stimulantes. Plusieurs résultats de ce texte ont pu voir le jour durant sa thèse grâce à leurs conseils et leurs remarques. Le second auteur remercie Dorian Berger pour ses nombreux commentaires. Les deux auteurs souhaitent également exprimer leur profonde gratitude à un rapporteur anonyme, qui a formulé de nombreuses suggestions pertinentes et contribué de façon significative à l'amélioration du manuscrit.

Une partie de ce texte a été rédigée pendant un séjour du second auteur à Francfort. Il remercie l'université Goethe et ses membres pour les excellentes conditions d'accueil dont il a bénéficié, ainsi que la Deutsche Forschungsgemeinschaft (TRR 326 Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures, project number 444845124) pour son soutien financier.

Les auteurs ont bénéficié du soutien de l'ANR (projet ANR JCJC « GLOBES » ANR-12-JS01-0007) et de l'ERC (projet ERC Starting Grant « TOSSIBERG » 637027).

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

Dans ce chapitre, nous présentons les bases de la géométrie analytique sur un anneau de Banach telle que développée par V. Berkovich dans le premier chapitre de son ouvrage fondateur [Ber90]. Nous rappelons également quelques résultats locaux démontrés par le second auteur dans [Poi10a] et [Poi13a].

Dans la section 1.1, nous introduisons la définition de spectre analytique d'un anneau de Banach. Nous en donnons plusieurs exemples fondamentaux, qui nous guideront dans toute la suite de ce texte : cas des corps valués, de l'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$, des anneaux d'entiers de corps de nombres, des corps hybrides, des anneaux de valuation discrète et des anneaux de Dedekind. Nous introduisons ensuite, dans la section 1.2, la définition d'espace affine analytique sur un anneau de Banach. Il s'agit d'un espace localement annelé. Les sections de son faisceau structural sont des fonctions que nous qualifierons d'analytiques.

Le reste du chapitre est constitué, pour la majeure partie, de rappels sur les travaux menés par le second auteur dans [Poi10a] et [Poi13a]. Nous commençons par des définitions et résultats techniques utiles. Dans la section 1.3, nous introduisons les parties spectralement convexes. Il s'agit de parties qui peuvent être naturellement identifiées à des spectres analytiques d'anneaux de Banach et nous les utiliserons constamment dans la suite. La section 1.4 est consacrée aux disques, couronnes et domaines polynomiaux. Nous y rappelons des résultats sur les fonctions globales sur les disques et les couronnes qui, comme on s'y attend, peuvent s'exprimer à l'aide de séries convergentes. La

section 1.5 contient une description précise de bases de voisinages des points de la droite affine analytique sur un anneau de Banach.

La section finale 1.6 est plus poussée. Nous y présentons quelques outils techniques essentiels pour la suite de notre étude, tels les théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Ils sont valables pour des anneaux de Banach qualifiés de basiques, dont nous rappelons la définition. Indiquons que tous les exemples mentionnés plus haut sont basiques. Afin d'obtenir des résultats locaux précis, nous distinguons différents types de points : points rigides, rigides épais ou localement transcendants. Nous concluons en rappelant les résultats principaux de [Poi13a] : noéthérianité et régularité des anneaux locaux, prolongement analytique, cohérence du faisceau structural.

1.1. Spectre analytique d'un anneau de Banach

Définition 1.1.1. — Une *norme* sur un anneau $\mathcal{A}$ est une application

$$\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $\forall a, b \in \mathcal{A}, \|a + b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} + \|b\|_{\mathcal{A}}$;
- ii) $\forall a \in \mathcal{A}, \|-a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}$;
- iii) $\forall a \in \mathcal{A}, \|a\|_{\mathcal{A}} = 0 \iff a = 0$.

Définition 1.1.2. — Une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ sur un anneau $\mathcal{A}$ est dite *sous-multiplicative* si, pour tout ensemble fini I et toute famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a

$$\left\| \prod_{i \in I} a_i \right\|_{\mathcal{A}} \leq \prod_{i \in I} \|a_i\|_{\mathcal{A}}.$$

Remarque 1.1.3. — Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Si $\mathcal{A} = 0$, l'unique norme définie sur $\mathcal{A}$ est la norme nulle et elle est sous-multiplicative.

Supposons que $\mathcal{A} \neq 0$. Soit $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{A}$. En appliquant la formule de la définition avec $I = \emptyset$, on obtient $\|1\|_{\mathcal{A}} \leq 1$. En l'appliquant avec $I = \{0, 1\}$ et $a_0 = a_1 = 1$, on obtient $\|1\|_{\mathcal{A}} \leq \|1\|_{\mathcal{A}}^2$, d'où l'on tire $\|1\|_{\mathcal{A}} \geq 1$, puis $\|1\|_{\mathcal{A}} = 1$.

Définition 1.1.4. — Un *anneau de Banach* est un couple $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ où $\mathcal{A}$ est un anneau et $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{A}$ pour laquelle il est complet.

Un *morphisme borné* entre anneaux de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{A}', \|\cdot\|_{\mathcal{A}'})$ est une application $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ telle qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \|\tau(a)\|_{\mathcal{A}'} \leq C \|a\|_{\mathcal{A}}.$$

Un *morphisme contractant* est un morphisme borné pour lequel on peut choisir la constante $C = 1$.

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ un anneau de Banach.

Définition 1.1.5 ([Ber90, §1.2]). — Le *spectre analytique* de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ est l'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ des semi-normes multiplicatives bornées sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications

$$|\cdot|: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $|0| = 0$ et $|1| = 1$;
- ii) $\forall a, b \in \mathcal{A}, |a + b| \leq |a| + |b|$;
- iii) $\forall a, b \in \mathcal{A}, |ab| = |a| |b|$;
- iv) $\forall a \in \mathcal{A}, |a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$.

On écrira souvent abusivement $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ au lieu de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

On munit $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie la plus grossière telle que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'application

$$\begin{aligned} a: \mathcal{M}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ |\cdot| &\longmapsto |a| \end{aligned}$$

soit continue.

Remarque 1.1.6. — On peut remplacer la condition iv) de la définition 1.1.5 par la condition apparemment plus faible

$$\text{iv}') \exists M \in \mathbf{R}_{\geq 0}, \forall a \in \mathcal{A}, |a| \leq M \|a\|_{\mathcal{A}}.$$

En effet, pour $a \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a alors $|a|^n = |a^n| \leq M \|a^n\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}^n$, d'où $|a| \leq M^{1/n} \|a\|_{\mathcal{A}}$, puis $|a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ en passant à la limite quand n tend vers l'infini.

Lemme 1.1.7. — Soit $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morphisme borné d'anneaux de Banach. Toute semi-norme multiplicative bornée sur $\mathcal{A}'$ induit, par composition avec τ , une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathcal{A}$.

L'application

$$\mathcal{M}(\tau): \mathcal{M}(\mathcal{A}') \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

ainsi définie est continue.

On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathcal{M}$ de la catégorie des anneaux de Banach muni des morphismes bornés vers celle des espaces topologiques. $\square$

Théorème 1.1.8 ([Ber90, theorem 1.2.1]). — Si $\mathcal{A} \neq 0$, alors $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est compact et non vide. $\square$

On pense généralement aux éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ comme à des points d'un espace et on les note x, y , etc. On note alors $|\cdot|_x, |\cdot|_y$, etc. les semi-normes sur $\mathcal{A}$ associées.

Définition 1.1.9. — Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. L'ensemble

$$\text{Ker}(x) := \{a \in \mathcal{A} : |a|_x = 0\}$$

est un idéal premier de $\mathcal{A}$.

La semi-norme $|\cdot|_x$ induit une valeur absolue sur l'anneau intègre $\mathcal{A}/\text{Ker}(x)$ et son corps de fractions $\text{Frac}(\mathcal{A}/\text{Ker}(x))$. On appelle *corps résiduel complété* de x le complété

$$\mathcal{H}(x) := \widehat{\text{Frac}(\mathcal{A}/\text{Ker}(x))}.$$

On notera simplement $|\cdot|$ la valeur absolue induite sur $\mathcal{H}(x)$, cela ne prêtant pas à confusion.

Pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, on a, par construction, un morphisme contractant naturel

$$\text{ev}_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}(x).$$

Pour $a \in \mathcal{A}$, on pose

$$a(x) := \text{ev}_x(a) \in \mathcal{H}(x).$$

On a alors

$$|a(x)| = |a|_x.$$

Lemme 1.1.10. — Soit $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morphisme borné d'anneaux de Banach. Soit $x' \in \mathcal{M}(\mathcal{A}')$ et posons $x := \mathcal{M}(\tau)(x')$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$|\tau(a)(x')| = |a(x)|.$$

Le morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x')$, obtenu en composant par τ le morphisme d'évaluation $\text{ev}_{x'} : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{H}(x')$, se factorise par un morphisme de corps isométrique

$$\tau_{x',x} : \mathcal{H}(x) \longrightarrow \mathcal{H}(x').$$

$\square$

Définition 1.1.11. — On définit la *semi-norme spectrale* $\|\cdot\|_{\mathcal{A},\text{sp}}$ sur $\mathcal{A}$ associée à $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ par

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \|a\|_{\mathcal{A},\text{sp}} := \inf_{n \geq 1} (\|a^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n}).$$

On dit que $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ou $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, voire $\mathcal{A}$ par abus, est *uniforme* si $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} = \|\cdot\|_{\mathcal{A},\text{sp}}$.

Lemme 1.1.12 ([Ber90, theorem 1.3.1]). — Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\|a\|_{\mathcal{A},\text{sp}} = \max_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} (|a(x)|).$$

□

Remarque 1.1.13. — Notons $\hat{\mathcal{A}}$ le séparé complété de $\mathcal{A}$ pour la semi-norme spectrale $\|\cdot\|_{\mathcal{A},\text{sp}}$. Le morphisme de complétion $\mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ est contractant. L'application associée entre les spectres

$$\mathcal{M}(\hat{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

est un homéomorphisme qui induit des isomorphismes isométriques entre les corps résiduels complétés.

Nous allons maintenant dresser une liste d'exemples à laquelle nous nous référerons constamment par la suite. Ce sont eux qui motivent le développement de la théorie. Introduisons, au préalable, quelques notations.

Notation 1.1.14. — On note $|\cdot|_{\infty}$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{C}$. On note identiquement sa restriction aux sous-anneaux de $\mathbf{C}$: $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, etc.

Pour tout nombre premier p , on note $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique sur $\mathbf{Q}_p$ normalisée par la condition $|p|_p = p^{-1}$. On note identiquement sa restriction aux sous-anneaux de $\mathbf{Q}_p$.

Pour tout anneau A , on note $|\cdot|_0$ la *valeur absolue triviale* sur A :

$$\begin{aligned} |\cdot|_0: \quad \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ajoutons un lemme technique utile.

Lemme 1.1.15. — Soient k un corps et $|\cdot|$ et $|\cdot|'$ deux valeurs absolues sur k . Supposons que $|\cdot|'$ n'est pas triviale et que

$$\forall a \in k, \quad |a|' > 1 \implies |a| \geq |a|'$$

Alors il existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que $|\cdot|' = |\cdot|^{\varepsilon}$.

Démonstration. — Puisque $|\cdot|'$ n'est pas triviale, il existe $a \in k$ tel que $|a|' > 1$. Par hypothèse, on a $|a| \geq |a|'$, donc il existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que $|a'| = |a|^\varepsilon$.

Soit $b \in k^*$. Soient $n \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{N}^*$ tels que $|b|' > (|a|')^{n/m}$. On a alors $|b^m/a^n|' > 1$, donc $|b^m/a^n| > 1$, puis $|b| > |a|^{n/m}$ et finalement $|b|^\varepsilon > (|a|')^{n/m}$. En utilisant la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, on en déduit que $|b|^\varepsilon \geq |b|'$. En appliquant ce résultat à l'inverse de b , on obtient $|b|^\varepsilon \leq |b|'$, d'où $|b|^\varepsilon = |b|'$. $\square$

Exemple 1.1.16. — Soit k un corps et $|\cdot|$ une valeur absolue (archimédienne ou non) pour laquelle il est complet. Alors $(k, |\cdot|)$ est un anneau de Banach uniforme et son spectre analytique $\mathcal{M}(k)$ est réduit à un point, correspondant à $|\cdot|$.

Exemple 1.1.17. — L'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$ est un anneau de Banach uniforme. La description de son spectre analytique découle du théorème d'Ostrowski. Nous l'explicitons ci-dessous.

Le spectre $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ revêt la forme d'une étoile : il possède un point central a_0 , qui correspond à la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$, et une infinité de branches, indexées par les nombres premiers et la place infinie.

Soit p un nombre premier. Définissons la semi-norme

$$\begin{aligned} |\cdot|_p^{+\infty} : \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \pmod{p} ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

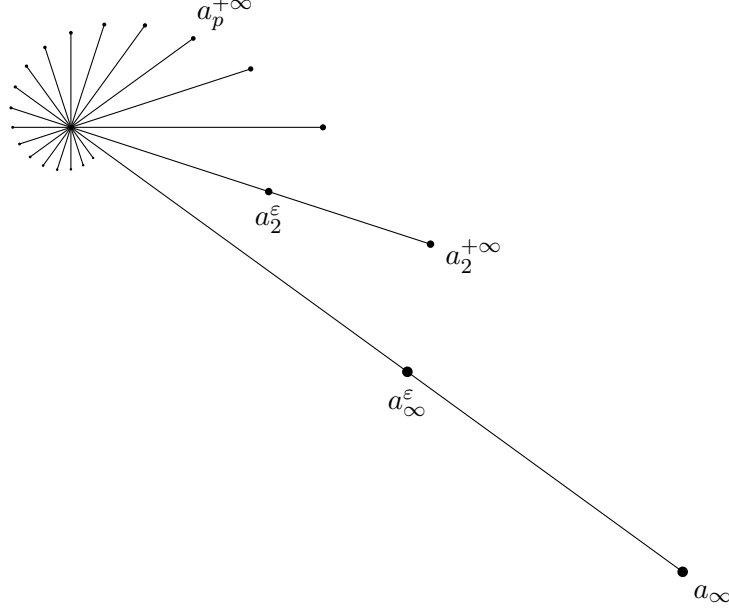
Pour tout $\varepsilon \in]0, +\infty]$, notons a_p^ε le point de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ associé à $|\cdot|_p^\varepsilon$. Posons $a_p^0 := a_0$. L'application $\varepsilon \in]0, +\infty] \mapsto a_p^\varepsilon$ réalise alors un homéomorphisme sur la branche associée à p .

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, notons a_∞^ε le point de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ associé à $|\cdot|_\infty^\varepsilon$. Posons $a_\infty^0 := a_0$. L'application $\varepsilon \in [0, 1] \mapsto a_\infty^\varepsilon$ réalise alors un homéomorphisme sur la branche associée à la place infinie.

Indiquons également que tout voisinage de a_0 contient entièrement toutes les branches à l'exception d'un nombre fini.

La figure 4 contient une représentation d'un plongement (non canonique) de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ dans $\mathbf{R}^2$ respectant la topologie.

Les parties compactes et connexes de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ peuvent également s'exprimer comme des spectres. Plus précisément, soit V une partie compacte et connexe de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Notons S_V l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}$ qui ne s'annulent pas sur V . Posons $\mathcal{K}(V) := S_V^{-1}\mathbf{Z}$ et notons $\mathcal{B}(V)$ le séparé complété de $\mathcal{K}(V)$.

FIGURE 4. Le spectre de Berkovich $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

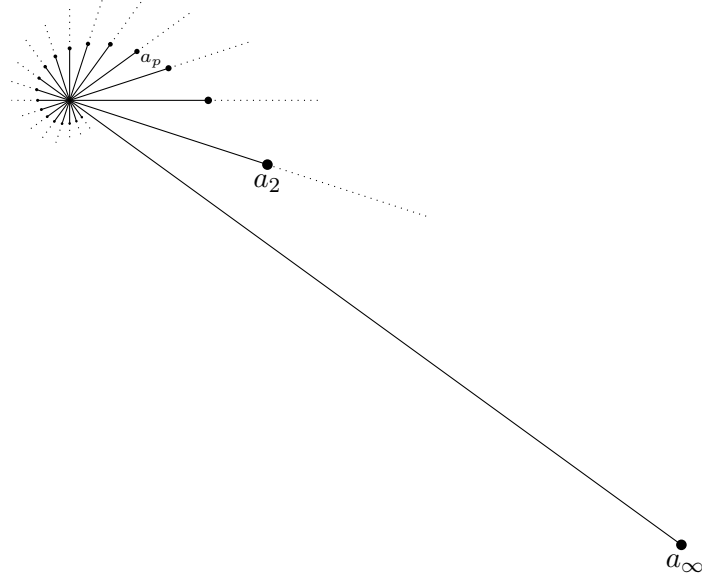
pour la semi-norme uniforme $\|\cdot\|_V$ sur V . (Nous retrouverons ces définitions plus tard dans un cadre plus général, *cf.* définition 1.2.10 et notation 1.3.3). Le spectre $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ s'identifie alors naturellement à V , d'après [Poi10a, proposition 3.1.16] (ce qui signifie que le compact V est spectralement convexe au sens de la définition 1.3.8).

Pour proposer un exemple plus concret, considérons la partie N de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ qui est l'enveloppe convexe des valeurs absolues normalisées, autrement dit

$$\begin{aligned} N &= \left\{ x \in \mathcal{M}(\mathbf{Z}) : \forall p \in \mathcal{P}, |p(x)| \geq \frac{1}{p} \right\} \\ &= [a_0, a_\infty] \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}} [a_0, a_p], \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. On a alors $S_N = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\mathcal{K}(N) = \mathbf{Q}$, $\|\cdot\|_N = \max\{|\cdot|_\infty, |\cdot|_p : p \in \mathcal{P}\}$ et $\mathcal{B}(N) = \mathbf{Q}$.

L'ensemble N est représenté à la figure 5. Il nous semble mériter considération et posséder des propriétés intéressantes. On peut, par exemple, remarquer que la série exponentielle est définie et convergente dans un disque relatif de rayon strictement positif au-dessus de N .

FIGURE 5. Le compact N de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Exemple 1.1.18. — Soit K un corps de nombres. Notons Σ_∞ l'ensemble des places infinies de K , vues comme classes de conjugaison de plongements complexes. Alors, l'anneau des entiers A de K muni de la norme

$$\|\cdot\|_A := \max_{\sigma \in \Sigma_\infty} (|\sigma(\cdot)|_\infty)$$

est un anneau de Banach uniforme. Les descriptions et résultats de l'exemple 1.1.17 valent encore dans ce cadre, *mutatis mutandis*.

En ce qui concerne le spectre $\mathcal{M}(A)$, par exemple, il possède un point central a_0 , correspondant à la valeur absolue triviale, et une infinité de branches qui en jaillissent : une pour chaque idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A (dont les points seront notés $a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon$ avec $\varepsilon \in [0, +\infty]$) et une pour chaque place infinie σ de K (dont les points seront notés a_σ^ε avec $\varepsilon \in [0, 1]$). Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur à [Poi10a, §3.1].

Exemple 1.1.19. — Soit k un corps muni d'une valeur absolue non triviale $|\cdot|$ (pour laquelle il n'est pas nécessairement complet). Posons $\|\cdot\| := \max(|\cdot|, |\cdot|_0)$. Alors $(k, \|\cdot\|)$ est un anneau de Banach uniforme. Nous l'appellerons *corps hybride* associé à k et le noterons k^{hyb} .

L'application

$$\varepsilon \in [0, 1] \mapsto |\cdot|^\varepsilon \in \mathcal{M}(k^{\text{hyb}})$$

est un homéomorphisme.

Le seul point qui n'est pas immédiat est la surjectivité. Soit x un point de $\mathcal{M}(k^{\text{hyb}})$ associé à une valeur absolue $|\cdot|_x$ non triviale. Par définition du spectre, pour tout $a \in k$, on a $|a|_x \leq |a|$. Le lemme 1.1.15 assure alors que x appartient bien à l'image de l'application ci-dessus.

Cet exemple apparaît notamment lorsque l'on souhaite étudier des dégénérescences de familles de variétés sur k . Il a été introduit par V. Berkovich dans [Ber09] pour $k = \mathbf{C}$.

Exemple 1.1.20. — Soit R un anneau de valuation discrète complet et v la valuation associée. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R . Soit $r \in]0, 1[$ et posons $|\cdot| := r^{v(\cdot)}$. Alors $(R, |\cdot|)$ est un anneau de Banach uniforme.

Définissons la semi-norme

$$\begin{aligned} |\cdot|^{+\infty}: \quad R &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ a &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } a \in \mathfrak{m} ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

L'application

$$\varepsilon \in [1, +\infty] \mapsto |\cdot|^\varepsilon \in \mathcal{M}(R)$$

est alors un homéomorphisme.

Le seul point qui n'est pas immédiat est la surjectivité. Soit $x \in \mathcal{M}(R)$. Le noyau $\text{Ker}(x)$ de la semi-norme $|\cdot|_x$ associée à x est un idéal premier de R . Il est donc égal soit à (0) , soit à $\mathfrak{m}$.

Supposons que $\text{Ker}(x) = (0)$. Alors la semi-norme $|\cdot|_x$ est une valeur absolue et elle s'étend par multiplicativité en une valeur absolue sur $\text{Frac}(R)$. Soit $a \in \text{Frac}(R)$ tel que $|a| > 1$. Alors, on a $a^{-1} \in R$, donc $|a^{-1}|_x \leq |a^{-1}|$, d'où $|a|_x \geq |a|$. Le lemme 1.1.15 assure alors qu'il existe $\eta \in]0, 1]$ tel que $|\cdot| = |\cdot|_x^\eta$.

Supposons que $\text{Ker}(x) = \mathfrak{m}$. Alors $R/\text{Ker}(x)$ est un corps valué dont la valeur absolue est bornée par 1. Cette dernière est donc triviale. On en déduit que $|\cdot|_x = |\cdot|^{+\infty}$. Ceci conclut la preuve.

Exemple 1.1.21. — Soit R un anneau de Dedekind. Munissons-le de la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$. Alors $(R, |\cdot|_0)$ est un anneau de Banach uniforme. Nous le noterons R^{triv} .

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de R . Notons $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation associée à cet idéal. Pour tout $r \in]0, 1[$, posons $|\cdot|_{\mathfrak{p},r} := r^{v_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$. Définissons également la semi-norme

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathfrak{p},0}: R &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ a &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } a \in \mathfrak{p} ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a une application injective $\lambda_{\mathfrak{p}}: r \in [0, 1[\mapsto |\cdot|_{\mathfrak{p},r} \in \mathcal{M}(R^{\text{triv}})$.

Soit $s \in]0, 1[$. Posons $V_{\mathfrak{p},s} := \{x \in \mathcal{M}(R^{\text{triv}}) : \forall a \in \mathfrak{p}, |a(x)| \leq s\}$. Notons $R_{\mathfrak{p},s}$ le complété de $R_{\mathfrak{p}}$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p},s}$. Le morphisme borné naturel $R \rightarrow R_{\mathfrak{p},s}$ induit un homéomorphisme $\mu_{\mathfrak{p},s}: \mathcal{M}(R_{\mathfrak{p},s}) \rightarrow V_{\mathfrak{p},s}$. Seule la surjectivité requiert une preuve. Elle repose sur le fait que toute semi-norme associée à un point de $V_{\mathfrak{p},s}$ est bornée par $|\cdot|_{\mathfrak{p},s}$ et s'étend donc à $R_{\mathfrak{p},s}$. En utilisant l'exemple 1.1.20, on en déduit que l'application $\lambda_{\mathfrak{p}}$ induit un homéomorphisme entre $[0, s]$ et $V_{\mathfrak{p},s}$.

Posons $U_{\mathfrak{p}} := \{x \in \mathcal{M}(R^{\text{triv}}) : \forall a \in \mathfrak{p}, |a(x)| < 1\}$. Puisque l'idéal $\mathfrak{p}$ est de type fini, on a $U_{\mathfrak{p}} = \bigcup_{s \in]0, 1[} V_{\mathfrak{p},s}$. Le résultat précédent montre que $\lambda_{\mathfrak{p}}$ induit un homéomorphisme entre $[0, 1[$ et $U_{\mathfrak{p}}$.

Notons $\lambda: \bigsqcup_{\mathfrak{p} \neq (0)} [0, 1[\rightarrow \mathcal{M}(R^{\text{triv}})$ l'application induite par les $\lambda_{\mathfrak{p}}$. C'est un homéomorphisme sur son image. Pour tout point x de $\mathcal{M}(R^{\text{triv}})$, $\{a \in R : |a(x)| < 1\}$ est un idéal premier de R , non nul si x ne correspond pas à $|\cdot|_0$. Par conséquent, l'image de λ est égale à $\mathcal{M}(R^{\text{triv}}) \setminus \{|\cdot|_0\}$. Puisque $\mathcal{M}(R^{\text{triv}})$ est compact, il s'ensuit que $\mathcal{M}(R^{\text{triv}})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $\bigsqcup_{\mathfrak{p} \neq (0)} [0, 1[$, le point $|\cdot|_0$ correspondant au point à l'infini.

Dans le cas où $R = \mathbf{Z}$, on peut identifier le spectre de $\mathbf{Z}^{\text{triv}}$ à une partie du spectre de $\mathbf{Z}$, comme représenté sur la figure 6. Cette identification reste valable dans le cas où R est un anneau d'entiers de corps de nombres.

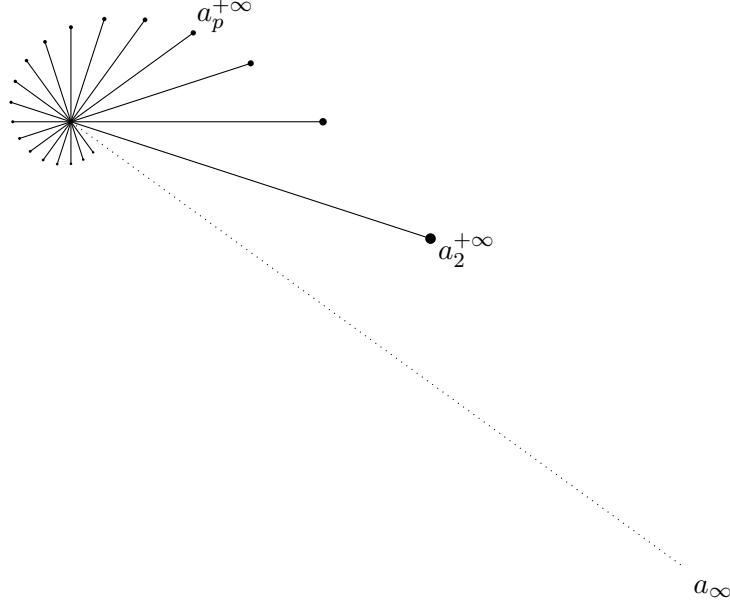
Nous allons maintenant formuler des définitions abstraites inspirées par les caractéristiques topologiques des exemples précédents.

Notation 1.1.22. — Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On note

$$I_x := \{\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} : |\cdot|_x^{\varepsilon} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels $\varepsilon > 0$ tels que l'application $|\cdot|_x^{\varepsilon}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ soit une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathcal{A}$. L'ensemble I_x est un intervalle de $\mathbf{R}_{>0}$.

Pour $\varepsilon \in I_x$, on note x^{ε} le point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ associé à $|\cdot|_x^{\varepsilon}$.

FIGURE 6. Le spectre de Berkovich $\mathcal{M}(\mathbf{Z}^{\text{triv}})$.

Définition 1.1.23. — Une partie V de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite *linéaire* s'il existe une partie V^∂ de V , un point x de V et un intervalle $I \subset I_x$ non réduit à un point satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) V^∂ est contenue dans le bord de V et $\#V^\partial \leq 2$;
- ii) l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & V \setminus V^\partial \\ \varepsilon & \longmapsto & x^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Le spectre $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dit *linéaire* s'il est une partie linéaire de lui-même.

Exemple 1.1.24. — Les spectres des corps hybrides (cf. exemple 1.1.19) et des anneaux de valuation discrète (cf. exemple 1.1.20) sont linéaires.

Définition 1.1.25. — Une partie V de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite *d'Ostrowski* s'il existe un point a_0 de V , un ensemble dénombrable non vide (éventuellement fini) Σ et une famille $(V_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ de parties disjointes de $V \setminus \{a_0\}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) $V = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma \cup \{a_0\}$;
- ii) pour tout $\sigma \in \Sigma$, V_σ et $V_\sigma \cup \{a_0\}$ sont des parties linéaires de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$;

iii) l'ensemble des parties de la forme

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} V'_\sigma \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'} V_\sigma,$$

où Σ' est un sous-ensemble fini de Σ et, pour tout $\sigma \in \Sigma'$, V'_σ est un voisinage de a_0 dans $V_\sigma \cup \{a_0\}$, est une base de voisinages de a_0 dans V .

Le spectre $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dit *d'Ostrowski* s'il est une partie d'Ostrowski de lui-même.

Exemple 1.1.26. — Le spectre de $\mathbf{Z}$ et les spectres des anneaux d'entiers de corps de nombres (*cf.* exemple 1.1.17) sont d'Ostrowski, ainsi que les spectres des anneaux de Dedekind trivialement valués (*cf.* exemple 1.1.21).

1.2. Espace affine analytique sur un anneau de Banach

On peut adapter la définition de spectre analytique pour définir des espaces affines analytiques. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ un anneau de Banach et soit $n \in \mathbf{N}$.

Définition 1.2.1 ([Ber90, définition 1.5.1]). — L'espace affine analytique de dimension n sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ est l'ensemble $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ bornées sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications

$$|\cdot| : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $|0| = 0$ et $|1| = 1$;
- ii) $\forall P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n], |P + Q| \leq |P| + |Q|$;
- iii) $\forall P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n], |PQ| = |P| |Q|$;
- iv) $\forall a \in \mathcal{A}, |a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$.

On munit $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ de la topologie de la convergence simple.

Remarque 1.2.2. — L'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{0, \text{an}}$ n'est autre que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Comme dans le cas de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, pour tout point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, on note $|\cdot|_x$ la semi-norme sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ associée. On définit également un corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ et un morphisme d'évaluation

$$\text{ev}_x : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathcal{H}(x).$$

Pour $f \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, on pose

$$f(x) := \text{ev}_x(f) \in \mathcal{H}(x).$$

Remarque 1.2.3. — Soit $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morphisme borné d'anneaux de Banach. Les constructions des lemmes 1.1.7 et 1.1.10 se généralisent immédiatement au cadre des espaces affines analytiques.

On définit ainsi une application continue

$$\mathbf{A}_\tau^{n,\text{an}}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}'}^{n,\text{an}} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$$

et, pour tout $x' \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}'}^{n,\text{an}}$, un morphisme de corps isométrique

$$\tau_{x',x}: \mathcal{H}(x) \longrightarrow \mathcal{H}(x'),$$

où $x := \mathbf{A}_\tau^{n,\text{an}}(x')$.

Lorsque τ est le morphisme de complétion $\mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ (cf. remarque 1.1.13), l'application associée

$$\mathbf{A}_{\hat{\mathcal{A}}}^{n,\text{an}} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$$

est un homéomorphisme qui induit des isomorphismes isométriques entre les corps résiduels complétés.

Définition 1.2.4. — Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. On dit que le point x est *ultramétrique* si $|\cdot|_x$ est ultramétrique :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad |a + b|_x \leq \max(|a|_x, |b|_x).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point x est *archimédien*.

Soit V une partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. On appelle *partie ultramétrique* de V l'ensemble

$$V_{\text{um}} := \{x \in V : x \text{ est ultramétrique}\}.$$

On appelle *partie archimédienne* de V l'ensemble

$$V_{\text{arc}} := \{x \in V : x \text{ est archimédienne}\}.$$

Remarque 1.2.5. — On a $V = V_{\text{um}} \sqcup V_{\text{arc}}$.

Un résultat classique assure qu'un point $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est ultramétrique si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad |n|_x \leq 1.$$

Il s'ensuit que V_{um} et V_{arc} sont respectivement fermée et ouverte dans V .

Les possibilités pour les corps résiduels complétés en les points archimédiens sont très limitées. Il s'agit là encore d'un résultat classique (cf. [Bou06b, VI, §6, n° 6, théorème 2] par exemple). Rappelons que l'on note $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Théorème 1.2.6. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué archimédien complet. Alors, il existe un corps K égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, un isomorphisme $j: k \xrightarrow{\sim} K$ et un nombre réel $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que

$$\forall a \in k, |a| = |j(a)|_\infty^\varepsilon.$$

Notation 1.2.7. — Pour tout $x \in (\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}})_{\text{arc}}$, on note $\varepsilon(x)$ l'unique élément de $]0, 1]$ tel que la valeur absolue canonique sur $\mathcal{H}(x)$ s'identifie à $|\cdot|_\infty^{\varepsilon(x)}$ via l'isomorphisme entre $\mathcal{H}(x)$ et $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ fourni par le théorème 1.2.6.

Lemme 1.2.8. — L'application $\varepsilon: (\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}})_{\text{arc}} \rightarrow]0, 1]$ est continue.

Démonstration. — Pour tout $x \in (\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}})_{\text{arc}}$, on a $\varepsilon(x) = \log(|2(x)|)/\log(2)$. Or, l'application $|2|$ est continue, par définition de la topologie. Le résultat s'ensuit. $\square$

Munissons maintenant $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ d'un faisceau structural.

Notation 1.2.9. — Pour toute partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, on note $\|\cdot\|_V$ la *semi-norme uniforme* sur V , c'est-à-dire la semi-norme définie par

$$\forall P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n], \|P\|_V = \max_{x \in V} (|P(x)|).$$

Définition 1.2.10. — Pour toute partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, posons

$$S_V := \{P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] : \forall x \in V, |P(x)| \neq 0\}.$$

Les éléments de l'anneau

$$\mathcal{K}(V) := S_V^{-1} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$$

sont appelées *fractions rationnelles sans pôles sur V* .

La semi-norme $\|\cdot\|_V$ sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ s'étend en une semi-norme sur $\mathcal{K}(V)$. Pour tout $x \in V$, l'application d'évaluation $\text{ev}_x: \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$ s'étend à $\mathcal{K}(V)$. Pour $f \in \mathcal{K}(V)$, on pose $f(x) := \text{ev}_x(f) \in \mathcal{H}(x)$.

Définition 1.2.11 ([Ber90, définition 1.5.1]). — Le *faisceau structural* sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est le faisceau d'anneaux qui à tout ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ associe l'ensemble des applications

$$f: U \longrightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i) pour tout $x \in U$, on a $f(x) \in \mathcal{H}(x)$;

- ii) f est localement limite uniforme de fractions rationnelles sans pôles, au sens où, pour tout $x \in U$, il existe un voisinage compact V de x dans U et une suite $(R_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{K}(V)$ qui converge vers $f|_V$ pour $\|\cdot\|_V$.

Le caractère local de la définition assure que l'on obtient bien ainsi un faisceau.

Nous le noterons $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}}$ ou simplement $\mathcal{O}$.

Lemme 1.2.12. — Soit $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morphisme borné d'anneaux de Banach.

Soit U un ouvert de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et soit $f: U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x)$ une application. Posons $U' := (\mathbf{A}_{\tau}^{n,\text{an}})^{-1}(U)$ et notons

$$(\mathbf{A}_{\tau}^{n,\text{an}})^* f: (\mathbf{A}_{\tau}^{n,\text{an}})^{-1}(U) \longrightarrow \bigsqcup_{x' \in U'} \mathcal{H}(x')$$

l'application obtenue en composant f par $\mathbf{A}_{\tau}^{n,\text{an}}$ et les $\tau_{x',x}$ (cf. remarque 1.2.3). Si f appartient à $\mathcal{O}(U)$, alors $(\mathbf{A}_{\tau}^{n,\text{an}})^* f$ appartient à $\mathcal{O}(U')$.

On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathbf{A}_{\bullet}^{n,\text{an}}$ de la catégorie des anneaux de Banach muni des morphismes bornés vers celle des espaces localement annelés. $\square$

Remarque 1.2.13. — Considérons le cas particulier du lemme 1.2.12 où le morphisme τ est le morphisme de complétion $\mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$. D'après la remarque 1.2.3, l'application induite entre les espaces affines analytiques préserve les espaces topologiques et les corps résiduels complétés. On en déduit que le morphisme d'espaces localement annelés induit

$$\mathbf{A}_{\hat{\mathcal{A}}}^{n,\text{an}} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$$

est un isomorphisme.

Rappelons que les espaces affines analytiques sur les corps valués archimédiens complets sont très proches des espaces analytiques complexes usuels (cf. [Ber90, §1.5.4]).

Lemme 1.2.14. — Munissons $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ d'une puissance de la valeur absolue usuelle. On a alors des isomorphismes d'espaces localement annelés naturels

$$\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}} \simeq \mathbf{C}^n \text{ et } \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\text{an}} \simeq \mathbf{C}^n / \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}).$$

$\square$

Remarque 1.2.15. — Soit U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ contenu dans la partie archimédienne. On a alors un morphisme injectif canonique

$$\gamma_{\mathbf{R}}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{O}(U).$$

En effet, le morphisme $\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ induit un morphisme $\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}(U)$ et on vérifie que ce dernier s'étend à $\mathbf{Q}$ puis à $\mathbf{R}$.

Lemme 1.2.16. — *Pour tout ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et tout élément f de $\mathcal{O}(U)$, l'application*

$$\begin{aligned} |f|: \quad U &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto |f(x)| \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. — Si f est un polynôme, le résultat découle de la définition de la topologie. On en déduit le résultat pour les fractions rationnelles sans pôles, puis pour des fonctions arbitraires, la continuité étant préservée par limite uniforme. $\square$

Le résultat suivant découle directement des définitions.

Lemme 1.2.17. — *Pour tout point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, le germe $\mathcal{O}_x$ est un anneau local. Son idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ est constitué des fonctions qui s'annulent au point x . Le corps $\kappa(x) := \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ est un sous-corps dense de $\mathcal{H}(x)$.* $\square$

Définition 1.2.18. — On appelle *projection sur la base* le morphisme d'espaces localement annelés

$$\pi_n: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

induit par le morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$.

Plus généralement, pour tout $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle *projection sur les m premières coordonnées* le morphisme d'espaces localement annelés

$$\pi_{n,m}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$$

induit par le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_m] \rightarrow \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$.

On verra plus loin que les projections sont des morphismes analytiques (cf. exemple 2.1.5).

Le résultat suivant s'obtient sans peine à partir des définitions.

Lemme 1.2.19. — *Pour tout $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $y \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$, on a un homéomorphisme naturel*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{n-m,\text{an}} \xrightarrow{\sim} \pi_{n,m}^{-1}(y).$$

$\square$

Terminons par un résultat topologique qui nous sera utile dans la suite. Un cas particulier (dans le cas où $\mathcal{A}$ est un anneau d'entiers de corps de nombres)

figure dans [Poi10a, proposition 3.4.1] et la démonstration s'étend sans peine au cas général.

Notation 1.2.20. — Soit $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Pour tout $x \in \pi_n^{-1}(b)$ et tout $\varepsilon \in I_b$, l'application $|\cdot|_x^\varepsilon$ est une semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ bornée sur $\mathcal{A}$. On note x^ε le point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ associé.

Lemme 1.2.21. — Soit $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. L'application

$$\begin{aligned} \pi_n^{-1}(b) \times I_b &\longrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \\ (x, \varepsilon) &\longmapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

réalise un homéomorphisme sur son image. $\square$

1.3. Parties rationnelles et spectralement convexes

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach et soit $n \in \mathbf{N}$.

Définition 1.3.1. — On dit qu'une partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est *rationnelle* s'il existe $P_1, \dots, P_p, Q \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ ne s'annulant pas simultanément sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \{x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} : |P_i(x)| \leq r_i |Q(x)|\}.$$

On dit qu'une partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est *pro-rationnelle* si elle est intersection de parties compactes rationnelles.

Exemple 1.3.2. — Tout point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est une partie pro-rationnelle. En effet, pour tout $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, on a

$$\{x\} = \bigcap_{P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]} \{y \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} : |P(y)| = |P(x)|\}.$$

Un calcul classique (cf. [BGR84, proposition 7.2.3/7]) montre qu'une intersection finie de parties compactes rationnelles est encore compacte rationnelle. Il suit alors de la définition de la topologie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ que tout point possède une base de voisinages formée de parties compactes rationnelles.

Notation 1.3.3. — Pour toute partie compacte non vide V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, on note $\mathcal{B}(V)$ le séparé complété de $\mathcal{K}(V)$ pour la semi-norme uniforme $\|\cdot\|_V$ sur V .

C'est un anneau de Banach uniforme.

Exemple 1.3.4. — Pour tout point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, on a $\mathcal{B}(\{x\}) = \mathcal{H}(x)$.

Lemme 1.3.5. — Soit V une partie compacte de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach uniforme et soit $f: \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres tel que l'image du morphisme induit $\varphi: \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ soit contenue dans V . Alors, il existe un unique morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres borné $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{B}(V) & & \end{array}$$

Démonstration. — Soit $P \in S_V$. Pour tout $y \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$, on a $|f(P)(y)| = |P(\varphi(y))| \neq 0$ car $\varphi(y) \in V$. On en déduit que $f(P)$ est inversible dans $\mathcal{B}$, d'après [Ber90, theorem 1.2.1]. Par conséquent, f s'étend en un morphisme

$$f': \mathcal{K}(V) = S_V^{-1} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathcal{B},$$

et ce de façon nécessairement unique.

Soient $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ et $Q \in S_V$. Pour tout $y \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$, on a

$$\left| f' \left(\frac{P}{Q} \right) (y) \right| = \frac{|f(P)(y)|}{|f(Q)(y)|} = \frac{|P(\varphi(y))|}{|Q(\varphi(y))|} = \left| \frac{P}{Q}(\varphi(y)) \right|.$$

Puisque $\mathcal{B}$ est uniforme et que l'image de φ est contenue dans V , on en déduit que $\|f'(P/Q)\| \leq \|P/Q\|_V$. Par conséquent, le morphisme f' se prolonge en un morphisme borné $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}$, et ce de façon unique. $\square$

Remarquons que, pour toute partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, le morphisme naturel $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(V)$ induit un morphisme d'espaces annelés $\varphi_V: \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$.

Notation 1.3.6. — Soient T un espace topologique et V une partie de T . On note $\mathring{V}$ l'intérieur de V dans T .

Théorème 1.3.7 ([Poi10a, théorème 1.2.11]). — Soit V une partie compacte pro-rationnelle de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Alors le morphisme φ_V induit

- i) un homéomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \xrightarrow{\sim} V$;
- ii) un isomorphisme d'espaces annelés $\varphi_V^{-1}(\mathring{V}) \xrightarrow{\sim} \mathring{V}$.

$\square$

Définition 1.3.8. — On dit qu'une partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est *spectralement convexe* si elle satisfait les conclusions du théorème 1.3.7.

Proposition 1.3.9 ([Poi10a, remarque 1.2.13]). — Une partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est spectralement convexe si, et seulement si, l'image de φ_V est contenue dans V . $\square$

Corollaire 1.3.10. — L'ensemble des parties compactes spectralement convexes de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est stable par intersection. $\square$

À l'aide du lemme 1.3.5, nous en déduisons une autre caractérisation des parties spectralement convexes.

Proposition 1.3.11. — Soit V une partie compacte de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) V est spectralement convexe ;
- ii) pour toute $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach uniforme $\mathcal{B}$ et tout morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres $f: \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}$, l'image du morphisme induit $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est contenue dans V si, et seulement si, il existe un unique morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres borné $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{B}(V) & & \end{array}$$

$\square$

Remarque 1.3.12. — Nous ne disposons pas de notion de domaine affinoïde dans notre cadre, mais celle de partie spectralement convexe pourra parfois jouer ce rôle. La propriété universelle ii) qui figure dans la proposition 1.3.11 est proche de celle qui définit les domaines affinoïdes (cf. [Ber90, définition 2.2.1]), avec cependant la différence notable que l'on considère uniquement des morphismes à valeurs dans des algèbres de Banach uniformes. Notons que, lorsque l'anneau de Banach $\mathcal{A}$ est un corps valué, de nombreuses parties spectralement convexes (fermés de Zariski, points, etc.) ne sont pas nécessairement des domaines affinoïdes.

Remarque 1.3.13. — Soit $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et considérons le morphisme de projection sur les m premières coordonnées $\pi_{n,m}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$ (cf. définition 1.2.18). Soit V un ensemble compact spectralement convexe de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. D'après [Poi10a, proposition 1.2.15], on a un homéomorphisme naturel

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}(V)}^{n-m,\text{an}} \xrightarrow{\sim} \pi_{n,m}^{-1}(V)$$

et même un isomorphisme d'espaces annelés au-dessus de $\mathring{V}$.

Ce résultat se révèle très utile dans les démonstrations par récurrence sur la dimension. Par exemple, si l'on souhaite étudier une propriété locale en un point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, il permet de se ramener au cas d'un point x' de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{1,\text{an}}$, où $\mathcal{B}$ est un anneau de Banach de la forme $\mathcal{B}(V)$ pour un voisinage compact spectralement convexe de $\pi_{n,n-1}(x)$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$.

1.4. Disques, couronnes et domaines polynomiaux

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$, avec coordonnée T . Notons $\pi: X \rightarrow B$ la projection sur la base.

Notation 1.4.1. — Soit V une partie de B . Soient $P \in \mathcal{A}[T]$ et $s, t \in \mathbf{R}$. On pose

$$\begin{aligned} D_V(P, t) &:= \{x \in X : \pi(x) \in V, |P(x)| < t\} ; \\ \overline{D}_V(P, t) &:= \{x \in X : \pi(x) \in V, |P(x)| \leq t\} ; \\ C_V(P, s, t) &:= \{x \in X : \pi(x) \in V, s < |P(x)| < t\} ; \\ \overline{C}_V(P, s, t) &:= \{x \in X : \pi(x) \in V, s \leq |P(x)| \leq t\}. \end{aligned}$$

Une partie de la forme $D_V(P, t)$ ou $C_V(P, s, t)$ sera appelée *domaine polynomial ouvert relatif au-dessus de V* . Une partie de la forme $\overline{D}_V(P, t)$ ou $\overline{C}_V(P, s, t)$ sera appelée *domaine polynomial fermé relatif au-dessus de V* .

Lorsque $P = T$, on s'autorise à supprimer le P de la notation et à écrire simplement $D_V(t)$, $\overline{D}_V(t)$, $C_V(s, t)$ ou $\overline{C}_V(s, t)$. On parlera de *disque relatif* dans les deux premiers cas et de *couronne relative* dans les deux derniers.

Dans tout le texte, nous nous autoriserons à parler de sections d'un faisceau sur une partie qui n'est pas nécessairement ouverte.

Notation 1.4.2. — Soient T un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur T . Considérons l'espace étale associé $(\widetilde{\mathcal{F}}, p)$, où $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un espace topologique et $p: \widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow T$ un homéomorphisme local. Pour toute partie V de T , on note $\mathcal{F}(V)$ l'ensemble des sections continues de l'application p au-dessus de V .

Lorsque V est ouvert, on retrouve l'ensemble $\mathcal{F}(V)$ usuel, cf. [God73, II, section 1.2]. En général, $\mathcal{F}(V)$ s'interprète comme un ensemble de sections sur-convergentes. Précisément, d'après [God73, II, corollaire 1 du théorème 3.3.1],

si V possède une base de voisinages paracompacts, alors l'application

$$\operatorname{colim}_{U \supset V} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V),$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de V dans T , est bijective. L'hypothèse sur V est, par exemple, satisfaite lorsque T est localement compact (par exemple un espace analytique) et V compacte. Hormis le cas ouvert, c'est le cas que nous rencontrerons le plus souvent.

Exemple 1.4.3. — Supposons que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un corps valué complet $(k, |\cdot|)$. Pour tout $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, $\mathcal{O}(\overline{D}_{\mathcal{M}(k)}(t))$ est l'anneau des séries à coefficients dans k de rayon de convergence strictement supérieur à t .

1.4.1. Algèbres de disques et de couronnes. —

Notation 1.4.4. — Soit $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ un anneau muni d'une norme sous-multiplicative.

Soit $t \in \mathbf{R}_{>0}$. On note $\mathcal{C}\langle |T| \leq t \rangle$ l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n T^n \in \mathcal{C}[[T]]$$

telles que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|a_n\| t^n$ converge et on la munit de la norme définie par

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n T^n \right\|_t := \sum_{n \in \mathbf{N}} \|a_n\| t^n.$$

Si $\mathcal{C}$ est complet, $\mathcal{C}\langle |T| \leq t \rangle$ est complète.

Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s \leq t$. On note $\mathcal{C}\langle s \leq |T| \leq t \rangle$ l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in \mathcal{C}[[T, T^{-1}]]$$

telles que la famille $(\|a_n\| \max(s^n, t^n))_{n \in \mathbf{Z}}$ soit sommable et on la munit de la norme définie par

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \right\|_{s,t} := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \|a_n\| \max(s^n, t^n).$$

Si $\mathcal{C}$ est complet, $\mathcal{C}\langle s \leq |T| \leq t \rangle$ est complète.

Par commodité, on pose $\mathcal{C}\langle 0 \leq |T| \leq t \rangle := \mathcal{C}\langle |T| \leq t \rangle$ et $\|\cdot\|_{0,t} := \|\cdot\|_t$.

Proposition 1.4.5 ([Poi10a, proposition 2.1.1]). — *Supposons que $\mathcal{A}$ est uniforme. Pour $s, t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que $0 = s < t$ ou $0 < s \leq t$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}\langle s \leq |T| \leq t \rangle) \xrightarrow{\sim} \overline{C}(s, t).$$

En particulier, la norme spectrale de $\|\cdot\|_{s,t}$ s'identifie avec la norme uniforme sur $\overline{C}(s, t)$. $\square$

Pour éviter d'avoir à distinguer dans chaque énoncé les disques et les couronnes, introduisons une notation.

Notation 1.4.6. — Pour $s, t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on note

$$s \prec t \text{ si } s = 0 \text{ ou } s < t.$$

Rappelons que nous avons défini un anneau $\mathcal{B}(V)$ à la notation 1.3.3.

Proposition 1.4.7 ([Poi10a, lemme 2.1.2 et proposition 2.1.3])

Supposons que $\mathcal{A}$ est uniforme. Soient $s, u \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $t, v \in \mathbf{R}_{> 0}$ tels que $s \prec u \leq v < t$. Soit $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in \mathcal{A}\langle s \leq |T| \leq t \rangle$. Alors, on a

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \|a_n\| \max(u^n, v^n) \leq \|f\|_{\overline{C}(s,t)}$$

et

$$\|f\|_{u,v} \leq \left(\frac{s}{u-s} + \frac{t}{t-v} \right) \|f\|_{\overline{C}(s,t)},$$

avec la convention que $s/(u-s) = 0$ lorsque $s = 0$.

En particulier, on a un morphisme injectif naturel

$$\mathcal{B}(\overline{C}(s, t)) \longrightarrow \mathcal{A}\langle u \leq |T| \leq v \rangle.$$

Rappelons un résultat permettant de décrire les fonctions au voisinage des disques.

Proposition 1.4.8 ([Poi13a, corollaire 2.8]). — *Soit V une partie compacte de B . Soit $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Alors, le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel*

$$\operatorname{colim}_{W \supset V, v > t} \mathcal{O}(W)\langle |T| \leq v \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{D}_V(t)),$$

où W parcourt l'ensemble des voisinages compacts de V dans B , est un isomorphisme. $\square$

On peut obtenir un analogue de ce résultat pour les couronnes contenues dans la partie ultramétrique.

Proposition 1.4.9. — Soit $b \in B_{\text{um}}$. Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s \leq t$. Alors, le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel

$$\text{colim}_{V \ni b, u < s \leq t < v} \mathcal{B}(V) \langle u \leq |T| \leq v \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_b(s, t)),$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts de b dans B , est un isomorphisme.

Démonstration. — L'injectivité étant claire, il suffit de démontrer la surjectivité. Soit $f \in \mathcal{O}(\overline{C}_b(s, t))$. On peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans B et des nombres réels $s_1, t_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ vérifiant $s_1 < s \leq t < t_1$ tels que $f \in \mathcal{O}(\overline{C}_U(s_1, t_1))$.

Notons z l'unique point du bord de Shilov de la couronne $\overline{C}_b(t, t)$. Par définition du faisceau structural, il existe un voisinage compact W de z dans $\overline{C}_U(s_1, t_1)$ et un élément g de $\mathcal{B}(W)$ coïncidant avec f sur W . L'intérieur de W contient une couronne de la forme $\overline{C}_V(u, u)$, où V est un voisinage compact spectralement convexe de b dans U et u un nombre réel vérifiant $t < u < t_1$. D'après [Poi13a, proposition 2.4], il existe un élément h de $\mathcal{B}(V) \langle |T| = u \rangle$ qui coïncide avec g sur $\overline{C}_V(u, u)$. On peut écrire

$$h = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in \mathcal{B}(V) \llbracket T, T^{-1} \rrbracket,$$

où la famille $(\|a_n\|_V u^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable.

Soit $b' \in V$ et raisonnons dans l'espace $\pi^{-1}(b') \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b')}^{1, \text{an}}$. Puisque la restriction de f appartient à $\mathcal{O}(\overline{C}_{b'}(s_1, t_1))$, elle est développable en série de Laurent sur $\mathcal{H}(b')$ et son développement n'est autre que

$$h(b') = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(b') T^n \in \mathcal{H}(b') \llbracket T, T^{-1} \rrbracket.$$

Soient $s_2, t_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s_1 < s_2 < s \leq t < t_2 < t_1$. La proposition 1.4.7 assure alors que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$|a_n(b')| \max(s_2^n, t_2^n) \leq \left(\frac{s_1}{s_2 - s_1} + \frac{t_1}{t_1 - t_2} \right) \|f\|_{\overline{C}_{b'}(s_1, t_1)},$$

et donc

$$\|a_n\|_V \max(s_2^n, t_2^n) \leq \left(\frac{s_1}{s_2 - s_1} + \frac{t_1}{t_1 - t_2} \right) \|f\|_{\overline{C}_V(s_1, t_1)}.$$

On en déduit que f appartient à l'image de $\mathcal{B}(V) \langle s_3 \leq |T| \leq t_3 \rangle$ pour tous $s_3, t_3 \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s_2 < s_3 < s \leq t < t_3 < t_2$. $\square$

Remarque 1.4.10. — Un résultat du même type vaut certainement encore dans le cas archimédien. Par exemple, pour démontrer que tout élément de $\mathcal{O}(\overline{C}_b(s, t))$ possède un développement à valeurs dans $\mathcal{O}_b$, une stratégie naturelle consisterait à exprimer chaque coefficient du développement à l'aide de la fonction f , autrement dit à écrire une formule des résidus en chaque fibre, et à montrer que le résultat est une fonction analytique du paramètre sur la base. Nous n'avons pas souhaité pousser plus loin ces considérations, difficile à mettre en œuvre dans le cas d'une base $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ générale, mais reviendrons sur ce résultat de développement plus tard, lorsque nous aurons la théorie des espaces de Stein à notre disposition, cf. proposition 8.4.1.

En appliquant la proposition 1.4.9 précédente fibre à fibre et en recollant, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1.4.11. — *Soit V une partie compacte de B_{um} . Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s \leq t$. Alors le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel*

$$\text{colim}_{W \supset V, u < s \leq t < v} \mathcal{O}(W) \langle u \leq |T| \leq v \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t)),$$

où W parcourt l'ensemble des voisinages compacts de V dans B , est un isomorphisme.

Dans le cadre ultramétrique, on peut également obtenir des résultats sur les complétés des anneaux de sections globales sur les couronnes. Introduisons au préalable quelques définitions spécifiques.

Notation 1.4.12. — Supposons que la norme sur $\mathcal{A}$ est ultramétrique. Soit $t \in \mathbf{R}_{>0}$. On note $\mathcal{A}\{|T| \leq t\}$ l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n T^n \in \mathcal{A}[[T]]$$

telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\| t^n = 0$. Elle est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n T^n \right\|_t := \max_{n \in \mathbf{N}} \|a_n\| t^n.$$

Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s \leq t$. On note $\mathcal{A}\{s \leq |T| \leq t\}$ l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in \mathcal{A}[[T, T^{-1}]]$$

telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\| t^n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \|a_n\| s^n = 0$. Elle est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \right\|_{s,t} := \max_{n \in \mathbf{Z}} \|a_n\| \max(s^n, t^n).$$

Par commodité, on pose $\mathcal{A}\{0 \leq |T| \leq t\} := \mathcal{A}\{|T| \leq t\}$ et $\|\cdot\|_{0,t} := \|\cdot\|_t$.

Notation 1.4.13. — Pour toute partie compacte W de B ou de X , on note $\overline{\mathcal{O}(W)}$ le séparé complété de $\mathcal{O}(W)$ pour la semi-norme uniforme $\|\cdot\|_W$ sur W .

Lemme 1.4.14. — Soit V une partie compacte de B_{um} . Soient $s, t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que $0 = s < t$ ou $0 < s \leq t$. Le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel

$$\mathcal{O}(V)[T] \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t))$$

induit un isomorphisme isométrique

$$\overline{\mathcal{O}(V)}\{s \leq |T| \leq t\} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t))}.$$

Démonstration. — On se contentera de traiter le cas où $s > 0$. Soit $f \in \mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t))$. D'après le corollaire 1.4.11, f peut s'écrire sous la forme d'une série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n$ satisfaisant les conditions de convergence adéquates.

La norme uniforme de f sur $\overline{C}_V(s, t)$ est la borne supérieure des normes uniformes de f sur les fibres au-dessus des points de V . Puisque ces points sont ultramétriques, on en déduit que

$$\|f\|_{\overline{C}_V(s, t)} = \sup_{b \in V} \left(\max_{n \in \mathbf{Z}} (|a_n(b)| \max(s^n, t^n)) \right).$$

Puisque V est compacte, $\overline{C}_V(s, t)$ l'est aussi, donc la borne supérieure précédente est un maximum :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\overline{C}_V(s, t)} &= \max_{b \in V} \left(\max_{n \in \mathbf{Z}} (|a_n(b)| \max(s^n, t^n)) \right) \\ &= \max_{n \in \mathbf{Z}} (\|a_n\|_V \max(s^n, t^n)). \end{aligned}$$

Cette dernière norme n'est autre que la norme sur $\overline{\mathcal{O}(V)}\{s \leq |T| \leq t\}$, par définition. L'expression du complété de $\mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t))$ s'en déduit. $\square$

1.4.2. Normes sur les domaines polynomiaux. — Dans cette section, nous démontrons un résultat technique sur la norme des fonctions sur les domaines polynomiaux.

Lemme 1.4.15. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soient $\alpha \in k$ et $r \in \mathbf{R}_{>0}$. Pour tout $Q = \sum_{j=0}^d b_j T^j \in k[T]$, on a

$$\max_{0 \leq j \leq d} (|b_j|) \leq \max \left(\frac{|\alpha|}{r}, \frac{1}{r}, 1 \right)^d \|Q\|_{\overline{D}(\alpha, r)}.$$

Démonstration. — Traitons tout d'abord le cas d'un polynôme de la forme $T - b$ avec $b \in k$. On a

$$\begin{aligned} \max(|b|, 1) &\leq \max(|\alpha|, |b - \alpha|, 1) \\ &\leq \max \left(\frac{|\alpha|}{r}, \frac{1}{r}, 1 \right) \cdot \max(|b - \alpha|, r) \\ &\leq \max \left(\frac{|\alpha|}{r}, \frac{1}{r}, 1 \right) \cdot \|T - b\|_{\overline{D}(\alpha, r)}. \end{aligned}$$

Posons $C := \max \left(\frac{|\alpha|}{r}, \frac{1}{r}, 1 \right)$.

Soit $Q = \sum_{j=0}^d b_j T^j \in k[T]$. Pour démontrer l'inégalité souhaitée, on peut remplacer k par une extension valuée complète et donc supposer que k est algébriquement clos. On peut également supposer que $b_d \neq 0$ (car $C \geq 1$). Il existe alors $\beta_1, \dots, \beta_d \in k$ tels que

$$Q = b_d \prod_{i=1}^d (T - \beta_i).$$

Il découle alors des relations coefficients/racines et de l'inégalité triangulaire ultramétrique que l'on a

$$\max_{0 \leq j \leq d} (|b_j|) \leq |b_d| \max_{I \subset \llbracket 1, d \rrbracket} \left(\prod_{i \in I} |\beta_i| \right) \leq |b_d| \prod_{i=1}^d \max(|\beta_i|, 1).$$

En utilisant l'inégalité démontrée au début de la preuve, on obtient

$$\max_{0 \leq j \leq d} (|b_j|) \leq |b_d| C^d \prod_{i=1}^d \|T - \beta_i\|_{\overline{D}(\alpha, r)} \leq C^d \|Q\|_{\overline{D}(\alpha, r)}.$$

□

Proposition 1.4.16. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $P = \sum_{i=0}^p a_i T^i \in k[T]$ un polynôme de degré p différent de T^p . Soit $s \in \mathbf{R}_{>0}$. Posons

$$\sigma := \max_{0 \leq i \leq p-1} \left(\left| \frac{a_i}{a_p} \right|^{\frac{1}{p-i}} \right) > 0$$

et $\rho := \min(\sigma, s\sigma^{1-p})$. Pour tout $Q = \sum_{j=0}^d b_j T^j \in k[T]$, nous avons

$$\max_{0 \leq j \leq d} (|b_j|) \leq \max\left(\frac{\sigma}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)^d \|Q\|_{\overline{D}(P;s)}.$$

Démonstration. — On peut supposer que k est algébriquement clos. On peut également supposer que P est unitaire. Il existe alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in k$ tels que

$$P = \prod_{i=1}^p (T - \alpha_i).$$

Quitte à réordonner les α_i , on peut supposer que $|\alpha_p| = \max_{1 \leq i \leq p} (|\alpha_i|)$. D'après [BGR84, proposition 3.1.2/1] (ou la théorie des polygones de Newton), on a

$$|\alpha_p| = \max_{0 \leq i \leq p-1} (|a_i|^{1/(p-i)}) = \sigma > 0.$$

Pour tout $r \in (0, |\alpha_p|]$ et tout $x \in \overline{D}(\alpha_p, r)$, on a

$$|P(x)| = \prod_{i=1}^p |(T - \alpha_i)(x)| \leq r \prod_{i=1}^{p-1} \max(|\alpha_i - \alpha_p|, r) \leq r |\alpha_p|^{p-1}.$$

En particulier, pour $\rho = \min(|\alpha_p|, s|\alpha_p|^{1-p})$, on a $\overline{D}(\alpha_p, \rho) \subset \overline{D}(P; s)$ et donc $\|Q\|_{\overline{D}(\alpha_p, \rho)} \leq \|Q\|_{\overline{D}(P; s)}$.

D'après le lemme 1.4.15, on a

$$\max_{0 \leq j \leq d} (|b_j|) \leq \max\left(\frac{|\alpha_p|}{\rho}, \frac{1}{\rho}, 1\right)^d \|Q\|_{\overline{D}(\alpha_p, \rho)}$$

et le résultat s'ensuit. $\square$

Corollaire 1.4.17. — Supposons que $\mathcal{A}$ est uniforme. Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathcal{A}[T]$ tel que, pour tout $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $P(b) \in \mathcal{H}(b)[T]$ soit un polynôme de degré p différent de T^p . Soit $s \in \mathbf{R}_{>0}$. Alors, il existe $K_P \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $Q = \sum_{j=0}^d b_j T^j \in \mathcal{A}[T]$, on ait

$$\max_{0 \leq j \leq d} (|b_j|) \leq K_P^d \|Q\|_{\overline{D}(P; s)}.$$

$\square$

Remarque 1.4.18. — Si $P = T^p$, on a $\overline{D}(T^p; s) = \overline{D}(s^{1/p})$ et le résultat reste valable d'après la proposition 1.4.7.

1.5. Bases de voisinages

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$, avec coordonnée T . Notons $\pi: X \rightarrow B$ la projection sur la base. Dans cette section, nous donnons une description précise de bases de voisinages des points de X .

Nous nous baserons sur la classification de Berkovich des points de la droite analytique sur un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos, cf. [Ber90, section 1.4.4], que nous rappelons ici

Notation 1.5.1. — Soit $(\ell, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique.

Posons $\ell^\circ := \{a \in \ell : |a| \leq 1\}$, $\ell^{\circ\circ} := \{a \in \ell : |a| < 1\}$ et $\tilde{\ell} := \ell^\circ / \ell^{\circ\circ}$.

Posons $|\ell^*| := \{|a| : a \in \ell^*\}$ et notons $|\ell^*|^{\mathbf{Q}}$ sa clôture divisible. Elle est naturellement munie d'une structure de $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel. Si ℓ est algébriquement clos, on a $|\ell^*|^{\mathbf{Q}} = |\ell^*|$.

Définition 1.5.2. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Notons $s(x)$ le degré de transcendance de $\widehat{\mathcal{H}(x)}$ sur $\tilde{k}$ et $t(x)$ la dimension du $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $|\mathcal{H}(x)^*|^{\mathbf{Q}}/|k^*|$. Le point x est dit

- de *type 1* si $\mathcal{H}(x) = k$;
- de *type 2* si $s(x) = 1$;
- de *type 3* si $t(x) = 1$;
- de *type 4* sinon.

La définition de type d'un point s'étend à un corps valué ultramétrique complet quelconque par extension des scalaires.

Définition 1.5.3. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Notons $\hat{k}$ le complété d'une clôture algébrique de k . Considérons l'application $\pi_{\hat{k}/k}^{\wedge}: \mathbf{A}_{\hat{k}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ induite par l'inclusion $k \subset \hat{k}$. Elle est surjective.

Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ et soit $y \in \pi_{\hat{k}/k}^{-1}(x)$. Pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, le point x est dit de *type* i si le point y est de type i . Cela ne dépend pas des choix.

Remarque 1.5.4. — Lorsque $(k, |\cdot|)$ est un corps valué ultramétrique complet, la droite analytique $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ possède une structure d'arbre réel. Les différentes sortes de points de l'arbre correspondent à différents types de points au sens de Berkovich. Précisément, les feuilles sont les points de type 1 et 4 et les points de branchement sont les points de type 2. (Une infinité de branches en

partent.) Les points de type 3 sont ceux qui restent : exactement deux branches en partent.

Nous utiliserons désormais sans plus de commentaires les propriétés classiques des points de la droite analytique sur un corps valué ultramétrique complet.

Ajoutons une définition générale.

Définition 1.5.5. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. On dit qu'un point x de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ est *rigide* si l'extension $\mathcal{H}(x)/k$ est finie.

Dans ce cas, il existe un unique polynôme irréductible unitaire à coefficients dans k qui s'annule en x . On l'appelle *polynôme minimal* de x et on le note μ_x . On appelle *degré* de x son degré et on le note $\deg(x)$.

Commençons par rappeler des résultats connus sur les bases de voisinages des points de la droite analytique sur un corps valué ultramétrique complet.

Lemme 1.5.6. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soit x un point de type 2 ou 3 de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Notons $\mathcal{E}_x$ l'ensemble des composantes connexes relativement compactes de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$. Pour tout élément C de $\mathcal{E}_x$, choisissons un point rigide x_C dans C . Pour toute partie finie F de $\mathcal{E}_x$, posons $P_F := \prod_{C \in F} \mu_{x_C}$.

Alors, les ensembles de la forme

$$\overline{C}(P_F, |P_F(x)| - \varepsilon, |P_F(x)| + \varepsilon),$$

où F est un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}_x$ et ε un nombre réel strictement positif, sont une base de voisinages connexes de x dans $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$.

Démonstration. — Le résultat découle du fait que tout voisinage de x contient entièrement toutes les composantes connexes de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$ à l'exception éventuelle d'un nombre fini d'entre elles et d'arguments basés sur le graphe de variation de $|P_F|$. $\square$

Lemme 1.5.7. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Tout point x de type 1 ou 4 de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ possède un système fondamental de voisinages ouverts connexes de la forme

$$\overline{D}(P, |P(x)| + \varepsilon),$$

où $P \in k[T]$ est un polynôme irréductible et ε un nombre réel strictement positif.

Démonstration. — Soit U un voisinage de x dans $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et notons $\hat{k}$ son complété. Notons $\pi: \mathbf{A}_{\hat{k}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ le morphisme de projection. Soit $x' \in \pi^{-1}(x)$. Le point x' est un point de type 1 ou 4 de $\mathbf{A}_{\hat{k}}^{1,\text{an}}$. Puisque $\hat{k}$ est algébriquement clos, le singleton $\{x\}$ est l'intersection d'une famille de disques fermés de rayons strictement positifs. On en déduit qu'il existe $\alpha \in \hat{k}$ et $r_1 > 0$ tel que $\overline{D}(\alpha, r_1)$ contienne x' et soit contenu dans $\pi^{-1}(U)$. Puisque $\bar{k}$ est dense dans $\hat{k}$, on peut supposer que $\alpha \in \bar{k}$. Notons $P \in k[T]$ son polynôme minimal. Il existe alors $s_1 > 0$ tel que $\pi(\overline{D}(\alpha, r_1)) = \overline{D}(P, s_1)$ et on a

$$x \in \overline{D}(P, s_1) \subset U.$$

Le résultat s'en déduit, en remarquant que les ensembles de la forme $\overline{D}(P, s_1)$ sont toujours connexes (*cf.* lemme 1.5.10). $\square$

Pour passer à des bases plus générales que des corps valués, nous aurons besoin de quelques résultats techniques.

Notation 1.5.8. — Soit $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur l'anneau des polynômes $\mathcal{C}[T]$ définie par

$$\|P(T)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq d} (\|a_i\|)$$

pour tout $P(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i \in \mathcal{C}[T]$.

Lorsque $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ est de la forme $(\mathcal{B}(V), \|\cdot\|_V)$ (*cf.* notation 1.3.3), on note $\|\cdot\|_{V,\infty}$ la norme correspondante sur $\mathcal{B}(V)[T]$.

Lemme 1.5.9. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soit $P \in k[T]$ unitaire de degré $d \geq 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$, on a

$$|T(x)| \leq |P(x)| + d \|P\|_\infty.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Écrivons $P(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i \in k[T]$. Supposons, par l'absurde, que l'on ait $|T(x)| > |P(x)| + d \|P\|_\infty$. Puisque P est unitaire, on a, en particulier, $|T(x)| \geq 1$, d'où

$$\left| \sum_{i=0}^{d-1} a_i(x) T(x)^i \right| \leq d \|P\|_\infty |T(x)|^{d-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 |P(x)| &= \left| T(x)^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(x) T(x)^i \right| \\
 &\geq |T(x)|^d - d \|P\|_\infty |T(x)|^{d-1} \\
 &\geq |T(x)|^{d-1} (|T(x)| - d \|P\|_\infty) \\
 &> |P(x)|,
 \end{aligned}$$

et l'on aboutit ainsi à la contradiction souhaitée. $\square$

Lemme 1.5.10. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soit $Q_0 \in k[T]$ un polynôme de degré $d \geq 1$ qui est une puissance d'un polynôme irréductible. Soit $r > 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $Q \in k[T]$ unitaire de degré d tel que $\|Q - Q_0\|_\infty \leq \varepsilon$ et tout $s \geq r$, $\overline{D}(Q, s)$ soit connexe.

Démonstration. — Soit $Q \in k[T]$. Le principe du maximum assure que toute composante connexe de $\overline{D}(Q, s)$ contient un zéro de Q . Par conséquent, pour montrer que $\overline{D}(Q, s)$ est connexe, il suffit de montrer que l'ensemble des zéros de Q est contenu dans une partie connexe de $\overline{D}(Q, s)$.

Par hypothèse, le polynôme Q_0 possède un seul zéro (éventuellement multiple) dans $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$. Le raisonnement précédent assure que, pour tout $t > 0$, $\overline{D}(Q_0, t)$ est connexe.

Soit $t \in]0, r[$. Par continuité des racines, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $Q \in k[T]$ unitaire de degré d tel que $\|Q - Q_0\|_\infty \leq \varepsilon$, tous les zéros de Q dans $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ soient contenus dans $\overline{D}(Q_0, t)$. Quitte à diminuer ε , on peut, en outre, supposer que $\overline{D}(Q, r) \supset \overline{D}(Q_0, t)$. La connexité de $\overline{D}(Q, r)$, et de $\overline{D}(Q, s)$ pour tout $s \geq r$, s'ensuit. $\square$

Venons-en maintenant aux descriptions annoncées des bases de voisinages des points de $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$. Rappelons que, si b est un point de $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, la fibre $X_b := \pi^{-1}(b)$ s'identifie à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1, \text{an}}$.

Proposition 1.5.11. — Soient $b \in B$ et x un point rigide de X_b . Notons $\mu_x \in \mathcal{H}(b)[T]$ le polynôme minimal de x . Soit $e \in \mathbf{N}^*$. Soit U un voisinage de x dans X et soient $\eta, \sigma \in \mathbf{R}_{>0}$. Alors, il existe un voisinage spectralement convexe V_0 de b dans B , un polynôme P_0 à coefficients dans $\mathcal{B}(V_0)$, unitaire, de même degré que μ_x^e , tel que $\|P_0(b) - \mu_x^e\|_{b, \infty} \leq \eta$ (où $P_0(b)$ désigne l'image de P_0 dans $\mathcal{H}(b)[T]$) et des nombres réels $s_1, s_2, \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $s_1 < s_2 \leq \sigma$ qui satisfont les propriétés suivantes : pour tout voisinage compact V de b dans V_0 ,

pour tout $P \in \mathcal{B}(V)[T]$ unitaire de même degré que P_0 tel que $\|P - P_0\|_{V,\infty} \leq \varepsilon$ et pour tout $s \in [s_1, s_2]$, on a

$$x \in \overline{D}_V(P, s) \subset U$$

et $\overline{D}_b(P, s)$ est connexe.

En outre, on peut imposer l'une des conditions supplémentaires suivantes :⁽¹⁾

- i) $P_0(b)$ est séparable, si μ_x est séparable et $e = 1$;
- ii) $P_0(b)$ est séparable, si $\mathcal{H}(b)$ n'est pas trivialement valué ;
- iii) P_0 est un relevé fixé de μ_x^e à $\mathcal{O}_{B,b}[T]$, si $\mu_x^e \in \kappa(b)[T]$.

Démonstration. — On peut supposer que U est ouvert. Notons d le degré de μ_x^e . Posons $M := \|\mu_x^e\|_{b,\infty}$ et $R := 1 + d(M + 1)$.

Le sous-ensemble de la fibre X_b défini par l'équation $\mu_x^e = 0$ est réduit au point x . L'ensemble $\overline{D}_b(0, R) \setminus U$ est donc un compact sur lequel $|\mu_x^e|$ est bornée inférieurement par une constante $m_0 > 0$. Soit $m \in]0, \min(m_0, \sigma, 1)[$. On déduit du lemme 1.5.9 que l'on a $\overline{D}_b(\mu_x^e, m) \subset U$.

Puisque $\kappa(b)$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$, il existe un polynôme P_0 unitaire de degré d à coefficients dans $\mathcal{O}_b$ tel que l'on ait

$$\|P_0(b) - \mu_x^e\|_{b,\infty} < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{m}{5} \left(\sum_{i=0}^{d-1} R^i\right)^{-1}, \eta\right).$$

On a alors $\|P_0\|_{b,\infty} \leq M + 1/2$ donc, d'après le lemme 1.5.9, $\overline{D}_b(P_0, 1) \subset \overline{D}_b(0, R)$. On en déduit alors que $\overline{D}_b(P_0, 4m/5) \subset \overline{D}_b(\mu_x^e, m) \subset U$. En outre, $\overline{D}_b(P_0, m/5)$ contient x .

Il existe un voisinage compact spectralement convexe W de b dans B tel que P_0 soit à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$ et satisfasse $\|P_0\|_{W,\infty} \leq M + 3/4$. L'ensemble $\overline{D}_W(P_0, 4m/5) \setminus U$ est compact et sa projection sur B est un compact L qui ne contient pas le point b . Soit V_0 un voisinage compact spectralement convexe de b dans $B \setminus L$. Par construction, on a $\overline{D}_{V_0}(P_0, 4m/5) \subset U$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1/4[$ tel que $\varepsilon \sum_{i=0}^{d-1} R^i < m/5$. Soient V une partie compacte de V_0 et $P \in \mathcal{B}(V)[T]$ un polynôme unitaire de degré d tel que $\|P - P_0\|_{V,\infty} \leq \varepsilon$. D'après le lemme 1.5.9, on a alors $\overline{D}_V(P, 1) \subset \overline{D}_V(0, R)$. Posons $s_1 := 2m/5$ et $s_2 := 3m/5$. Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, on a alors $\overline{D}_V(P, s) \subset \overline{D}_V(P_0, 4m/5) \subset U$ et $\overline{D}_V(P, s) \supset \overline{D}_V(P_0, m/5) \ni x$. La première partie du résultat s'ensuit. Le

⁽¹⁾Nous ne prétendons pas qu'il soit possible de les imposer simultanément.

lemme 1.5.10 (utilisé avec $k = \mathcal{H}(b)$ et $r = s_1$) permet d'assurer la connexité de $\overline{D}_b(P, s)$, quitte à diminuer ε .

Intéressons-nous maintenant aux conditions supplémentaires que nous pouvons imposer.

i) Si μ_x est séparable et $e = 1$, tout polynôme suffisamment proche de $\mu_x^e = \mu_x$ est encore séparable, par continuité du discriminant. Le résultat s'ensuit.

ii) Si $\mathcal{H}(b)$ est de valuation non triviale, tout polynôme à coefficients dans $\mathcal{H}(b)$ peut être approché autant qu'on le souhaite par un polynôme séparable à coefficients dans $\mathcal{H}(b)$, et même $\kappa(b)$. Le résultat s'ensuit.

ii) Si $\mu_x^e \in \kappa(b)[T]$, pour tout relevé P_0 de μ_x^e dans $\mathcal{O}_{B,b}[T]$, on a $\|P_0(b) - \mu_x^e\|_{b,\infty} = 0$. Ce choix de P_0 est donc permis. $\square$

Proposition 1.5.12. — Soient $b \in B$, x un point non rigide de X_b et U un voisinage de x dans X . Alors, il existe un voisinage spectralement convexe V_0 de b dans B , un polynôme P_0 unitaire non constant à coefficients dans $\mathcal{B}(V_0)$ et des nombres réels $r_1, r_2, s_1, s_2, \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $r_2 < r_1 < s_1 < s_2$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout voisinage compact V de b dans V_0 , pour tout $P \in \mathcal{B}(V_0)[T]$ tel que $\|P - P_0\|_{V_0,\infty} \leq \varepsilon$, pour tous $r, s \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $r_2 \leq r \leq r_1$ et $s_1 \leq s \leq s_2$, on a

$$x \in \overline{C}_V(P, r, s) \subset U$$

et $\overline{C}_b(P, r, s)$ est connexe.

En outre, si $\mathcal{H}(b)$ est de valuation non triviale ou de caractéristique nulle, on peut imposer que $P_0(b)$ soit séparable.

Démonstration. — Remarquons que les hypothèses entraînent que le point b est ultramétrique. Le résultat découle alors des lemmes 1.5.6 et 1.5.7 appliqués avec $k = \mathcal{H}(b)$ et d'arguments d'approximation similaires à ceux de la preuve de la proposition 1.5.11. La démonstration de la connexité de $C_b(P, r, s)$ repose sur l'inégalité triangulaire ultramétrique, qui assure que $C_b(P, r, s)$ reste inchangé si l'on remplace P par un polynôme suffisamment proche. $\square$

Corollaire 1.5.13 ([Poi13a, corollaire 6.8]). — Soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec $n \geq m$. La projection $\pi_{n,m}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$ sur les m premières coordonnées est ouverte.

Démonstration. — La remarque 1.3.13 permet de se ramener au cas où $m = 0$ et $n = 1$. Le résultat découle alors des propositions 1.5.11 et 1.5.12. $\square$

1.6. Résultats locaux

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Banach et soit $n \in \mathbf{N}$. Dans cette section, nous rappelons quelques résultats locaux sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ obtenus par le second auteur dans [Poi13a]. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

1.6.1. Théorème de division de Weierstraß. — En géométrie analytique classique, les théorèmes de division et de préparation de Weierstraß sont des outils fondamentaux. Ils interviennent notamment de façon essentielle dans la démonstration de la cohérence du faisceau structural. Le second auteur a démontré des versions de ces théorèmes pour les espaces de Berkovich dans [Poi13a].

Dans cette section, nous nous consacrons au théorème de division. Nous reviendrons plus tard sur le théorème de préparation (*cf.* théorème 1.6.27). Commençons par rappeler quelques définitions.

Définition 1.6.1. — Soit V un ensemble compact spectralement convexe de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. On dit qu'une partie fermée Γ de V est un *bord analytique* de V si, pour tout $f \in \mathcal{B}(V)$, on a

$$\|f\|_{\Gamma} = \|f\|_V.$$

Définition 1.6.2. — Un point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est dit *ultramétrique typique* s'il appartient à l'intérieur de la partie ultramétrique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et s'il possède une base de voisinages formée d'ensembles compacts et spectralement convexes possédant un bord analytique fini.

Un point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est dit *décent* si l'une (au moins) des trois conditions suivantes est satisfaite :

- i) $\mathcal{H}(x)$ est de caractéristique nulle ;
- ii) $\mathcal{H}(x)$ est de valuation non triviale ;
- iii) x est ultramétrique typique.

Une partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est dite *ultramétrique typique* (resp. *décente*) lorsque tous ses points le sont.

Exemple 1.6.3. — Lorsque $\mathcal{A}$ est l'un de nos exemples usuels 1.1.16 à 1.1.21 : les corps valués complets, l'anneau $\mathbf{Z}$ et les anneaux d'entiers de corps de nombres, les corps hybrides, les anneaux de valuation discrète, les anneaux de Dedekind trivialement valués, le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est décent.

Proposition 1.6.4. — Soit $b \in B$ un point ultramétrique typique (resp. décent). Alors, tout point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ situé au-dessus de b est encore ultramétrique typique (resp. décent). $\square$

Démonstration. — Le cas ultramétrique typique fait l'objet de [Poi13a, proposition 6.10]. Le cas décent s'en déduit, les propriétés d'être de caractéristique nulle ou de valuation non triviale étant stables par extension de corps. $\square$

Posons $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$, avec coordonnée S . Notons $\pi: X \rightarrow B$ la projection sur la base. Rappelons que si b est un point de B , la fibre $X_b := \pi^{-1}(b)$ s'identifie à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1,\text{an}}$. Rappelons également que, si x est un point rigide de X_b , alors l'anneau local $\mathcal{O}_{X_b,x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante μ_x (cf. définition 1.5.5 pour la notation).

Théorème 1.6.5 (Division de Weierstraß, [Poi13a, théorème 8.3])

Soit b un point de B . Soit x un point rigide de X_b . Si μ_x est inséparable et si b est trivialement valué, supposons que b est ultramétrique typique. Soit G un élément de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Supposons que son image dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X_b,x}$ n'est pas nulle et notons n sa valuation.

Alors, pour tout $F \in \mathcal{O}_{X,x}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathcal{O}_{X,x}^2$ tel que

- i) $F = QG + R$;
- ii) $R \in \mathcal{O}_{B,b}[S]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $n \deg(x)$.

$\square$

On peut étendre ce théorème de façon à diviser simultanément en plusieurs points de la fibre. On renvoie à la preuve de [Poi10a, théorème 5.5.3] pour les détails⁽²⁾.

Corollaire 1.6.6. — Soit b un point décent de B . Soit G un polynôme unitaire de degré d à coefficients dans $\mathcal{O}_{B,b}$. Notons $\{z_1, \dots, z_t\}$ l'ensemble des zéros de G dans X_b .

Alors, pour tout $(f_1, \dots, f_t) \in \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{X,z_i}$, il existe un unique élément $(r, q_1, \dots, q_t)$ de $\mathcal{O}_{B,b}[T] \times \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{X,z_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, on a $f_i = q_i G + r$ dans $\mathcal{O}_{X,z_i}$;
- ii) le polynôme r est de degré strictement inférieur à d .

⁽²⁾Dans cette référence, le polynôme G est supposé d'une forme particulière, mais cela n'est pas utilisé dans la preuve. La condition (I_G) peut être remplacée par la condition (D_G) et [Poi13a, corollaire 5.4] assure qu'elle est toujours satisfaite. La condition (S) n'est présente que pour assurer que le théorème de division de Weierstraß s'applique.

□

On démontrera plus loin une version raffinée de cet énoncé permettant de contrôler les normes du reste et du quotient (*cf.* théorème 3.2.1 et corollaire 3.2.4).

Le théorème de division de Weierstraß a de nombreuses conséquences importantes, par exemple pour l'étude des morphismes finis. En voici une. Soit $P(S) \in \mathcal{A}[S]$ unitaire non constant. Le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel

$$\mathcal{A}[T] \longrightarrow \mathcal{A}[T, S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}[S]$$

induit un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi_P: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$, où nous notons S (resp. T) la coordonnée sur l'espace de départ (resp. d'arrivée). Soit V une partie de B . Soient $s, t \in \mathbf{R}$ tels que $0 = s < t$ ou $0 < s \leq t$. Nous avons alors $\varphi_P^{-1}(\overline{C}_V(s, t)) = \overline{C}_V(P, s, t)$.

Théorème 1.6.7 ([Poi13a, théorème 8.8]). — *Dans la situation précédente, si V est décente, alors le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel*

$$\mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t))[S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_V(P, s, t))$$

est un isomorphisme.

□

On en déduit une version du corollaire 1.4.11 pour les domaines polynomiaux.

Corollaire 1.6.8. — *Dans la situation précédente, si V est ultramétrique et décente, alors, le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel*

$$\operatorname{colim}_{W \supset V, u < s \leq t < v} \mathcal{O}(W) \langle u \leq |T| \leq v \rangle [S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_V(P, s, t)),$$

où W décrit l'ensemble des voisinages compacts de V dans B sur lesquels les coefficients de P sont définis, est un isomorphisme.

□

On va maintenant modifier l'énoncé précédent de façon à faire intervenir des anneaux de Banach dans la limite inductive, ce qui se révèlera utile par la suite.

Lemme 1.6.9. — *Soient V une partie compacte de B et $\mathcal{V}$ une base de voisinages compacts de V dans B . Alors, pour tout $W \in \mathcal{V}$, le morphisme de restriction induit un morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres*

$$\varphi_W: \overline{\mathcal{O}(W)} \longrightarrow \mathcal{O}(V).$$

Le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel

$$\operatorname{colim}_{W \in \mathcal{V}} \overline{\mathcal{O}(W)} \longrightarrow \mathcal{O}(V)$$

qui s'en déduit est un isomorphisme.

Démonstration. — Par définition, les sections du faisceau structural sur un ouvert U sont localement des limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles. On en déduit que le morphisme $\varphi_W: \overline{\mathcal{O}(W)} \rightarrow \mathcal{O}(V)$ est bien défini. Le second résultat est immédiat. $\square$

Corollaire 1.6.10. — Dans la situation précédente, si V est ultramétrique et décente, alors, le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres naturel

$$\operatorname{colim}_{W \supset V, u \prec s \leq t < v} \overline{\mathcal{O}(W)} \langle u \leq |T| \leq v \rangle [S] / (P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_V(P, s, t)),$$

où W décrit l'ensemble des voisinages compacts de V dans B sur lesquels les coefficients de P sont définis, est un isomorphisme. $\square$

1.6.2. Changement de variables. — Dans cette section, nous démontrons un résultat de changement de variables très utile en pratique. Étant donné une fonction non nulle sur un espace affine, il permet d'assurer que celle-ci reste non nulle lorsque l'on spécialise toutes les variables sauf une, ce qui permet notamment d'appliquer le théorème de division de Weierstraß 1.6.5. Dans le cadre des espaces sur un corps valué ultramétrique complet, on retrouve le fait qu'une fonction non nulle peut être transformée en une fonction distinguée par rapport à une variable, par le biais d'un automorphisme (cf. [BGR84, proposition 5.2.4/1]). Notre résultat figure déjà dans [Poi13a, lemme 9.15], mais l'auteur n'en a rédigé qu'une preuve succincte. Nous en proposons ici une démonstration complète et différente.

Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Pour $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in (\mathbf{N}^*)^{n-1}$, notons $\psi_{\mathbf{u}}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ l'automorphisme d'espaces localement annelés induit par le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_1 & \mapsto & T_1 + T_n^{u_1} ; \\ & \vdots & \\ T_{n-1} & \mapsto & T_{n-1} + T_n^{u_{n-1}} ; \\ T_n & \mapsto & T_n. \end{array} \right.$$

Lemme 1.6.11. — Soient b un point de B . Soient $n \in \mathbf{N}$ et x un point rigide de $\pi_n^{-1}(b)$. Soit f un élément de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}, x}$ dont la restriction à $\pi_n^{-1}(b)$

n'est pas nulle. Alors, il existe $\mathbf{u} \in (\mathbf{N}^*)^{n-1}$ tel que l'image de $\psi_{\mathbf{u}}^{\#}(f)$ dans $\pi_{n-1}^{-1}(\pi_{n-1}(\psi_{\mathbf{u}}^{-1}(x)))$ ne soit pas nulle.

Démonstration. — Puisque le résultat ne concerne que la restriction de la fonction f à $\pi_n^{-1}(b)$, nous pouvons remplacer $\mathcal{A}$ par $\mathcal{H}(b)$, et donc supposer que $\mathcal{A}$ est un corps valué complet. Nous le noterons désormais K .

Remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat après extension des scalaires. Nous pouvons donc supposer que K est algébriquement clos. Le point x s'identifie alors à un élément $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de K^n .

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, définissons maintenant un idéal I_n de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_K^{n,\text{an}},x}$. Posons $I_0 := (0)$, $I_1 := (0)$ et, pour tout $n \geq 2$,

$$I_n := \bigcap_{\mathbf{u} \in \mathbf{N}^{n-1}} (T_1 - \alpha_1 - T_n^{u_1} + \alpha_n^{u_1}, \dots, T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}} + \alpha_n^{u_{n-1}}).$$

Rappelons que, d'après la proposition 1.4.8, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_K^{n,\text{an}},x}$ s'identifie à un sous-anneau de $K[[T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n]]$.

Nous allons montrer que $I_n = (0)$ par récurrence sur n . Si n vaut 0 ou 1, le résultat vaut par définition. Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$ et supposons avoir démontré que $I_{n-1} = (0)$.

Fixons $u_{n-1} \in \mathbf{N}^*$. Puisque $T_n - \alpha_n$ divise $T_n^{u_{n-1}} - \alpha_n^{u_{n-1}}$, on a un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} & K[[T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n]] / (T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}} + \alpha_n^{u_{n-1}}) \\ & \simeq K[[T_1 - \alpha_1, \dots, T_{n-2} - \alpha_{n-2}, T_n - \alpha_n]]. \end{aligned}$$

L'image de I_n par cet isomorphisme s'identifie à I_{n-1} (en effectuant le changement de variable $T_n \mapsto T_{n-1} - \alpha_{n-1} + \alpha_n$), et est donc nulle, par hypothèse de récurrence. On en déduit que I_n est contenu dans l'idéal de $K[[T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n]]$ engendré par $T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}} + \alpha_n^{u_{n-1}}$.

Puisque le résultat précédent vaut pour tout $u_{n-1} \in \mathbf{N}^*$, que tous les $T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}} + \alpha_n^{u_{n-1}}$ sont irréductibles et non associés, et que $K[[T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n]]$ est factoriel, on en déduit que $I_n = (0)$.

On peut maintenant conclure. Puisque f n'est pas nulle, il existe $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in (\mathbf{N}^*)^{n-1}$ tel que f n'appartienne pas à l'idéal

$$(T_1 - \alpha_1 - T_n^{u_1} + \alpha_n^{u_1}, \dots, T_{n-1} - \alpha_{n-1} - T_n^{u_{n-1}} + \alpha_n^{u_{n-1}})$$

de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_K^{n,\text{an}},x}$. On en déduit que $\psi_{\mathbf{u}}^{\#}(f)$ n'appartient pas à l'idéal

$$(T_1 - \alpha_1 + \alpha_n^{u_1}, \dots, T_{n-1} - \alpha_{n-1} + \alpha_n^{u_{n-1}})$$

de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_K^{n,\text{an}}, \psi_{\mathbf{u}}^{-1}(x)}$, ce qui signifie exactement que $\psi_{\mathbf{u}}^{\sharp}(f)$ ne s'annule pas en $\psi_{\mathbf{u}}^{-1}(x)$. $\square$

1.6.3. Anneaux de Banach de base. — Nous introduisons ici une classe d'anneaux de Banach sur lesquels nous travaillerons dans la suite.

Posons $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Remarquons que, par définition du faisceau structural, pour tout point x de X , on a un isomorphisme

$$\text{colim}_{V \ni x} \mathcal{B}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts de x .

Définition 1.6.12. — Soient $x \in X$ et V un voisinage compact de x . On dit qu'un élément f de $\mathcal{O}_x$ est $\mathcal{B}$ -défini sur V s'il appartient à l'image du morphisme naturel $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{O}_x$.

Définition 1.6.13. — Soient T un espace topologique, t un point de T et $\mathcal{U}$ une base de voisinages de t . On dit que $\mathcal{U}$ est *fine* si elle contient une base de voisinages de chacun de ses éléments.

Définition 1.6.14 ([Poi13a, définition 9.1]). — Soient x un point de X et $\mathcal{V}$ une base de voisinages fine de x formée d'ensembles compacts et spectralement convexes. On dit qu'un idéal I de $\mathcal{O}_x$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}$ s'il existe $f_1, \dots, f_p$ appartenant à I tels que

- i) pour tous $V \in \mathcal{V}$ et $i \in \{1, \dots, p\}$, f_i est $\mathcal{B}$ -défini sur V .
- ii) pour tout voisinage compact U de x , il existe une famille $(K_{V,U})_{V \in \mathcal{V}}$ de $\mathbf{R}_{>0}$ telle que, pour tout élément f de I qui est $\mathcal{B}$ -défini sur U et tout élément V de $\mathcal{V}$ contenu dans $\overset{\circ}{U}$, il existe des éléments $a_1, \dots, a_p$ de $\mathcal{B}(V)$ tels que

$$\begin{cases} f = a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \text{ dans } \mathcal{B}(V) ; \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \|a_i\|_V \leq K_{V,U} \|f\|_U. \end{cases}$$

Une famille $(f_1, \dots, f_p)$ vérifiant les propriétés précédentes est appelée $\mathcal{B}$ -système de générateurs fort de l'idéal I relativement à $\mathcal{V}$. On dit également qu'elle engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal I relativement à $\mathcal{V}$.

Définition 1.6.15 ([Poi13a, définition 9.3]). — Soient x un point de X et $\mathcal{V}$ une base de voisinages fine de x formée d'ensembles compacts et spectralement convexes. Soit $d \in \mathbf{N}$. On dit que l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est *fortement régulier* de dimension d relativement à $\mathcal{V}$ si

- i) $\mathcal{O}_x$ est noethérien de dimension de Krull d ;
- ii) il existe des éléments $f_1, \dots, f_d$ de $\mathfrak{m}_x$ tels que $(f_1, \dots, f_d)$ engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal $\mathfrak{m}_x$ relativement à $\mathcal{V}$.

On dit que l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est un *corps fort* (resp. *fortement de valuation discrète*) s'il est fortement régulier de dimension 0 (resp. 1).

Remarque 1.6.16. — La propriété d'être un corps fort s'apparente à une propriété de prolongement analytique. La définition requiert qu'une fonction définie sur U et nulle au voisinage de x soit nulle sur tout voisinage de x appartenant à $\mathcal{V}$ et inclus dans $\mathring{U}$.

Réciproquement, supposons que X satisfait le principe du prolongement analytique (au sens où une fonction nulle au voisinage d'un point l'est encore sur tout ouvert connexe contenant ce point) et que tous les éléments de $\mathcal{V}$ sont connexes. Alors le fait que l'anneau $\mathcal{O}_x$ soit un corps implique que c'est un corps fort pour la base de voisinages $\mathcal{V}$.

Nous reviendrons plus précisément sur la notion de prolongement analytique à la définition 1.6.29 et les énoncés qui la suivent.

Définition 1.6.17 ([Poi13a, définition 9.5]). — On dit que l'anneau de Banach $\mathcal{A}$ est *de base* ou *basique* si tout point b de $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ possède une base fine de voisinages compacts et spectralement convexes $\mathcal{V}_b$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) si $\mathcal{H}(b)$ est de caractéristique non nulle et trivialement valué, alors tout élément de $\mathcal{V}_b$ est contenu dans B_{um} et possède un bord analytique fini ;
- ii) l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort ou un anneau fortement de valuation discrète relativement à $\mathcal{V}_b$.

La condition i) entraîne que tout point de B est décent.

Exemple 1.6.18. — Les exemples 1.1.16 à 1.1.21 donnés plus haut : les corps valués complets, l'anneau $\mathbf{Z}$ et les anneaux d'entiers de corps de nombres, les corps hybrides, les anneaux de valuation discrète, les anneaux de Dedekind trivialement valués sont tous des anneaux de base. On renvoie à [Poi10a, §3.1] pour des détails dans le cas des anneaux d'entiers de corps de nombres.

1.6.4. Anneaux locaux et faisceau structural. — Dans cette section, nous énonçons les principaux résultats obtenus dans [Poi13a]. Posons $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, avec coordonnées $T_1, \dots, T_n$.

1.6.4.1. Types de points. — Il sera utile de distinguer différents types de points dans les espaces affines.

Définition 1.6.19. — Soient b un point de B et x un point de X au-dessus de b . On dit que le point x est *rigide épais* si $T_1(x), \dots, T_n(x)$ sont algébriques sur $\kappa(b)$. Dans le cas contraire, on dit que le point x est *localement transcendant*.

On dit que le point x est *purement localement transcendant* si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\pi_{n,i}(x)$ est localement transcendant au-dessus de $\pi_{i,i-1}(\pi_{n,i}(x)) = \pi_{n,i-1}(x)$.

Dans [Poi13a, définition 8.1], un point est dit rigide épais lorsque $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(b)$, mais c'est en réalité la condition que nous avons énoncée qui est utilisée (sous la forme de l'existence d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathcal{O}_b$ dont l'image dans $\kappa(x)$ est nulle).

Proposition 1.6.20. — Soient b un point décent de B et x un point de X au-dessus de b . Alors, x est rigide épais au-dessus de b si, et seulement si, $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(b)$.

En particulier, la notion de point rigide épais est indépendante du choix des coordonnées $T_1, \dots, T_n$.

Soit $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors x est rigide épais au-dessus de b si, et seulement si, x est rigide épais au-dessus de $\pi_{n,m}(x)$ et $\pi_{n,m}(x)$ est rigide épais au-dessus de b .

Démonstration. — Si $\kappa(x)/\kappa(b)$ est finie, alors x est rigide épais. Réciproquement, supposons que x est rigide épais. Le cas $n = 0$ est trivial et une récurrence permet ensuite de se ramener au cas $n = 1$. Posons $T := T_1$. Par hypothèse, il existe un polynôme $G \in \mathcal{O}_b[T]$ non nul dont l'image dans $\kappa(x)$ est nulle. Le théorème de division de Weierstraß 1.6.5 assure alors que $\kappa(x)$ est engendré, en tant que $\kappa(b)$ -espace vectoriel, par un nombre fini de puissances de $T(x)$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Remarque 1.6.21. — L'analogue de la proposition 1.6.20 tombe en défaut pour les points localement transcendants, même dans le cas où l'anneau de base $\mathcal{A}$ est un corps valué. On renvoie à [Tem21, §5.2.7] pour un contre-exemple dû à M. Temkin, inspiré par un résultat de M. Matignon et M. Reversat dans [MR84].

Remarque 1.6.22. — Soient b un point de B et x un point de X au-dessus de b . Alors, quitte à permuter les coordonnées $T_1, \dots, T_n$, il existe $m_x \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

- i) $\pi_{n, m_x}(x)$ est purement localement transcendant au-dessus de $\pi_n(x)$;
- ii) x est rigide épais au-dessus de $\pi_{n, m_x}(x)$.

Pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $i_1, \dots, i_m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $x_{i_1, \dots, i_m}$ la projection du point x sur l'espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$ de coordonnées $T_{i_1}, \dots, T_{i_m}$. L'entier m_x peut être défini comme la borne supérieure de l'ensemble des entiers m pour lesquels il existe $i_1, \dots, i_m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que

- x_{i_1} est transcendant au-dessus de b ;
- pour tout $j \in \llbracket 2, m \rrbracket$, $x_{i_1, \dots, i_j}$ est transcendant au-dessus de $x_{i_1, \dots, i_{j-1}}$.

1.6.4.2. Points rigides épais d'une droite relative. — Dans cette section, nous supposons que $n = 1$ et notons $T = T_1$. Soit b un point de B et x de X au-dessus de b .

Notation 1.6.23. — Supposons que x est un point rigide épais. On appelle *polynôme minimal épais* de x le polynôme minimal de $T(x)$ sur $\kappa(b)$ et on le note $\mu_{\kappa, x}(T)$.

Rappelons que l'on note $\mu_x(T)$ le polynôme minimal de $T(x)$ sur $\mathcal{H}(b)$ (cf. définition 1.5.5). Dans [Poi13a, définition 8.2], l'auteur affirme que $\mu_{\kappa, x} = \mu_x$, mais cet énoncé est incorrect. En revanche, on peut démontrer que le polynôme minimal sur $\kappa(b)$ est une puissance de celui sur $\mathcal{H}(b)$.

Lemme 1.6.24. — Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Soient $P \in K[X]$ un polynôme irréductible séparable et $s \in \mathbf{N}$. Alors il existe un polynôme irréductible $Q \in K[X]$ et $r \in \mathbf{N}$ tels que

$$P(T^{p^s}) = Q(T)^{p^r}.$$

Démonstration. — On peut supposer que P est unitaire. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K . Par hypothèse, il existe des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \bar{K}$, deux à deux distincts, tels que l'on ait

$$P(T) = \prod_{i=1}^d (T - \alpha_i) \text{ dans } \bar{K}[T].$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, α_i possède une unique racine p^s -ème dans $\bar{K}$. Notons-la α_i^{1/p^s} . On a alors

$$P(T^{p^s}) = \prod_{i=1}^d (T^{p^s} - \alpha_i) = \prod_{i=1}^d (T - \alpha_i^{1/p^s})^{p^s} \text{ dans } \bar{K}[T].$$

Notons $Q(T)$ le polynôme minimal de α_1^{1/p^s} sur K .

Soit $R(T)$ un facteur irréductible de $P(T^{p^s})$ dans $K[T]$. Il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $R(\alpha_i^{1/p^s}) = 0$. En posant $S(T) = R(T^{p^s})$, on a $S(\alpha_i) = 0$. Puisque $P(T)$ est irréductible, $P(T)$ divise $S(T)$ et on a donc $S(\alpha_1) = 0$. On en déduit que $R(\alpha_1^{1/p^s}) = 0$, donc que $Q(T)$ divise $R(T)$, puis que $R(T) = Q(T)$.

On a montré que tous les facteurs irréductibles de $P(T^{p^s})$ sont égaux à $Q(T)$. Par conséquent, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $P(T^{p^s}) = Q(T)^m$. En considérant les décompositions des polynômes dans $\bar{K}[T]$, on montre que m est nécessairement une puissance de p . $\square$

Lemme 1.6.25. — *Supposons que x est un point rigide épais. Alors il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\mu_{\kappa, x}(T) = \mu_x(T)^{e^r},$$

où e désigne l'exposant caractéristique de $\kappa(b)$.

Démonstration. — On suit ici la preuve de [Poi13a, corollaire 5.4]. Il existe un polynôme irréductible et séparable $P \in \kappa(b)[T]$ et un entier $s \in \mathbf{N}$ tels que $\mu_{\kappa, x}(T) = P(T^{e^s})$.

D'après [Poi13a, théorème 5.2], le corps $\kappa(b)$ est hensélien, donc, d'après [Bou06b, VI, §8, Exercices 14a et 12b] ou [Ber93, Proposition 2.4.1], le polynôme P reste irréductible dans $\mathcal{H}(b)[T]$. D'après le lemme 1.6.24, il existe un polynôme irréductible $Q \in \mathcal{H}(b)[T]$ et un entier $r \in \mathbf{N}$ tel que $P(T^{e^s}) = Q(T)^{e^r}$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Définition 1.6.26. — Avec les notations du lemme 1.6.25, on appelle *épaisseur du point x* l'entier

$$\delta(x) := e^r \in \mathbf{N}^*,$$

où e désigne l'exposant caractéristique de $\kappa(b)$.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de préparation de Weierstrass généralisant [Poi13a, théorème 8.6] et valable pour tout point rigide épais d'une droite relative.

Théorème 1.6.27 (Préparation de Weierstraß)

Supposons que x est un point rigide épais. Si μ_x est inséparable et si b est trivialement valué, supposons que b est ultramétrique typique. Soit G un élément de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Supposons que son image dans $\mathcal{O}_{X_b,x}$ n'est pas nulle et notons n sa valuation μ_x -adique. Alors n est multiple de $\delta(x)$ et il existe un unique couple $(\Omega, E) \in \mathcal{O}_{X,x}^2$ tel que

- i) $\Omega \in \mathcal{O}_{B,b}[T]$ est un polynôme unitaire de degré $n \deg(\mu_x)$ dont l'image $\Omega(b)$ dans $\kappa(b)[T]$ satisfait $\Omega(b) = \mu_{\kappa,x}^{n/\delta(x)}$;
- ii) E est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$;
- iii) $G = \Omega E$.

Démonstration. — Posons $d := \deg(\mu_x)$ et $\delta := \delta(x)$. Le polynôme $\mu_{\kappa,x}$ est alors de degré $d\delta$. Choisissons un relevé M de $\mu_{\kappa,x}$ unitaire de degré $d\delta$ dans $\mathcal{O}_{B,b}[T]$. Lorsque l'on parlera de valuation, il s'agira de la valuation μ_x -adique.

Effectuons la division euclidienne de n par m : il existe $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \llbracket 0, \delta - 1 \rrbracket$ tels que $n = a\delta + b$. D'après le théorème de division de Weierstraß 1.6.5 appliqué à G et M^a , il existe $Q \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $R \in \mathcal{O}_{B,b}[T]$ de degré strictement inférieur à $a\delta$ tels que $G = QM^a + R$. Puisque le degré de R est strictement inférieur à $a\delta$, sa valuation est soit infinie, soit strictement inférieure à $a\delta$. Puisqu'elle ne peut être strictement inférieure aux valuations de G et de QM^a , on en déduit qu'elle est infinie. En d'autres termes, on a $R(b) = 0$.

Le raisonnement qui précède montre que la valuation de Q est égale à b . Supposons, par l'absurde, que $b > 0$. Alors, en appliquant le théorème de division de Weierstraß à M et à Q , on obtient un reste dans $\mathcal{O}_{B,b}[T]$ qui s'annule en x et dont le degré est strictement inférieur à bd , et donc à $d\delta = \deg(\mu_{\kappa,x})$. On aboutit donc à une contradiction, ce qui démontre que $b = 0$. On en déduit que δ divise n (et que Q est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$).

En appliquant, à présent, le théorème de division de Weierstraß à M^a et G , on obtient une égalité de la forme $M^a = Q'G + R'$. En raisonnant sur les valuations comme précédemment, on montre que Q' est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et que $R'(b) = 0$. Les fonctions $\Omega := M^a - R'$ et $E := Q'^{-1}$ satisfont alors les propriétés de l'énoncé.

Il reste à démontrer l'unicité du couple (Ω, E) satisfaisant les propriétés de l'énoncé. Partant d'un tel couple, $R := \Omega - M^{n/\delta}$ est un élément de $\mathcal{O}_{B,b}[T]$

de degré strictement inférieur à nd et on a $M^{n/\delta} = E^{-1}G - R$. L'unicité du couple (Ω, E) se déduit donc de l'énoncé d'unicité dans le théorème de division de Weierstraß. $\square$

1.6.4.3. Résultats. — Revenons au cas où $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, avec $n \in \mathbf{N}$ arbitraire. Le résultat qui suit permet de comprendre l'anneau local en un point de X en fonction de celui en sa projection sur la base B . C'est une combinaison de [Poi13a, corollaire 9.11 et théorèmes 9.17 et 9.18].

Théorème 1.6.28. — *Supposons que $\mathcal{A}$ est basique. Soient b un point de B et x un point de X au-dessus de b . Alors l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ est noethérien et fortement régulier de dimension*

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{B,b}) + n - m_x,$$

où m_x est défini comme dans la remarque 1.6.22.

Si x est purement localement transcendant au-dessus de b (c'est-à-dire si $m_x = n$) et si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante ϖ_b), alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante ϖ_b). $\square$

Intéressons-nous, à présent, au principe du prolongement analytique. Nous adopterons la définition suivante, qui reste maniable en l'absence de connexité locale.

Définition 1.6.29 ([Poi13a, définition 11.1]). — Soit S un espace localement annelé. Soit $s \in S$. On dit que S satisfait le principe du prolongement analytique en s si, pour tout ouvert U de S contenant s et tout élément f de $\mathcal{O}_S(U)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{S,s}$ n'est pas nulle, il existe un voisinage V de s dans U tel que, pour tout $t \in V$, l'image de f dans $\mathcal{O}_{S,t}$ n'est pas nulle.

On dit que S satisfait le principe du prolongement analytique s'il le satisfait en tout point.

Remarque 1.6.30. — Soit S un espace localement annelé. Pour tout ouvert U de S et tout élément f de $\mathcal{O}_S(U)$, posons

$$N_{U,f} := \{s \in U : f \neq 0 \text{ dans } \mathcal{O}_{S,s}\}.$$

C'est une partie fermée de U .

L'espace S satisfait le principe du prolongement analytique au sens de la définition 1.6.29 si, et seulement si, pour tout ouvert U de S et tout élément f de $\mathcal{O}_S(U)$, l'ensemble $N_{U,f}$ est ouvert.

La version classique du principe du prolongement analytique stipule que, pour tout ouvert connexe U de S et tout élément f de $\mathcal{O}_S(U)$, s'il existe $s \in U$ tel que l'image de f dans $\mathcal{O}_{S,s}$ soit nulle, alors f est nulle dans $\mathcal{O}_S(U)$. En d'autres termes, l'ensemble $N_{U,f}$ est soit vide, soit égal à U . On observe que cet énoncé découle du principe du prolongement analytique au sens de la définition 1.6.29.

Ce raisonnement permet de montrer que, dans le cas où S est localement connexe, les deux versions du prolongement analytique sont équivalentes.

Remarque 1.6.31. — Soit S un espace localement annelé et soit $s \in S$.

Si $\mathcal{O}_{S,s}$ est un corps, alors S satisfait le principe du prolongement analytique en s .

Si $\mathcal{O}_{S,s}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante π , alors S satisfait le principe du prolongement analytique en s si, et seulement si, il existe un voisinage ouvert U de s dans S tel que, pour tout $t \in U$, l'image de π dans $\mathcal{O}_{S,t}$ ne soit pas nulle.

Exemple 1.6.32. — Si $\mathcal{A}$ est l'un des anneaux cité dans les exemples 1.1.16 à 1.1.21, alors $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfait le principe du prolongement analytique.

Proposition 1.6.33 ([Poi13a, corollaire 11.5]). — *Supposons que $\mathcal{A}$ est basique. Si $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfait le principe du prolongement analytique, alors il en va de même pour $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$.* $\square$

Énonçons finalement un résultat de cohérence. Il sera utilisé à de nombreuses reprises dans ce travail.

Théorème 1.6.34 ([Poi13a, théorème 11.9]). — *Supposons que $\mathcal{A}$ est basique et que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfait le principe du prolongement analytique. Alors, le faisceau structural de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est cohérent.*

CHAPITRE 2

CATÉGORIE DES ESPACES ANALYTIQUES : DÉFINITIONS

Ce chapitre est consacré à la construction de la catégorie des espaces analytiques sur un anneau de Banach. Fixons un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$.

Dans la section 2.1, nous définissons les espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et les morphismes analytiques entre ces espaces. Nous procédons en plusieurs étapes en commençant par les ouverts d'espaces affines analytiques sur $\mathcal{A}$, en poursuivant avec leurs fermés analytiques (appelés modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques), avant de traiter le cas général. La catégorie correspondante est notée $\mathcal{A}\text{-An}$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, lorsque $\mathcal{A} = k$ est un corps valué ultramétrique complet, la définition proposée ne permet pas de retrouver tous les espaces k -analytiques définis par V. Berkovich dans [Ber90, Ber93], mais seulement les espaces sans bords.

Dans la section 2.2, nous définissons la catégorie $\text{An}_{\mathcal{A}}$ des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$. Plus grosse que la première, elle autorise des morphismes entre espaces sur des anneaux de Banach de base différents (mais néanmoins reliés par un morphisme borné). Elle nous permettra, dans un chapitre ultérieur, d'effectuer des extensions des scalaires ou encore de munir les fibres des morphismes de structures analytiques.

Finalement, dans la section 2.3, nous introduisons la notion d'immersion d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et en démontrons quelques propriétés élémentaires, analogues à celles dont on dispose dans d'autres cadres.

2.1. Catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques

Nous définissons ici les notions d'espace analytique et de morphisme d'espaces analytiques au-dessus d'un anneau de Banach $\mathcal{A}$. Ces définitions ne requièrent pas de propriétés particulières sur $\mathcal{A}$.

2.1.1. Morphismes entre ouverts d'espaces affines analytiques. —

Définition 2.1.1. — Soient U et V des ouverts d'espaces affines analytiques sur $\mathcal{A}$. Un *morphisme analytique* de U dans V est un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi: U \rightarrow V$ vérifiant la condition suivante : pour toute partie compacte U' de U et toute partie compacte V' de V telles que $\varphi(U') \subset V'$, le morphisme $\mathcal{O}_V(V') \rightarrow \mathcal{O}_U(U')$ induit par $\varphi^\sharp$ est contractant (*i.e.* pour tout $f \in \mathcal{O}_V(V')$, on a $\|\varphi^\sharp(f)\|_{U'} \leq \|f\|_{V'}$, où $\|\cdot\|_{U'}$ et $\|\cdot\|_{V'}$ désignent les normes uniformes sur U' et V').

Nous pouvons caractériser ces morphismes de la façon suivante.

Proposition 2.1.2. — Soient U et V des ouverts d'espaces affines analytiques sur $\mathcal{A}$. Soit $(\varphi, \varphi^\sharp): (U, \mathcal{O}_U) \rightarrow (V, \mathcal{O}_V)$ un morphisme d'espaces localement annelés. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le morphisme $(\varphi, \varphi^\sharp)$ est un morphisme analytique ;
- ii) pour tout $x \in U$, l'extension de corps $\kappa(\varphi(x)) \rightarrow \kappa(x)$ induite par $\varphi^\sharp$ est isométrique.

Démonstration. — i) $\implies$ ii) Soit $a \in \kappa(\varphi(x))$. Soit $f \in \mathcal{O}_{V, \varphi(x)}$ un relevé de a . Soit V' un voisinage compact de $\varphi(x)$ dans V sur lequel f est définie. Soit U' un voisinage compact de x dans $\varphi^{-1}(V')$. Par hypothèse, on a

$$\|\varphi^\sharp(f)\|_{U'} \leq \|f\|_{V'}$$

et, en particulier,

$$|\varphi^\sharp(f)(x)| \leq \|f\|_{V'}.$$

En outre, on a l'égalité

$$|a| = |f(\varphi(x))| = \lim_{V' \ni \varphi(x)} \|f\|_{V'},$$

où V' parcourt les voisinages compacts de $\varphi(x)$ dans V sur lesquels f est défini. On en déduit que

$$|\varphi^\sharp(f)(x)| \leq |f(\varphi(x))|,$$

puis que

$$|\varphi^\sharp(f)(x)| = |f(\varphi(x))|$$

en distinguant selon que a est nul, auquel cas l'égalité évidente, ou non nul, auquel cas le résultat découle de l'inégalité pour a^{-1} .

ii) $\implies$ i) Soient $x \in U$, V' un voisinage compact de $\varphi(x)$ dans V et U' un voisinage compact de x dans $\varphi^{-1}(V')$. Soit $f \in \mathcal{O}_V(V')$. Par hypothèse, pour tout $x' \in U'$, on a

$$|\varphi^\sharp(f)(x')| = |f(\varphi(x'))| \leq \|f\|_{V'}.$$

Le résultat s'en déduit. $\square$

Il est utile de noter que les morphismes analytiques induisent également des morphismes entre anneaux du type $\mathcal{B}(W)$. Remarquons que, si W est une partie compacte d'un espace affine, tout élément de $\mathcal{O}(W)$ (au sens surconvergent) induit, par définition, une fonction

$$W \longrightarrow \bigsqcup_{x \in W} \mathcal{H}(x),$$

et de même pour tout élément de $\mathcal{B}(W)$. On peut donc comparer des éléments de $\mathcal{O}(W)$ et $\mathcal{B}(W)$.

Lemme 2.1.3. — *Soient U et V des ouverts d'espaces affines analytiques sur $\mathcal{A}$ et $\varphi: U \rightarrow V$ un morphisme analytique. Soit $x \in U$ et soit V' un voisinage compact de $\varphi(x)$ dans V . Alors il existe un voisinage compact U' de x dans U tel que $\varphi(U') \subset \mathring{V}'$ et, pour tout $F \in \mathcal{B}(V')$, $\varphi^\sharp(F|_{\mathring{V}'})|_{U'} \in \mathcal{B}(U')$. Démonstration. — Soit $n \in \mathbf{N}$ (resp. $m \in \mathbf{N}$) tel que U (resp. V) soit un ouvert de l'espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ (resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$). Notons $T = (T_1, \dots, T_n)$ (resp. $S = (S_1, \dots, S_m)$) les coordonnées sur ce dernier. Posons $\varphi^\sharp(S) := (\varphi^\sharp(S_1), \dots, \varphi^\sharp(S_m))$.*

Soit U' un voisinage compact de x dans U tel que $\varphi(U') \subset \mathring{V}'$. Soit $M \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on ait $\|\varphi^\sharp(S_i)\|_{U'} < M$. Quitte à restreindre U' , on peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe une suite de fractions rationnelles $(A_{i,p}(T))_{p \in \mathbf{N}}$ sans pôles sur U' qui converge uniformément vers $\varphi^\sharp(S_i)$ sur U' . On peut également supposer que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a $\|A_{i,p}(T)\|_{U'} < M$. Posons $A_p(T) = (A_{1,p}(T), \dots, A_{m,p}(T))$.

Soit $F \in \mathcal{B}(V')$. Il existe une suite de fractions rationnelles $(B_q(S) = \frac{P_q(S)}{Q_q(S)})_{q \in \mathbf{N}}$ sans pôles sur V' qui converge uniformément vers F sur V' .

Soit $N \in \mathbf{N}$. Il existe $q_N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left\| F - \frac{P_{q_N}(S)}{Q_{q_N}(S)} \right\|_{V'} \leq \frac{1}{2^{N+1}},$$

et donc

$$\left\| \varphi^\sharp(F) - \varphi^\sharp\left(\frac{P_{q_N}(S)}{Q_{q_N}(S)}\right) \right\|_{U'} = \left\| \varphi^\sharp(F) - \frac{P_{q_N}(\varphi^\sharp(S))}{Q_{q_N}(\varphi^\sharp(S))} \right\|_{U'} \leq \frac{1}{2^{N+1}}.$$

Il existe $C_N \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout corps valué $(K, |\cdot|)$ tel qu'il existe un morphisme borné $\psi: \mathcal{A} \rightarrow K$ et tous $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in K$ tels que $\max_{1 \leq i \leq m} (|b_i - a_i|) \leq M$, on ait

$$|\psi(P_{q_N}(b)) - \psi(P_{q_N}(a))| \leq C_N \max_{1 \leq i \leq m} (|b_i - a_i|)$$

et

$$|\psi(Q_{q_N}(b)) - \psi(Q_{q_N}(a))| \leq C_N \max_{1 \leq i \leq m} (|b_i - a_i|).$$

Par hypothèse, $Q_{q_N}(S)$ ne s'annule pas sur V' . Par compacité de V' , on a

$$m_N := \inf(\{|Q_{q_N}(S)(y)| : y \in V'\}) > 0.$$

La borne inférieure de la valeur absolue de $\varphi^\sharp(Q_{q_N}(S)) = Q_{q_N}(\varphi^\sharp(S))$ sur U' est donc supérieure à m_N , donc il existe $p_N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_N$,

$$\inf(\{|Q_{q_N}(A_p)(z)| : z \in U'\}) \geq \frac{1}{2} m_N > 0.$$

On en déduit qu'il existe $p'_N \geq p_N$ tel que

$$\left\| \frac{P_{q_N}(\varphi^\sharp(S))}{Q_{q_N}(\varphi^\sharp(S))} - \frac{P_{q_N}(A_{p'_N}(T))}{Q_{q_N}(A_{p'_N}(T))} \right\|_{U'} \leq \frac{1}{2^{N+1}},$$

et donc

$$\left\| \varphi^\sharp(F) - \frac{P_{q_N}(A_{p'_N}(T))}{Q_{q_N}(A_{p'_N}(T))} \right\|_{U'} \leq \frac{1}{2^N}.$$

Le résultat s'ensuit. □

Concluons avec un exemple classique et fondamental.

Exemple 2.1.4. — Soient $n, m \in \mathbf{N}$. Soient U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$. Nous allons expliquer comment construire un morphisme analytique $\varphi: U \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ à partir de ces données. Plus précisément, si l'on désigne par $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, le morphisme φ satisfera la condition suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi^\sharp(T_i) = f_i.$$

Commençons par définir l'application ensembliste sous-jacente. Soit $x \in U$. Notons $\varphi(x)$ le point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ associé à la semi-norme multiplicative

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ P(T_1, \dots, T_n) &\longmapsto |P(f_1(x), \dots, f_n(x))|. \end{aligned}$$

On définit ainsi une application $\varphi: x \in U \mapsto \varphi(x) \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Sa continuité découle du lemme 1.2.16.

Il suit également de la définition que, pour tout point x de U , on a un morphisme de corps isométrique

$$\varphi_x^\sharp: \mathcal{H}(\varphi(x)) \longrightarrow \mathcal{H}(x).$$

Construisons, à présent, l'application $\varphi^\sharp$. Soient V un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et g un élément de $\mathcal{O}(V)$. Par définition, ce dernier est une application

$$g: V \longrightarrow \coprod_{y \in V} \mathcal{H}(y)$$

telle que

- i) pour tout $y \in V$, on a $g(y) \in \mathcal{H}(y)$;
- ii) pour tout $y \in V$, il existe un voisinage compact V_y de y dans V tel que g soit limite uniforme sur V_y d'une suite de fractions rationnelles sans pôles.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi^\sharp(g): \quad \varphi^{-1}(V) &\longrightarrow \coprod_{x \in \varphi^{-1}(V)} \mathcal{H}(x) \\ x &\longmapsto \varphi_x^\sharp(g(\varphi(x))) \end{aligned}$$

Montrons que $\varphi^\sharp(g)$ est un élément de $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$.

Soit $x \in \varphi^{-1}(V)$. Posons $y := \varphi(x)$. Il existe un voisinage compact V_y de y dans V et une suite de fractions rationnelles $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_{i \in \mathbf{N}}$ sans pôles sur V_y qui converge uniformément vers g sur V_y . Soit U_x un voisinage compact de x dans $\varphi^{-1}(V_y)$. Considérons la suite $\left(\frac{P_i(f_1, \dots, f_n)}{Q_i(f_1, \dots, f_n)}\right)_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}(U_x)$. Pour tout $x' \in U_x$, on a

$$\left| \frac{P_i(f_1, \dots, f_n)(x')}{Q_i(f_1, \dots, f_n)(x')} - \varphi^\sharp(g)(x') \right| = \left| \frac{P_i(\varphi(x'))}{Q_i(\varphi(x'))} - g(\varphi(x')) \right|.$$

On en déduit que la suite $\left(\frac{P_i(f_1, \dots, f_n)}{Q_i(f_1, \dots, f_n)}\right)_{i \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $\varphi^\sharp(g)$ sur U_x . Par conséquent, $\varphi^\sharp(g)$ appartient bien à $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$.

Remarquons que, pour tout $x \in \varphi^{-1}(V)$, on a

$$(*) \quad |\varphi^\sharp(g)(x)| = |g(\varphi(x))|.$$

Cette égalité entraîne que le morphisme $\varphi^\sharp: \mathcal{O}_{\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$ est un morphisme local d'anneaux locaux. Pour le démontrer, il suffit d'utiliser le fait que, dans chacun de ces anneaux locaux, l'idéal maximal est constitué des éléments qui s'annulent au point considéré.

Finalement, nous avons défini un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi: U \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. D'après (*), c'est un morphisme analytique. Par construction, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\varphi^\sharp(T_i) = f_i$.

Ajoutons que le morphisme φ que nous venons de construire est l'unique morphisme qui satisfasse les conditions $\varphi^\sharp(T_i) = f_i$. Cette propriété découle directement des définitions. Nous renvoyons au début de la preuve de la proposition 4.1.1 pour les détails. (La condition d'anneau de base géométrique qui figure son énoncé n'intervient pas dans le cadre de notre exemple.)

Exemple 2.1.5. — Lorsque $n \leq m$ et qu'on applique le résultat de l'exemple 2.1.4 avec $U = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i = T_i$, on obtient un morphisme analytique

$$\pi_{m,n}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$$

qui n'est autre que la projection sur les n premières coordonnées (*cf.* définition 1.2.18).

Dans le cas particulier où $n = 0$, on obtient un morphisme analytique

$$\pi_m: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

qui n'est autre que la projection sur la base (*cf.* définition 1.2.18). On l'appelle également *morphisme structural*.

2.1.2. Modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques. —

Définition 2.1.6. — Soit U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Un *fermé analytique* de U est un quadruplet $(X, \mathcal{O}_X, j, \mathcal{I})$, où $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_U$, X est le support du faisceau $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$, $j: X \rightarrow U$ l'inclusion canonique et $\mathcal{O}_X$ le faisceau $j^{-1}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I})$. Le couple $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace localement annelé.

Remarque 2.1.7. — Soient $(X, \mathcal{O}_X, j, \mathcal{I})$ un fermé analytique d'un ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et Y un ouvert de X . Il existe alors un ouvert V de U tel que $X \cap V = Y$ et Y hérite naturellement d'une structure de fermé analytique de V , le faisceau d'idéaux associé étant $\mathcal{I}|_V$.

Définition 2.1.8. — Soit $(X, \mathcal{O}_X, j, \mathcal{I})$ un fermé analytique d'un ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. On a un morphisme naturel $j^\sharp: \mathcal{O}_U \rightarrow j_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U / \mathcal{I}$. Le couple $(j, j^\sharp)$ définit un morphisme d'espaces localement annelés de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(U, \mathcal{O}_U)$ appelé *immersion fermée* de X dans U .

Ce morphisme est injectif et induit des isomorphismes isométriques entre les corps résiduels.

Définition 2.1.9. — Un *modèle local $\mathcal{A}$ -analytique* est la donnée d'un entier n , d'un ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et d'un fermé analytique X de U .

Le morphisme $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ de l'exemple 2.1.5 induit un morphisme d'espaces localement annelés $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ appelé *morphisme structural*.

Définition 2.1.10. — Soient X et Y des modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques. Par définition, il existe des immersions fermées $j_U: X \rightarrow U$ et $j_V: Y \rightarrow V$, où U et V sont des ouverts d'espaces analytiques sur $\mathcal{A}$.

Un *morphisme analytique* de X dans Y est un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi: X \rightarrow Y$ vérifiant la condition suivante : pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert U' de $j_U(x)$ dans U et un morphisme analytique $\tilde{\varphi}: U' \rightarrow V$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & V \\ j_U \uparrow & & \uparrow j_V \\ j_U^{-1}(U') & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

commute.

Exemple 2.1.11. — Le morphisme structural $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme analytique.

Remarque 2.1.12. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme analytique entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques. Soient X' et Y' des ouverts de X et Y respectivement tels que $\varphi(X') \subset Y'$. Alors, φ induit par restriction un morphisme analytique $X' \rightarrow Y'$.

Lemme 2.1.13. — La notion de morphisme analytique entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques est locale à la source et au but.

Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces localement annelés entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors φ est un morphisme analytique si, et seulement si, pour tout point x de X et tout point y de Y , il existe un voisinage ouvert X'

de x et un voisinage ouvert Y' de y tels que $\varphi(X') \subset Y'$ et le morphisme $X' \rightarrow Y'$ induit par φ soit un morphisme analytique. $\square$

Lemme 2.1.14. — Les morphismes compatibles entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques analytiques se composent.

Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes analytiques entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors $\psi \circ \varphi$ est un morphisme analytique. $\square$

Proposition 2.1.15. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques. Pour tout point x de X , l'extension de corps $\kappa(\varphi(x)) \rightarrow \kappa(x)$ induite par le morphisme $\varphi^\sharp$ est isométrique.

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où X et Y sont des ouverts d'espaces affines analytiques. Le résultat découle alors de la proposition 2.1.2. $\square$

2.1.3. Espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. —

Définition 2.1.16. — Soit X un espace localement annelé.

Une *carte $\mathcal{A}$ -analytique* de X est la donnée d'un ouvert U de X , d'un modèle local $\mathcal{A}$ -analytique Z_U et d'un isomorphisme d'espaces localement annelés $j_U: U \xrightarrow{\sim} Z_U$.

Un *atlas $\mathcal{A}$ -analytique* de X est un ensemble $\{(U, Z_U, j_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ de cartes $\mathcal{A}$ -analytiques de X tel que l'ensemble $\{U\}_{U \in \mathcal{U}}$ forme un recouvrement ouvert de X et que, pour tous $U, U' \in \mathcal{U}$, le morphisme

$$j_U \circ j_{U'}^{-1}: j_{U'}(U \cap U') \longrightarrow j_U(U \cap U')$$

soit un isomorphisme analytique (entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques).

Deux atlas $\mathcal{A}$ -analytiques sur X sont dits *compatibles* si leur réunion est encore un atlas $\mathcal{A}$ -analytique de X . Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas $\mathcal{A}$ -analytiques d'un espace localement annelé.

Remarque 2.1.17. — Il existe un unique atlas maximal compatible avec un atlas donné sur un espace $\mathcal{A}$ -analytique. On l'obtient en considérant la réunion de tous les atlas avec lesquels il est compatible.

Définition 2.1.18. — Un *espace $\mathcal{A}$ -analytique* est un espace localement annelé muni d'une classe d'équivalence d'atlas $\mathcal{A}$ -analytiques.

Les morphismes structuraux des cartes d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X se recollent en un morphisme d'espaces localement annelés $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$, encore appelé *morphisme structural*.

Lorsque nous parlerons d'un atlas d'un $\mathcal{A}$ -espace analytique, il s'agira d'un élément de cette classe d'équivalence.

Remarque 2.1.19. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Tout ouvert U de X hérite par restriction d'une structure d'espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Remarque 2.1.20. — Il découle de la définition 2.1.18 que les propriétés locales des espaces affines $\mathcal{A}$ -analytiques se transfèrent aux espaces $\mathcal{A}$ -analytiques généraux. Par exemple, tout espace $\mathcal{A}$ -analytique est localement compact (et donc localement séparé).

Remarque 2.1.21. — Lorsque $\mathcal{A} = k$ est un corps valué complet, la définition 2.1.18 ne permet pas de retrouver tous les espaces k -analytiques définis par V. Berkovich dans [Ber90, Ber93], mais seulement les espaces sans bords.

Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. À tout point x de X , on peut associer un corps résiduel $\kappa(x)$. En choisissant une carte de X contenant x , on peut munir $\kappa(x)$ d'une valeur absolue. D'après la proposition 2.1.15, celle-ci ne dépend pas du choix de la carte.

Définition 2.1.22. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soit $x \in X$. On munit le corps résiduel $\kappa(x)$ de la valeur absolue provenant de n'importe quelle carte de X contenant x . On note $\mathcal{H}(x)$ le complété correspondant.

Pour tout $f \in \mathcal{O}_X(X)$, on note $f(x)$ l'image de f dans $\mathcal{H}(x)$.

Lemme 2.1.23. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Pour tout $f \in \mathcal{O}_X(X)$, l'application

$$\begin{aligned} |f|: \quad X &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto |f(x)| \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. — On se ramène au cas d'un modèle local, puis au cas d'un espace affine analytique, et on conclut alors par le lemme 1.2.16. $\square$

Définition 2.1.24. — Soient X et Y deux espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Un *morphisme analytique* de X dans Y est une application $\varphi: X \rightarrow Y$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in X$, il existe une carte U de X contenant x et une carte V de Y telles que $\varphi^{-1}(V)$ soit un ouvert de X et le morphisme

$$Z_U \cap j_U(\varphi^{-1}(V)) \longrightarrow Z_V$$

induit par $j_V \circ \varphi \circ j_U^{-1}$ soit un morphisme analytique (entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques).

On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-An}}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes analytiques de X dans Y .

Remarque 2.1.25. — Un morphisme analytique $\varphi: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces localement annelés.

La définition donnée est abusive en ce qu'elle ne précise pas les atlas choisis sur X et Y (au sein de la classe d'équivalence fixée). On vérifie cependant qu'elle ne dépend pas de ces choix, car la notion de morphisme analytique entre modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques est locale (cf. lemme 2.1.13).

Exemple 2.1.26. — Le morphisme structural $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme analytique.

Nous disposons de résultats analogues à ceux des lemmes 2.1.13 et 2.1.14 et de la proposition 2.1.15.

Proposition 2.1.27. —

- i) La notion de morphisme analytique d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques est locale à la source et au but (au sens du lemme 2.1.13).
- ii) Les morphismes compatibles d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques se composent (au sens du lemme 2.1.14).
- iii) Les morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques induisent des plongements isométriques entre les corps résiduels (au sens de la proposition 2.1.15).

□

Définition 2.1.28. — La catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques est la catégorie dont les objets sont les espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et dont les morphismes sont les morphismes analytiques. Nous noterons $\mathcal{A}\text{-An}$ cette catégorie.

2.2. Catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$

Nous définissons ici une catégorie plus grande que $\mathcal{A}\text{-An}$. Elle nous permettra de procéder à des extensions des scalaires.

Définition 2.2.1. — Un *espace analytique au-dessus de $\mathcal{A}$* est la donnée d'un morphisme borné d'anneaux de Banach $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et d'un espace $\mathcal{B}$ -analytique.

Remarquons que l'espace $\mathcal{B}$ -analytique est alors muni une structure d'espace localement $\mathcal{A}$ -annelé.

Soit $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ un morphisme borné de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach. Notons $\mathcal{M}(\tau): \mathcal{M}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$ le morphisme d'espaces localement annelés associé (cf. lemme 1.2.12).

Nous allons maintenant définir une notion de morphisme d'espaces analytiques au-dessus de τ , allant d'un espace $\mathcal{B}'$ -analytique vers un espace $\mathcal{B}$ -analytique. Nous procéderons de la même manière que pour les morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques en commençant par définir les morphismes entre ouvert d'espaces affines analytiques.

Définition 2.2.2. — Soient U un ouvert d'un espace affine analytique sur $\mathcal{B}'$ et V un ouvert d'un espace affine analytique sur $\mathcal{B}$. Un *morphisme analytique de U dans V au-dessus de τ* est un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi: U \rightarrow V$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}') & \xrightarrow{\mathcal{M}(\tau)} & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \end{array},$$

où les morphismes verticaux sont les morphismes structuraux, et qui satisfait la condition suivante : pour toute partie compacte U' de U et toute partie compacte V' de V telles que $\varphi(U') \subset V'$, le morphisme $\mathcal{O}_V(V') \rightarrow \mathcal{O}_U(U')$ induit par $\varphi^\#$ est contractant (i.e. pour tout $a \in \mathcal{O}_V(V')$, on a $\|\varphi^\#(a)\|_{U'} \leq \|a\|_{V'}$, où $\|\cdot\|_{U'}$ et $\|\cdot\|_{V'}$ désignent les normes uniformes sur U' et V').

Remarque 2.2.3. — Dans la situation de la définition précédente, le morphisme τ munit U d'une structure d'espace localement $\mathcal{B}$ -annelé et le morphisme analytique φ respecte cette structure.

Exemple 2.2.4. — Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le lemme 1.2.12, le morphisme τ induit un morphisme d'espaces localement annelés $\mathbf{A}_\tau^{n,\text{an}}: \mathbf{A}_{\mathcal{B}'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$. C'est un morphisme analytique au-dessus de τ .

Définition 2.2.5. — Soient X un fermé analytique d'un ouvert U d'un espace affine analytique sur $\mathcal{A}$ et Y un fermé analytique d'un ouvert V d'un espace affine analytique sur $\mathcal{A}$. Notons $j_U: X \rightarrow U$ et $j_V: Y \rightarrow V$ les immersions fermées associées.

Un *morphisme analytique de X dans Y au-dessus de τ* est un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi: X \rightarrow Y$ vérifiant la condition suivante : pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert U' de $j_U(x)$ dans U et un

morphisme analytique $\tilde{\varphi}: U' \rightarrow V$ au-dessus de τ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & V \\ j_U \uparrow & & \uparrow j_V \\ j_U^{-1}(U') & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

commute.

Définition 2.2.6. — Soient X un espace $\mathcal{B}'$ -analytique et Y un espace $\mathcal{B}$ -analytique. Un *morphisme analytique de X dans Y au-dessus de τ* est une application $\varphi: X \rightarrow Y$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in X$, il existe une carte U de X contenant x et une carte V de Y telles que $\varphi^{-1}(V)$ soit un ouvert de X et le morphisme

$$Z_U \cap j_U(\varphi^{-1}(V)) \longrightarrow Z_V$$

induit par $j_V \circ \varphi \circ j_U^{-1}$ soit un morphisme analytique au-dessus de τ .

On note $\text{Hom}_{\text{An}_{\mathcal{A}}, \tau}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes analytiques de X dans Y au-dessus de τ .

Remarque 2.2.7. — Comme dans le cas des morphismes entre espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, les morphismes analytiques au-dessus de τ sont des morphismes d'espaces localement annelés.

Remarque 2.2.8. — Dans la situation de la définition précédente, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}') & \xrightarrow{\mathcal{M}(\tau)} & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \end{array} .$$

En particulier, le morphisme analytique φ respecte les structures d'espaces localement $\mathcal{B}$ -annelés de X (induite par le morphisme $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$) et Y .

Remarque 2.2.9. — Supposons que le morphisme τ est le morphisme identité $\text{id}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (et donc que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$). La notion de morphisme analytique au-dessus de id coïncide alors avec celle de morphisme analytique entre espaces $\mathcal{B}$ -analytiques.

Les propriétés des morphismes entre espaces $\mathcal{A}$ -analytiques se transposent *mutatis mutandis* à notre nouveau cadre.

Proposition 2.2.10. —

- i) La notion de morphisme analytique au-dessus de τ est locale à la source et au but (au sens du lemme 2.1.13).
- ii) Les morphismes analytiques au-dessus de τ induisent des plongements isométriques entre les corps résiduels (au sens de la proposition 2.1.15).

□

La propriété de composition prend une forme un peu différente.

Lemme 2.2.11. — Soient $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ et $\tau': \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''$ deux morphismes bornés de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach. Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme analytique au-dessus de τ' et $\varphi': Y \rightarrow Z$ un morphisme analytique au-dessus de τ . Alors le morphisme $\varphi' \circ \varphi: X \rightarrow Z$ est un morphisme analytique au-dessus de $\tau' \circ \tau$. □

Définition 2.2.12. — La catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$ est définie comme suit. Ses objets sont les espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$. Pour toutes $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, tout espace $\mathcal{B}'$ -analytique X et tout espace $\mathcal{B}$ -analytique Y , l'ensemble des morphismes de X dans Y est

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{An}_{\mathcal{A}}}(X, Y) := \bigcup_{\tau} \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}_{\mathcal{A}, \tau}}(X, Y),$$

où τ parcourt l'ensemble des morphismes bornés de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

On note $\mathrm{An}_{\mathcal{A}}$ la catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$.

Exemple 2.2.13. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. À tout point x de X , on peut associer canoniquement un morphisme $\gamma_x: \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$ d'espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$ dont l'image est $\{x\}$.

Pour le construire, on peut raisonner localement et donc supposer que X est un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \mathrm{an}}$. Le morphisme $\mathrm{ev}_x: \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$ d'évaluation en x induit alors le morphisme

$$\gamma_x: \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \longrightarrow X \hookrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \mathrm{an}}$$

recherché. C'est un morphisme au-dessus du morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$ obtenu en restreignant le morphisme ev_x .

2.3. Immersions d'espaces analytiques

Revenons maintenant à la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $\mathcal{A}\text{-An}$.

Définition 2.3.1. — Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Un *fermé analytique* de X est un quadruplet $(Z, \mathcal{O}_Z, j, \mathcal{I})$, où $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent

d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, Z le lieu des zéros de $\mathcal{I}$, $j: Z \rightarrow X$ l'inclusion canonique et $\mathcal{O}_Z$ le faisceau $j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

L'espace $(Z, \mathcal{O}_Z)$ est naturellement muni d'une structure d'espace $\mathcal{A}$ -analytique, obtenue en restreignant les cartes des atlas de X .

Remarque 2.3.2. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors l'annulateur $\text{Ann}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ est un faisceau d'idéaux cohérents dont le lieu des zéros coïncide avec le support de $\mathcal{F}$ (cf. [GR84, Annex, §4, 5]). En particulier, le support de $\mathcal{F}$ est naturellement muni d'une structure de fermé analytique de X .

Définition 2.3.3. — Soit $i: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. On dit que i est

- une *immersion ouverte* s'il induit un isomorphisme entre X et un ouvert de Y (qui hérite naturellement d'une structure d'espace analytique d'après la remarque 2.1.19) ;
- une *immersion fermée* s'il induit un isomorphisme entre X et un fermé analytique de Y ;
- une *immersion* s'il existe une immersion ouverte i_1 et une immersion fermée i_2 telles que $i = i_1 \circ i_2$.

Énonçons quelques propriétés des immersions.

Lemme 2.3.4. — Soient $i: X \rightarrow Y$ une immersion fermée d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $\mathcal{I}$ le noyau du morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow i_*\mathcal{O}_X$. C'est un faisceau d'idéaux cohérent. Notons Z le fermé analytique de Y qu'il définit et $j: Z \rightarrow Y$ le morphisme d'inclusion. Alors, il existe un unique isomorphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $\psi: X \rightarrow Z$ tel que $i = j \circ \psi$. $\square$

Lemme 2.3.5. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit U un ouvert de Y et notons $i_U: U \rightarrow Y$ l'immersion ouverte associée. Supposons que $\varphi(X) \subset U$. Alors, le morphisme φ se factorise par i_U .

Démonstration. — Le résultat découle du fait que la notion de morphisme analytique est locale au but, cf. proposition 2.1.27, i). $\square$

Proposition 2.3.6. — La composée d'un nombre fini d'immersions ouvertes (resp. immersions fermées, resp. immersions) est une immersion ouverte (resp. immersion fermée, resp. immersion).

Démonstration. — Il suffit de démontrer le résultat pour la composée de deux morphismes. Le résultat pour les immersions ouvertes et fermées est immédiat.

Soient $i: X \rightarrow Y$ et $j: Y \rightarrow Z$ des immersions. On suit la preuve pour le cas des schémas, cf. [Sta20, lemma 02V0]. Écrivons $i = i_1 \circ i_2$ et $j = j_1 \circ j_2$ où $i_2: X \rightarrow U$ et $j_2: Y \rightarrow V$ sont des immersions fermées et $i_1: U \rightarrow Y$ et $j_1: V \rightarrow Z$ sont des immersions ouvertes. Il existe un ouvert V' de V tel que $U = j_2^{-1}(V')$. On peut alors écrire $j \circ i$ comme la composée de l'immersion ouverte

$$V' \longrightarrow V \longrightarrow Z$$

et de l'immersion fermée

$$X \longrightarrow U = j_2^{-1}(V') \longrightarrow V'.$$

□

Lemme 2.3.7. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $i: Y' \rightarrow Y$ une immersion fermée d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Le morphisme φ se factorise par i en tant que morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques si, et seulement si, il se factorise par i en tant que morphisme d'espaces localement annelés.

Démonstration. — Si φ se factorise par i en tant que morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, il se factorise par i en tant que morphisme d'espaces localement annelés, par définition.

Démontrons l'implication réciproque. Supposons qu'il existe un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi': X \rightarrow Y'$ tel que $\varphi = i \circ \varphi'$. On veut montrer que φ' est un morphisme d'espaces analytiques. Par définition, Y' est isomorphe à Z dans la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. On peut donc supposer que $Y' = Z$ et que $i: Z \rightarrow X$ est le morphisme d'inclusion.

La question étant locale, on peut supposer que X et Y sont des fermés analytiques d'ouverts U et V d'espaces affines et que φ se relève en un morphisme $\tilde{\varphi}: U \rightarrow V$. L'espace Z est alors un fermé analytique de V et le morphisme $\tilde{\varphi}$ relève φ' . Le résultat s'ensuit. □

Proposition 2.3.8. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $i: Y' \rightarrow Y$ une immersion fermée d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $\mathcal{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux définissant le fermé analytique $Z := i(Y')$ de Y . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) le morphisme φ se factorise par i , en tant que morphisme d'espaces analytiques ;

ii) l'application $\varphi^*\mathcal{I} \rightarrow \varphi^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ est nulle.

En outre, lorsqu'elles sont satisfaites, le morphisme $\varphi': X \rightarrow Y'$ tel que $\varphi = i \circ \varphi'$ est unique.

Démonstration. — Dans la catégorie des espaces localement annelés, le résultat est démontré dans [Sta20, lemma 01HP]. Notre résultat s'en déduit en utilisant le lemme 2.3.7. $\square$

Proposition 2.3.9. — Soit $i: X \rightarrow Y$ une immersion d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) le morphisme i est une immersion fermée ;
- ii) l'image de i est fermée dans Y .

De même, les propositions suivantes sont équivalentes :

- i') le morphisme i est une immersion ouverte ;
- ii') l'image de i est ouverte dans Y .

Démonstration. — L'implication $i) \implies ii)$ est évidente. Démontrons $ii) \implies i)$. On suit la preuve de [Sta20, lemma 01IQ] (pour les schémas). Supposons que $i(X)$ est fermée dans Y . Puisque le morphisme i est une immersion, il induit un isomorphisme avec son image et il suffit donc de montrer que $i(X)$ est un fermé analytique de Y . Par définition, il existe un ouvert U de Y et un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ sur U tel que $i(X)$ soit le fermé analytique de U associé à l'idéal $\mathcal{I}$.

Remarquons que l'on a

$$\mathcal{I}_{|U \setminus i(X)} = \mathcal{O}_{|U \setminus i(X)} = (\mathcal{O}_{Y \setminus i(X)})_{|U \setminus i(X)}.$$

On peut donc définir un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J}$ en recollant $\mathcal{I}$ et $\mathcal{O}_{Y \setminus i(X)}$. Le faisceau $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ est alors supporté sur U et sa restriction à U est égale à $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$. Le résultat s'en déduit.

L'équivalence $i') \iff ii')$ découle directement des définitions. $\square$

Proposition 2.3.10. — Soit $i: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) le morphisme i est une immersion ;
- ii) pour tout $y \in i(X)$, il existe un voisinage ouvert V de y dans Y tel que le morphisme $i^{-1}(V) \rightarrow V$ induit par i soit une immersion fermée.

Démonstration. — L'implication $i) \implies ii)$ découle des définitions. Démontrons $ii) \implies i)$. Supposons que, pour tout $y \in i(X)$, il existe un voisinage V_y de y dans Y tel que i induise un isomorphisme entre $i^{-1}(V_y)$ et un fermé analytique Z_y de V_y défini par un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}^y$.

Posons $U := \bigcup_{y \in i(X)} V_y$. C'est un ouvert de Y sur lequel les faisceaux $\mathcal{I}^y$ se recollent en un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$. On vérifie que le morphisme i induit un isomorphisme entre X et le fermé analytique de Y défini par $\mathcal{I}$. $\square$

CHAPITRE 3

QUELQUES RÉSULTATS TOPOLOGIQUES SUR LES ANNEAUX DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Le but principal de ce chapitre est de démontrer un résultat de fermeture des idéaux du faisceau structural. Il sera essentiel, par la suite, dans la démonstration des propriétés de la catégorie des espaces analytiques (*cf.* proposition 4.1.1, dont découle le théorème 4.1.4) ou pour obtenir des propriétés d’annulation cohomologiques sur des espaces ouverts (*cf.* théorème 8.5.14).

Dans la section 3.1, nous démontrons des résultats techniques permettant de comparer des normes (norme résiduelle, norme quotient, etc.) sur des anneaux de Banach. Nous commençons par rappeler quelques définitions et résultats issus de [Poi10a], et les adaptons ensuite afin de pouvoir les appliquer à d’autres anneaux.

La section 3.2 contient le cœur technique de ce chapitre : la démonstration d’une version raffinée du théorème de division de Weierstraß 1.6.5 dans laquelle on garde un contrôle sur les normes du reste et du quotient.

Dans la section 3.3, nous démontrons finalement un résultat de fermeture pour les idéaux du faisceau structural ou, plus généralement, les sous-modules d’une puissance finie du faisceau structural. Pour ce faire, nous devons imposer à l’anneau de base au-dessus duquel nous travaillons de satisfaire certaines conditions, que nous regroupons sous le vocable d’anneau de base géométrique. Nos exemples usuels (corps valués, anneaux d’entiers de corps de nombres, corps hybrides, anneaux de valuation discrète, anneaux de Dedekind trivialement valués) satisfont ces conditions.

3.1. Normes sur les quotients

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soit $G(S)$ un polynôme unitaire non constant à coefficients dans $\mathcal{A}$:

$$G = S^d + \sum_{i=0}^{d-1} g_i S^i \in \mathcal{A}[S].$$

Dans cette section, nous étudierons plusieurs normes et semi-normes dont on peut munir le quotient $\mathcal{A}[S]/(G(S))$.

3.1.1. Généralités. — Cette section est reprise de [Poi10a, §5.2].

Nous noterons encore $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{A}^d$ définie par

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad \mathcal{A}^d &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) &\longmapsto \max(\|a_0\|, \dots, \|a_{d-1}\|) \end{aligned} .$$

Nous avons un isomorphisme

$$\begin{aligned} n_G : \quad \mathcal{A}^d &\longrightarrow \mathcal{A}[S]/(G(S)) \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i \end{aligned} .$$

Définition 3.1.1. — On appelle *norme divisorielle* sur $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ la norme $\|\cdot\|_{\text{div}}$ définie par

$$\|F\|_{\text{div}} := \|n_G^{-1}(F)\|$$

pour $F \in \mathcal{A}[S]/(G(S))$.

Introduisons maintenant les semi-normes résiduelles. Pour $v \in \mathbf{R}_{>0}$, considérons la norme $\|\cdot\|_v$ sur $\mathcal{A}[S]$ définie par

$$\|F\|_v := \max_{0 \leq i \leq n} (\|a_i\| v^i)$$

pour $F = \sum_{i=0}^n a_i S^i \in \mathcal{A}[S]$.

Définition 3.1.2. — Pour $v \in \mathbf{R}_{>0}$, on appelle *semi-norme résiduelle de rayon v* la semi-norme $\|\cdot\|_{v,\text{rés}}$ sur $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ définie par

$$\|F\|_{v,\text{rés}} := \inf (\|F'\|_v : F' \in \mathcal{A}[S], F' = F \pmod{G})$$

pour $F \in \mathcal{A}[S]/(G(S))$.

Soit v_1 un élément de $\mathbf{R}_{>0}$ satisfaisant l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{d-1} \|g_i\| v_1^{i-d} \leq \frac{1}{2}.$$

Proposition 3.1.3 ([Poi10a, théorème 5.2.1, lemmes 5.2.2 et 5.2.3])

Soit $v \geq v_1$. On a les propriétés suivantes :

- i) la semi-norme $\|\cdot\|_{v,\text{rés}}$ sur $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ est une norme ;
- ii) l'anneau $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ muni de $\|\cdot\|_{v,\text{rés}}$ est un anneau de Banach ;
- iii) pour tout $F \in \mathcal{A}[S]/(G(S))$ on a les inégalités :

$$v^{-d+1} \|F\|_{v,\text{rés}} \leq \|F\|_{\text{div}} \leq 2 \|F\|_{v,\text{rés}}.$$

En particulier, les normes $\|\cdot\|_{\text{div}}$ et les normes $\|\cdot\|_{v,\text{rés}}$ pour $v \geq v_1$ sont toutes équivalentes. $\square$

Les constantes que nous donnons ne figurent pas dans l'énoncé de [Poi10a, théorème 5.2.1], mais sa preuve les fournit.

Définition 3.1.4. — On appelle *semi-norme spectrale* sur $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ la semi-norme $\|\cdot\|_{\text{sp}}$ obtenue comme semi-norme spectrale de $\|\cdot\|_{v_1,\text{rés}}$. Elle est indépendante du choix de v_1 .

Notons Z_G le fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ défini par l'équation $G = 0$. Le morphisme d'anneaux de Banach $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S]/(G(S))$ induit un morphisme d'espaces localement annelés

$$\varphi_G: Z_G \longrightarrow B.$$

Soit v_2 un élément de $\mathbf{R}_{>0}$ satisfaisant l'inégalité

$$v_2 \geq \max_{0 \leq i \leq d-1} (\|g_i\|^{1/(d-i)}).$$

Lemme 3.1.5 ([Poi10a, lemme 5.2.4]). — Pour tout $v \geq v_2$, le disque $\overline{D}_B(v)$ contient toutes les racines de G dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ et le spectre de l'anneau $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ muni de $\|\cdot\|_{v,\text{rés}}$ s'identifie à Z_G .

En particulier, d'après le lemme 1.1.12, la semi-norme spectrale $\|\cdot\|_{\text{sp}}$ s'identifie à la semi-norme uniforme sur Z_G . $\square$

3.1.2. Condition $(\mathcal{B}_{N_G})$. — Nous introduisons ici une condition permettant de comparer normes résiduelles et normes spectrales dans le cadre de la

section 3.1.1. Il s'agit d'un outil technique qui sera pour nous crucial dans la suite.

Cette section est principalement reprise de [Poi10a, §5.3] et [Poi13a, §6]. Signalons un changement de notation : la condition (N_G) de [Poi13a] sera notée ici $(\mathcal{B}N_G)$, en vue d'une généralisation à la section 3.1.3.

Définition 3.1.6 ([Poi13a, définition 4.1]). — On dit qu'une partie compacte U de B satisfait la condition $(\mathcal{B}N_G)$ si elle est spectralement convexe et s'il existe $v_{U,0} \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $v \geq v_{U,0}$, la semi-norme $\|\cdot\|_{U,v,\text{rés}}$ sur $\mathcal{B}(U)[S]/(G(S))$ soit équivalente à la semi-norme spectrale.

On peut supposer que $v_{U,0}$ satisfait les inégalités

$$\sum_{i=0}^{d-1} \|g_i\|_U v_{U,0}^{i-d} \leq \frac{1}{2} \text{ et } v_{U,0} \geq \max_{0 \leq i \leq d-1} (\|g_i\|_U^{1/(d-i)}).$$

Nous nous placerons toujours sous cette hypothèse dans la suite.

Proposition 3.1.7 ([Poi10a, proposition 5.3.3]). — Soit U une partie compacte de B qui satisfait la condition $(\mathcal{B}N_G)$. Alors, pour tout $v \geq v_{U,0}$, les normes $\|\cdot\|_{U,\text{div}}$ et $\|\cdot\|_{U,v,\text{rés}}$ sur $\mathcal{B}(U)[T]/(G(T))$ sont équivalentes à la norme uniforme sur $\varphi_G^{-1}(U)$. De plus, le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach naturel

$$\mathcal{B}(U)[T]/(G(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(\varphi_G^{-1}(U)),$$

où $\varphi_G^{-1}(U)$ est vu comme partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$, est un isomorphisme bi-borné. $\square$

Nous rappelons maintenant quelques conditions suffisantes pour que la condition $(\mathcal{B}N_G)$ soit satisfaite. En pratique, nous utiliserons la première dans la partie ultramétrique de l'espace et la seconde dans la partie de caractéristique nulle.

Proposition 3.1.8 ([Poi13a, corollaire 6.3 et proposition 6.14])

Soit U une partie compacte et spectralement convexe de B . Supposons que U possède un bord analytique Γ_U satisfaisant l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1. Γ_U est fini et, pour tout $\gamma \in \Gamma_U$, $G(\gamma)$ est sans facteurs multiples ;
2. la fonction $|\text{Rés}(G, G')|$, où $\text{Rés}(G, G')$ désigne le résultant des polynômes G et G' , est bornée inférieurement sur Γ_U par une constante strictement positive.

Alors, U satisfait la condition $(\mathcal{B}N_G)$. $\square$

Dans le cas particulier où le polynôme G est de degré 1, la condition $(\mathcal{BN}_G)$ est toujours vérifiée (ce que l'on peut démontrer soit directement, soit à l'aide de la proposition 3.1.8). À l'aide des résultats de ce paragraphe, nous obtenons l'énoncé suivant. Notons qu'il serait ici plus simple de le démontrer directement.

Proposition 3.1.9. — *Supposons que le polynôme G est de degré 1. Alors, pour toute partie compacte spectralement convexe U de B , la norme $\|\cdot\|_{U,\text{div}}$ sur $\mathcal{B}(U)[T]/(G(T))$ est équivalente à la norme uniforme sur $\varphi_G^{-1}(U)$ et le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach naturel*

$$\mathcal{B}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(U)[T]/(G(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(\varphi_G^{-1}(U))$$

est un isomorphisme bi-borné.

En particulier, le morphisme naturel $Z_G \rightarrow B$ est un isomorphisme d'espaces annelés. $\square$

Les résultats précédents peuvent s'appliquer dans le cadre d'endomorphismes polynomiaux de la droite.

Soit W une partie compacte et spectralement convexe de B . Soit P un polynôme unitaire non constant à coefficients dans $\mathcal{B}(W)$. Le morphisme naturel

$$\varphi_P^\sharp : \mathcal{B}(W)[T] \longrightarrow \mathcal{B}(W)[T, S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(W)[S]$$

induit un endomorphisme φ_P de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(W)}^{1,\text{an}}$. Pour toute partie compacte spectralement convexe U de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(W)}^{1,\text{an}}$ (avec coordonnée T), notons $Z_{U, P(S)-T}$ le fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(U)}^{1,\text{an}}$ (avec coordonnée S) défini par l'équation $P(S) - T = 0$. D'après la proposition 3.1.9, il s'identifie à $\varphi_P^{-1}(U)$.

En particulier, pour tous $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que $0 = r < s$ ou $0 < r \leq s$, si $U = \overline{C}_W(r, s)$, $Z_{U, P(S)-T}$ s'identifie à $\overline{C}_W(P; r, s)$.

Corollaire 3.1.10 ([Poi13a, proposition 7.1]). — *Soient W, P, r, s comme ci-dessus. Supposons que $\overline{C}_W(r, s)$ satisfait la condition $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$. Alors, pour tout $w \geq v_0$, les normes $\|\cdot\|_{\overline{C}_W(r, s), \text{div}}$ et $\|\cdot\|_{\overline{C}_W(r, s), w, \text{rés}}$ sur $\mathcal{B}(\overline{C}_W(r, s))[S]/(P(S) - T)$ sont équivalentes à la norme uniforme sur $\overline{C}_W(P; r, s)$. De plus, le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach*

$$\mathcal{B}(\overline{C}_W(r, s))[S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{C}_W(P; r, s))$$

est un isomorphisme bi-borné. $\square$

On peut déduire de la proposition 3.1.8 des conditions permettant d'assurer que certaines couronnes $\overline{C}_W(r, s)$ satisfont la condition $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$.

Proposition 3.1.11 ([Poi13a, proposition 6.5 et lemme 6.16])

Soient W, P, r, s comme ci-dessus.

- i) Supposons que W est contenue dans la partie ultramétrique de B et possède un bord analytique fini. Alors $\overline{C}_W(r, s)$ satisfait la condition $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$.
- ii) Supposons que $P(b) \in \mathcal{H}(b)[T]$ est séparable. Soient $r, r', s, s' \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que $r \prec r'$ et $0 < s' < s$. Alors, il existe $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vérifiant $r \prec r_1 \prec r_2 \prec r'$ et $s' < s_1 < s_2 < s$, un voisinage compact V_0 de b dans B et $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que, pour toute partie compacte spectralement convexe V de V_0 contenant b , tout $u \in [r_1, r_2]$ et tout $v \in [s_1, s_2]$, tout $Q \in \mathcal{B}(V)[T]$ tel que $\|Q - P\|_{V, \infty} \leq \varepsilon$, la couronne $\overline{C}_V(u, v)$ satisfasse la condition $(\mathcal{BN}_{Q(S)-T})$.

□

L'énoncé de [Poi13a, lemme 6.16] est moins précis que ii), mais sa preuve fournit cette version raffinée.

Corollaire 3.1.12. — Soient $b \in B$ et x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ (avec coordonnée S) au-dessus de b . Soit $\mathcal{V}_b$ une base fine de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B . Si $\mathcal{H}(b)$ est de caractéristique non nulle et trivialement valué, supposons que tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini. Alors x possède une base fine $\mathcal{V}_x$ de voisinages compacts spectralement convexes de la forme

$$\overline{C}_V(P, r, s),$$

avec $V \in \mathcal{V}_b$, $P \in \mathcal{B}(V)[S]$ unitaire non constant et $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. En outre, on peut supposer que, pour tous V, P, r, s tels que $\overline{C}_V(P, r, s)$ appartienne à $\mathcal{V}_x$,

- i) $\overline{C}_b(P, r, s)$ est connexe ;
- ii) il existe un voisinage V_0 de V tel que $P \in \mathcal{B}(V_0)[S]$ et $r_0, s_0 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec $r_0 \prec r$ et $s_0 > s$ tels que, pour tout $V' \in \mathcal{V}_b$ contenu dans V_0 et tous $r', s' \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vérifiant $r_0 \prec r' \prec r$ et $s_0 > s' > s$, $\overline{C}_{V'}(P', r', s')$ appartienne à $\mathcal{V}_x$;
- iii) la couronne $\overline{C}_V(r, s)$ (avec coordonnée T) satisfait la propriété $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$.

Démonstration. — Commençons par une remarque topologique qui nous permettra d'assurer que les bases de voisinages que l'on construit sont fines. Soient V une partie compacte de B , $P \in \mathcal{O}(V)[S]$ et $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Soit U un voisinage de $\overline{C}_V(P, r, s)$. Alors, pour tout voisinage V' de V assez petit et

tous $r', s' \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec $r' \prec r$ assez proche de r et $s' > s$ assez proche de s , on a $\overline{C}_{V'}(P, r', s') \subset U$.

L'énoncé découle alors des propositions 1.5.11 et 3.1.11, si x est rigide dans la fibre au-dessus de b , et des propositions 1.5.12 et 3.1.11 sinon. $\square$

Précisons le résultat dans le cas des points rigides épais.

Corollaire 3.1.13. — Soient $b \in B$ et x un point rigide épais de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ (avec coordonnée S) au-dessus de b . Notons d le degré de $\mu_{\kappa,x} \in \kappa(b)[S]$. Soit P_0 un relevé unitaire de degré d de $\mu_{\kappa,x}$ dans $\mathcal{O}_{B,b}[S]$. Soit $\mathcal{V}_b$ une base fine de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B sur lesquels P_0 est $\mathcal{B}$ -définie. Alors x possède une base fine $\mathcal{V}_x$ de voisinages compacts spectralement convexes de la forme

$$\overline{D}_V(P_0, s),$$

avec $V \in \mathcal{V}_b$ et $s \in \mathbf{R}_{>0}$. En outre, on peut supposer que pour tous V, s tels que $\overline{D}_V(P_0, s)$ appartienne à $\mathcal{V}_x$,

- i) $\overline{D}_b(P_0, s)$ est connexe ;
- ii) il existe un voisinage V_0 de V et $s_0 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec $s_0 > s$ tels que, pour tout $V' \in \mathcal{V}_b$ tel que $V \subset V' \subset V_0$ et tout $s' \in]s, s_0[$, $\overline{D}_{V'}(P', s')$ appartienne à $\mathcal{V}_x$.

Si $\mu_{\kappa,x}$ est séparable ou si tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini, on peut également supposer que

- iii) le disque $\overline{D}_V(s)$ (avec coordonnée T) satisfait la propriété $(\mathcal{B}N_{P_0(S)-T})$.

Si $\mathcal{H}(b)$ est ultramétrique et non trivialement valué, on peut également supposer que

- iii') il existe $Q \in \mathcal{B}(V)[S]$ unitaire de degré d tel que $Q(b) \in \mathcal{H}(b)[T]$ soit séparable et un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}_{>0}$ contenant s tels que, pour tout voisinage compact spectralement convexe W de b dans V et tout $s' \in I$, on ait $\overline{D}_W(Q, s') = \overline{D}_W(P_0, s')$ et le disque $\overline{D}_W(s)$ (avec coordonnée T) satisfasse la propriété $(\mathcal{B}N_{Q(S)-T})$.

Démonstration. — La première partie de l'énoncé découle du lemme 1.6.25 et de la proposition 1.5.11, ainsi que les points i) et ii). Les points iii) et iii') suivent alors de la proposition 3.1.11. $\square$

3.1.3. Condition $(\mathcal{O}N_G)$. — Dans le chapitre 8 de ce texte, consacré aux espaces de Stein, nous aurons besoin d'utiliser des résultats similaires à ceux de la section 3.1.2 en remplaçant l'algèbre $\mathcal{B}(U)$ par $\overline{\mathcal{O}(U)}$. Cela nous conduit à modifier certaines définitions. Il sera également important de ne plus imposer à U d'être spectralement convexe. Nous convertissons encore le cadre de la section 3.1.1.

Soit U une partie compacte de B . Le morphisme canonique $\varphi_G: Z_G \rightarrow B$ induit un morphisme

$$\psi_{G,U}: \mathcal{O}(U)[T]/(G(T)) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z_G}(\varphi_G^{-1}(U)).$$

Définition 3.1.14. — On dit que le compact U satisfait la condition $(\mathcal{O}N_G)$ s'il existe $v_{U,0} \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $v \geq v_{U,0}$, la norme résiduelle $\|\cdot\|_{U,v,\text{rés}}$ sur $\mathcal{O}_X(U)[T]/(G(T))$ soit équivalente à $\|\psi_{G,U}(\cdot)\|_{\varphi_G^{-1}(U)}$.

On peut supposer que $v_{U,0}$ satisfait les inégalités

$$\sum_{i=0}^{d-1} \|g_i\|_U v_{U,0}^{i-d} \leq \frac{1}{2} \text{ et } v_{U,0} \geq \max_{0 \leq i \leq d-1} (\|g_i\|_U^{1/(d-i)}).$$

Dans la suite de cette section, nous nous placerons toujours sous cette hypothèse.

Lemme 3.1.15. — Supposons que U satisfait la condition $(\mathcal{O}N_G)$. Alors, pour tout $v \geq v_{U,0}$, la norme résiduelle $\|\cdot\|_{U,v,\text{rés}}$ sur $\overline{\mathcal{O}(U)}[T]/(G(T))$ est équivalente à sa norme spectrale.

En outre, si le morphisme canonique $U \rightarrow \mathcal{M}(\overline{\mathcal{O}(U)})$ est bijectif, cette condition est équivalente à la condition $(\mathcal{O}N_G)$.

Démonstration. — Considérons l'espace $\hat{U} = \mathcal{M}(\overline{\mathcal{O}(U)})$ et le fermé $\hat{Z}_G$ défini par $G = 0$ dans $\mathbf{A}_{\hat{U}}^{1,\text{an}}$. Notons $\hat{\varphi}_G: \hat{Z}_G \rightarrow \hat{V}$ et

$$\hat{\psi}_{G,U}: \overline{\mathcal{O}(U)}[T]/(G(T)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{Z}_G}(\hat{Z}_G)$$

les morphismes canoniques. On a alors un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \varphi_G^{-1}(U) & \hookrightarrow & \hat{Z}_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & \hat{U} \end{array}.$$

Soit $v \geq v_{U,0}$. Pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)[T]/(G(T))$, on a

$$\|\psi_{G,U}(f)\|_{\varphi_G^{-1}(U)} \leq \|\hat{\psi}_{G,U}(f)\|_{\hat{Z}_G} \leq \|f\|_{U,v,\text{rés}},$$

la dernière inégalité provenant du fait que l'on a un morphisme borné

$$\overline{\mathcal{O}_X(U)}[T] \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{Z}_G}(\hat{Z}_G)$$

puisque $\overline{D_{\mathcal{O}(U)}}(v)$ contient toutes les racines de $G(T)$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{O}(U)}^{1,\text{an}}$, d'après le lemme 3.1.5.

Or, d'après le lemme 3.1.5 encore, $\hat{Z}_G$ s'identifie naturellement au spectre de l'algèbre $\overline{\mathcal{O}_X(U)}[T]/(G(T))$, donc $\|\hat{\psi}_{G,U}(\cdot)\|_{\hat{Z}_G}$ n'est autre que la norme spectrale de $\|\cdot\|_{U,v,\text{rés}}$. Le résultat découle maintenant directement de la condition $(\mathcal{O}N_G)$.

Sous l'hypothèse de l'assertion finale, la flèche horizontale inférieure est bijective. On en déduit que la flèche supérieure l'est aussi, ce qui permet d'identifier $\|\psi_{G,U}(\cdot)\|_{\varphi_G^{-1}(U)}$ à la norme spectrale de $\|\cdot\|_{U,v,\text{rés}}$ et donc de conclure. $\square$

Remarque 3.1.16. — Pour toute partie compacte U de B , l'anneau $\mathcal{B}(U)$ s'envoie isométriquement dans $\overline{\mathcal{O}(U)}$. Il suit alors du lemme 3.1.15 que, si U est spectralement convexe et satisfait la condition $(\mathcal{O}N_G)$, il satisfait aussi la condition $(\mathcal{B}N_G)$.

On reprend maintenant les énoncés de [Poi13a, §6.1] en indiquant les modifications à effectuer.

Définition 3.1.17 (cf. [Poi13a, définition 6.1]). — Soit U une partie compacte de B . On dit qu'une partie Γ de U est un bord analytique fort de U si, pour tout $f \in \mathcal{O}(U)$, on a

$$\|f\|_U = \|f\|_\Gamma.$$

Remarque 3.1.18. — La condition de bord analytique fort porte sur tous les éléments de $\mathcal{O}(U)$, alors que celle de bord analytique (cf. définition 1.6.1) fait intervenir ceux de $\mathcal{B}(U)$, qui proviennent de sections globales sur B .

Proposition 3.1.19 (cf. [Poi13a, proposition 6.2])

Supposons qu'il existe des parties $V_1, \dots, V_r$ de U telles que

- i) pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, V_i soit compacte et satisfasse la condition $(\mathcal{O}N_G)$;*
- ii) la réunion $\Gamma_U := \bigcup_{1 \leq i \leq r} V_i$ soit un bord analytique fort de U .*

Alors, U satisfait également la condition $(\mathcal{O}N_G)$.

En outre, si U est décente, alors la partie $\Gamma_{U,G} := \varphi_G^{-1}(\Gamma_U)$ est un bord analytique fort de $\varphi_G^{-1}(U)$.

Démonstration. — La démonstration de la première assertion de [Poi13a, proposition 6.2] utilise précisément la condition (N_G) (c'est-à-dire $(\mathcal{B}N_G)$ avec nos notations) sous la forme que nous avons énoncée dans la définition 3.1.14. Il n'y a donc que des modifications évidentes à effectuer.

En reprenant la démonstration de la seconde assertion de [Poi13a, proposition 6.2], on montre que, pour tout $f \in \mathcal{O}(U)[T]/(G(T))$, on a

$$\|\psi_{G,U}(f)\|_{\varphi_G^{-1}(U)} = \max_{x \in \Gamma_{U,G}} (|\psi_{G,U}(f)(x)|).$$

La décence de U et le théorème de division de Weierstraß 1.6.5 (sous la forme du théorème 1.6.7 adapté au polynôme G) assurent qu'on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}(U)[T]/(G(T)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Z_G}(\varphi_G^{-1}(U)).$$

Le résultat s'en déduit. $\square$

Le corollaire 6.3 de [Poi13a] s'adapte immédiatement et nous l'omettons. Le lemme 6.4 a déjà été repris par le lemme 1.4.14. Les résultats techniques nécessaires sont maintenant tous à notre disposition. Nous énonçons leurs conséquences sans plus de commentaires.

Proposition 3.1.20 (cf. [Poi13a, propositions 6.5 et 6.6])

Soit U une partie compacte et décente de B_{um} qui possède un bord analytique fort fini. Soit $P(S) \in \mathcal{O}(U)[S]$ unitaire non constant et soient $r, s \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 = r < s$ ou $0 < r \leq s$. Alors, le domaine polynomial $\overline{C}_U(P; r, s)$ possède un bord analytique fort fini.

En outre, pour tout $Q(T) \in \mathcal{O}(U)[T]$ unitaire non constant, le domaine polynomial $\overline{C}_U(Q; r, s)$ satisfait la condition $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$. $\square$

Définition 3.1.21 (cf. [Poi13a, Définition 6.9]). — Un point x de B est dit *ultramétrique très typique* s'il appartient à l'intérieur de B_{um} et possède un système fondamental de voisinages compacts, spectralement convexes admettant un bord analytique fort fini.

Définition 3.1.22. — On dit qu'un point x d'un espace analytique est *très décent* si l'une (au moins) des trois conditions suivantes est satisfaite :

- i) $\mathcal{H}(x)$ est de caractéristique nulle ;
- ii) $\mathcal{H}(x)$ est de valuation non triviale ;
- iii) x est ultramétrique très typique.

On dit qu'une partie d'un espace analytique est *très décente* lorsque tous ses points le sont.

Exemple 3.1.23. — Lorsque $\mathcal{A}$ est l'un de nos exemples usuels 1.1.16 à 1.1.21 : les corps valués complets, l'anneau $\mathbf{Z}$ et les anneaux d'entiers de corps de nombres, les corps hybrides, les anneaux de valuation discrète, les anneaux de Dedekind trivialement valués, le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est très décent.

Corollaire 3.1.24 (cf. [Poi13a, proposition 6.10]). — Soit $b \in B$ un point ultramétrique très typique (resp. très décent). Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors, tout point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ situé au-dessus de b est encore ultramétrique très typique (resp. très décent). $\square$

Le corollaire qui suit est nouveau.

Corollaire 3.1.25. — Soit U une partie compacte de B_{um} dont tout point est ultramétrique très typique. Alors, le compact U possède un système fondamental de voisinages compacts $\mathcal{V}$ tel que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, pour tout $P(S) \in \mathcal{O}(V)[S]$ unitaire non constant et pour tous $r, s \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 = r < s$ ou $0 < r \leq s$, la couronne $\overline{C}_V(r, s)$ satisfasse la condition $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$.

Démonstration. — Soit W un voisinage de U . Puisque tout point de U possède un voisinage compact dans W admettant un bord analytique fort fini, par compacité de U , il existe un voisinage compact V de U dans W qui est union finie de compacts admettant un bord analytique fort fini. On conclut alors à l'aide des propositions 3.1.20 et 3.1.19. $\square$

On peut également reprendre les énoncés de [Poi13a, §6.2].

Définition 3.1.26 (cf. [Poi13a, définition 6.12]). — On dit que le compact U satisfait la condition $(\mathcal{O}R_G)$ s'il possède un bord analytique fort sur lequel la fonction $|\text{Rés}(G, G')|$ est bornée inférieurement par un nombre réel strictement positif.

Proposition 3.1.27 (cf. [Poi13a, proposition 6.14])

Toute partie compacte de B qui satisfait la condition $(\mathcal{O}R_G)$ satisfait aussi la condition $(\mathcal{O}N_G)$.

3.2. Division de Weierstraß avec contrôle sur les normes

Dans cette section, nous démontrons une version raffinée du théorème de division de Weierstraß (cf. théorème 1.6.5) et du théorème de Weierstraß généralisé (cf. corollaire 1.6.6) comprenant un contrôle des normes du reste et du quotient.

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ avec coordonnée S . Notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme de projection. Pour tout point b de B , posons $X_b := \pi^{-1}(b) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1,\text{an}}$.

Rappelons qu'à tout point rigide x de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$, on associe un polynôme minimal μ_x et un degré $\deg(x)$ (cf. définition 1.5.5) et que l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}},x}$ en ce point est un anneau de valuation discrète d'uniformisante μ_x .

Théorème 3.2.1. — *Soient $b \in B$ et x un point rigide de X_b . Soit $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B . Si $\mathcal{H}(b)$ est trivialement valué et μ_x inséparable, supposons que tous les éléments de $\mathcal{V}_b$ sont inclus dans B_{um} et possèdent un bord analytique fini.*

Soit U_0 un voisinage compact de x dans X et soit G un élément de $\mathcal{B}(U_0)$. Supposons que son image dans $\mathcal{O}_{X_b,x}$ n'est pas nulle et notons $n \in \mathbf{N}$ la valuation μ_x -adique de cette dernière. Soit $\eta \in \mathbf{R}_{>0}$.

Alors, il existe un voisinage V_0 de b dans B , un polynôme P_0 à coefficients dans $\mathcal{B}(V_0)$, unitaire, de même degré que μ_x , tel que $\|P_0(b) - \mu_x\|_{b,\infty} \leq \eta$ et des nombres réels $s_1, s_2, \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $s_1 < s_2$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $V \in \mathcal{V}_b$ contenu dans V_0 , tout $P \in \mathcal{B}(V)[T]$ unitaire de même degré que P_0 tel que $\|P - P_0\|_{V,\infty} \leq \varepsilon$, on a

$$x \in \overline{D}_V(P; s_1) \subset \overline{D}_V(P; s_2) \subset U_0$$

et, pour tout $F \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s_2))$ et tout $s \in]s_1, s_2[$, il existe un unique couple $(Q_s, R_s) \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s))^2$ vérifiant

- i) $F = Q_s G + R_s$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s))$;*
- ii) $R_s \in \mathcal{B}(V)[S]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $n \deg(x)$.*

En outre, pour tout $s \in]s_1, s_2[$, il existe $C_s \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $F \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s_2))$, avec les notations précédentes, on ait

$$\|Q_s\|_{\overline{D}_V(P;s)} \leq C_s \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)} \text{ et } \|R_s\|_{\overline{D}_V(P;s)} \leq C_s \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)}.$$

Pour $F \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s_2))$ fixé, les éléments Q_s et R_s sont indépendants de s , au sens où, pour tous $s, s' \in]s_1, s_2[$ avec $s' \leq s$, on a

$$(Q_s)_{|\overline{D}_V(P;s')} = Q_{s'} \text{ et } (R_s)_{|\overline{D}_V(P;s')} = R_{s'},$$

la notation $(\cdot)_{|\overline{D}_V(P;s')}$ désignant l'image par le morphisme canonique $\mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s) \rightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s'))$.

Démonstration. — Posons $d := \deg(x)$. Il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathcal{H}(b)$ tels que

$$\mu_x(S) = S^d + \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i S^i.$$

Puisque la valuation μ_x -adique de G est égale à n , il existe un élément inversible H de $\mathcal{O}_{X_b, x}$ tel que $G = H\mu_x^n$. Quitte à restreindre U_0 , on peut supposer que H et H^{-1} sont définies sur $U_0 \cap X_b$.

Posons $N := \|\mu_x\|_{b, \infty}$. Soit $v \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que

$$(|\alpha_0| + 1)v^{-d} + \sum_{i=1}^{d-1} |\alpha_i| v^{i-d} < \frac{1}{2}.$$

Soient $V_0, P_0, s_1, s_2, \varepsilon$ satisfaisant les conclusions de la proposition 1.5.11 avec $U = U_0$ et $\sigma = 1$. En particulier, on a $s_2 \leq 1$. On peut également supposer que P_0 est de degré d . D'après les points i) et ii) énoncés à la fin de la proposition 1.5.11, si μ_x est séparable ou si $\mathcal{H}(b)$ n'est pas trivialement valué, on peut supposer que $P_0(b)$ est séparable. Sinon, par hypothèse, tous les éléments de $\mathcal{V}_b$ sont inclus dans B_{um} et possèdent un bord analytique fini. Dans tous les cas, d'après la proposition 3.1.11, quitte à diminuer V_0, s_2 et ε et augmenter s_1 , on peut supposer que, pour toute partie spectralement convexe V de V_0 contenant b , tout $s \in [s_1, s_2]$ et tout $P \in \mathcal{B}(V)[T]$ tel que $\|P - P_0\|_{V, \infty} \leq \varepsilon$, le disque $\overline{D}_V(s)$ satisfasse la condition $(\mathcal{B}N_{P(S)-T})$.

Soit $P \in \mathcal{B}(V)[T]$ unitaire de degré d tel que $\|P - P_0\|_{V, \infty} \leq \varepsilon$. Écrivons P sous la forme $P = S^d + \sum_{i=0}^{d-1} p_i S^i \in \mathcal{B}(V_0)[S]$. On peut également supposer que

$$(1) \quad \|P(b) - \mu_x\|_{b, \infty} \leq \max \left(1, \frac{s_1^n v^{-(n+1)d+n+1}}{8n(N+1)^{n-1}} \right)$$

et

$$(|p_0(b)| + 1)v^{-d} + \sum_{i=1}^{d-1} |p_i(b)| v^{i-d} < \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, il existe un voisinage compact spectralement convexe V de b contenu dans V_0 sur lequel on a

$$(2) \quad (\|p_0\|_V + 1)v^{-d} + \sum_{i=1}^{d-1} \|p_i\|_V v^{i-d} \leq \frac{1}{2}.$$

Notons également que l'équation (1) entraîne

$$(3) \quad \|P(b)\|_{b,\infty} \leq \|P(b) - \mu_x\|_{b,\infty} + \|\mu_x\|_{b,\infty} \leq N + 1.$$

Soit $s'_2 \in]s_1, s_2[$. Les choix effectués assurent que $\overline{D}_V(s_2)$ satisfait la condition $(\mathcal{B}N_{P(S)-T})$. D'après le corollaire 3.1.10, le morphisme naturel

$$\mathcal{B}(\overline{D}_V(s_2))[S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s_2))$$

est donc un isomorphisme. En outre, d'après la proposition 1.4.7, tout élément de $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s_2))$ induit par restriction un élément de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s'_2 \rangle$. Quitte à remplacer s_2 par s'_2 , on peut donc supposer que G appartient à $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s_2 \rangle[S]/(P(S) - T)$.

Soit W une partie compacte de V et $t \in (0, 1]$. D'après la proposition 3.1.3 appliquée avec $\mathcal{A} = \mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle$ et $G(S) = P(S) - T$, pour tout $F \in \mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle[S]/(P(S) - T)$, on a

$$(4) \quad v^{-d+1} \|F\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle, v, \text{rés}} \leq \|F\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle, \text{div}} \leq 2 \|F\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle, v, \text{rés}}.$$

Par la suite, on notera $\|\cdot\|_{W,t,v,\text{rés}}$ la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle, v, \text{rés}}$ et $\|\cdot\|_{W,t,\text{div}}$ la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle, \text{div}}$.

D'après la proposition 1.4.8 et [Poi13a, corollaire 7.4], les morphismes naturels

$$\text{colim}_{t > s_2} \mathcal{H}(b)\langle |T| \leq t \rangle \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1,\text{an}}}(\overline{D}_b(s_2))$$

et

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1,\text{an}}}(\overline{D}_b(s_2))[S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{1,\text{an}}}(\overline{D}_b(P; s_2))$$

sont des isomorphismes.

Puisque $\overline{D}_b(P; s_2) \subset U_0 \cap X_b$, il existe $t > s_2$ tel que H^{-1} possède un représentant dans $\mathcal{H}(b)\langle |T| \leq t \rangle[S]/(P(S) - T)$. Ce représentant peut lui-même être approché avec une précision arbitraire pour la norme $\|\cdot\|_{b,t,v,\text{rés}}$ par un élément de $\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle[S]/(P(S) - T)$ pour un voisinage compact W de b suffisamment petit. Quitte à rétrécir V , on peut donc supposer qu'il existe un élément K de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s_2 \rangle[S]/(P(S) - T)$ tel que

$$(5) \quad \|K(b)G(b) - P^n\|_{b,s_2,v,\text{rés}} < \frac{s_1^n}{8v^{d-1}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \|\mu_x^n - P(b)^n\|_{b,s_2,v,\text{rés}} &\leq \|\mu_x - P(b)\|_{b,s_2,v,\text{rés}} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \mu_x^i P(b)^{n-1-i} \right\|_{b,s_2,v,\text{rés}} \\
 &\leq \|\mu_x - P(b)\|_{b,s_2,v,\text{rés}} n \max(\|\mu_x\|_{b,s_2,v,\text{rés}}, \|P(b)\|_{b,s_2,v,\text{rés}})^{n-1} \\
 &\stackrel{(4)}{\leq} nv^{n(d-1)} \|\mu_x - P(b)\|_{b,s_2,\text{div}} \max(\|\mu_x\|_{b,s_2,\text{div}}, \|P(b)\|_{b,s_2,\text{div}})^{n-1} \\
 &\stackrel{(3)}{\leq} nv^{n(d-1)} \|\mu_x - P(b)\|_{b,s_2,\text{div}} (N+1)^{n-1} \\
 &\stackrel{(1)}{\leq} \frac{s_1^n v^{-d+1}}{8}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(7) \quad \|K(b)G(b) - P(b)^n\|_{b,s_2,v,\text{rés}} \stackrel{(5)+(6)}{\leq} \frac{v^{-d+1}s_1^n}{4}.$$

Quitte à restreindre V , on peut donc supposer que

$$(8) \quad \|KG - P^n\|_{V,s_2,v,\text{rés}} \leq \frac{v^{-d+1}s_1^n}{4}.$$

Soit $s \in]s_1, s_2[$. Tout élément φ de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$ possède un unique représentant de la forme

$$\varphi = \sum_{i=0}^{d-1} (\alpha_i(\varphi)T^n + \beta_i(\varphi))S^i,$$

où les $\alpha_i(\varphi)$ sont des éléments de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle$ et les $\beta_i(\varphi)$ des éléments de $\mathcal{B}(V)[T]$ de degré strictement inférieur à n . Posons

$$\alpha(\varphi) := \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i(\varphi)S^i \text{ et } \beta(\varphi) := \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i(\varphi)S^i.$$

On a alors

$$\varphi = \alpha(\varphi)T^n + \beta(\varphi)$$

et les deux inégalités suivantes :

$$(9) \quad \|\alpha(\varphi)\|_{V,s,\text{div}} \leq s^{-n} \|\varphi\|_{V,s,\text{div}} \text{ et } \|\beta(\varphi)\|_{V,s,\text{div}} \leq \|\varphi\|_{V,s,\text{div}}.$$

Remarquons que, dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$, on peut écrire $\beta(\varphi)$ comme un polynôme en S de degré inférieur à $nd - 1$. Réciproquement, tout polynôme en S de degré strictement inférieur à nd peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^{d-1} b_i S^i$ où les b_i sont des polynômes en T de degré strictement inférieur à n .

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
 A_s: \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T) & \longrightarrow & \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T) \\
 \varphi & \longmapsto & \alpha(\varphi)KG + \beta(\varphi)
 \end{array}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$, on a

$$(10) \quad \begin{aligned} \|A_s(\varphi) - \varphi\|_{V,s,v,\text{rés}} &= \|\alpha(\varphi)(KG - T^n)\|_{V,s,v,\text{rés}} \\ &\leq \|\alpha(\varphi)\|_{V,s,v,\text{rés}} \|KG - P^n\|_{V,s,v,\text{rés}} \\ &\stackrel{(4)+(9)}{\leq} 2v^{d-1}s^{-n} \|KG - P^n\|_{V,s,v,\text{rés}} \|\varphi\|_{V,s,v,\text{rés}}. \end{aligned}$$

On déduit donc de l'inégalité (8) que la norme de l'opérateur $A_s - \text{Id}$ sur $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$ est inférieure à $1/2(s_1/s)^n \leq 1/2 < 1$. En particulier, A_s est un isomorphisme d'espaces de Banach. Remarquons que l'on a

$$(11) \quad \|A_s^{-1}\| \leq 2.$$

Les choix effectués assurent que $\overline{D}_V(s_2)$ satisfait la condition $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$. D'après le corollaire 3.1.10, le morphisme naturel

$$\mathcal{B}(\overline{D}_V(s_2))[S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(P; s_2))$$

est un isomorphisme et il existe $w \geq v$ et $C' \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $F \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(s_2))[S]/(P(S) - T)$, on ait

$$\|F\|_{\overline{D}_V(s_2),w,\text{rés}} \leq C' \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)}$$

et donc

$$\|F\|_{\overline{D}_V(s_2),\text{div}} \leq C'' \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)}$$

pour une certaine constante $C'' \in \mathbf{R}_{>0}$, d'après la proposition 3.1.3. D'après la proposition 1.4.7 tout élément f de $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s_2))$ induit naturellement par restriction un élément de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle$ et on a

$$\|f\|_{V,s} \leq \frac{s_2}{s_2 - s} \|f\|_{\overline{D}_V(s_2)}$$

On en déduit que tout élément F de $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s_2))[S]/(P(S) - T)$ induit naturellement par restriction un élément de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$ et que l'on a

$$(12) \quad \|F\|_{V,s,\text{div}} \leq C'' \max \left(1, \left(\frac{s_2}{s_2 - s} \right)^{d-1} \right) \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)}.$$

Soit $F \in \overline{D}_V(s_2)$. Les éléments $Q_s^\diamond := \alpha(A_s^{-1}(F))K$ et $R_s^\diamond := \beta(A_s^{-1}(F))$ de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$ satisfont alors l'égalité $F = Q_s^\diamond G + R_s^\diamond$ dans

$\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T)$. En outre, en combinant (9), (11) et (12), on montre qu'il existe une constante $C'_s \in \mathbf{R}_{>0}$, indépendante de F , telle que

$$\|Q_s^{\langle \rangle}\|_{V,s,\text{div}} \leq C'_s \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)} \text{ et } \|R_s^{\langle \rangle}\|_{V,s,\text{div}} \leq C'_s \|F\|_{\overline{D}_V(P;s_2)}.$$

Les choix effectués assurent que $\overline{D}_V(s)$ satisfait la condition $(\mathcal{B}N_{P(S)-T})$. On en déduit que les images respectives Q_s et R_s de $Q_s^{\langle \rangle}$ et $R_s^{\langle \rangle}$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s))[S]/(P(S) - T) \simeq \mathcal{B}(\overline{D}_V(P;s))$ satisfont les conditions de l'énoncé, y compris la partie sur l'égalité des normes, pour une constante $C_s \in \mathbf{R}_{>0}$ bien choisie.

Démontrons maintenant l'unicité du couple (Q_s, R_s) . Soient $Q'_s, R'_s \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(P;s'))$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. On peut les considérer dans $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s))[S]/(P(S) - T)$ et donc dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s' \rangle[S]/(P(S) - T)$ pour $s' \in]s_1, s[$, d'après la proposition 1.4.7. La bijectivité de l'opérateur $A_{s'}$ assure que les images de Q'_s et R'_s dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s' \rangle[S]/(P(S) - T)$ coïncident avec celles de Q_s et R_s . Puisque, d'après la proposition 1.4.7, le morphisme $\mathcal{B}(\overline{D}_V(s)) \rightarrow \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s' \rangle$ est injectif, le résultat s'ensuit.

L'assertion d'indépendance finale découle de l'unicité. $\square$

Remarque 3.2.2. — Il découle du point iii) final de la proposition 1.5.11 que, si μ_x est à coefficients dans $\kappa(b)$ et séparable, on peut choisir pour P_0 n'importe quel relevé de μ_x à $\mathcal{O}_{B,b}[T]$.

Démontrons à présent quelques conséquences de ce résultat. Soit $G(T) \in \mathcal{A}[T]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$. Fixons un point b de B .

Supposons que $G(b)(T)$ est une puissance d'un polynôme irréductible dans $\mathcal{H}(b)[T]$. Le lieu d'annulation de $G(b)$ détermine alors un unique point rigide x de X_b et il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $G(b) = \mu_x^n$. Posons $d := \deg(x)$.

Corollaire 3.2.3. — *Plaçons-nous dans le cadre précédent. Si $\mathcal{H}(b)$ est trivialement valué et μ_x inséparable, supposons que b est ultramétrique typique.*

Soit U un voisinage de x dans X . Alors, il existe un voisinage compact spectralement convexe V de b dans B , un polynôme $P_0 \in \mathcal{B}(V)[T]$ unitaire non constant et des nombres réels $s_1, s_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $s_1 < s_2$ tels qu'on ait

$$x \in \overline{D}_V(P_0; s_1) \subset \overline{D}_V(P_0; s_2) \subset U$$

et, en posant,

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{B}(V)^{nd} &\longrightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_0; s_2)), \\ (a_0, \dots, a_{nd-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{nd-1} a_i T^i \end{aligned}$$

les propriétés suivantes soient vérifiées :

- i) il existe $K \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{B}(V)^{nd}$ et tout $s \in [s_1, s_2]$, on ait $\|\psi(A)\|_{\overline{D}_V(P_0; s)} \leq K \|A\|_{V, \infty}$;
- ii) pour tout $s \in]s_1, s_2[$ et pour tout $B \in \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_0; s_2))$, il existe un unique $A_s \in \mathcal{B}(V)^{nd}$ tel que $\psi(A_s) = B \pmod{G}$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_V(P_0; s))$. L'élément A_s est indépendant de $s \in]s_1, s_2[$. En outre, il existe $K'_s \in \mathbf{R}_{>0}$ (indépendant de B) tel que $\|A_s\|_{V, \infty} \leq K'_s \|B\|_{\overline{D}_V(P_0; s_2)}$.

En particulier, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_b[T]/(G(T)) \longrightarrow \mathcal{O}_x/(G(T))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit U_0 un voisinage compact de x dans U tel que $G \in \mathcal{B}(U_0)$. Soit $\mathcal{V}_b$ une base de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B . Si $\mathcal{H}(b)$ est trivialement valué et μ_x inséparable, supposons de plus que tous les éléments de $\mathcal{V}_b$ sont inclus dans B_{um} et possèdent un bord analytique fini.

- Supposons que $x \neq 0$.

Posons $d := \deg(x)$ et écrivons $\mu_x(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i$. Posons $I := \{i \in [0, d-1] : a_i \neq 0\}$. Puisque $x \neq 0$, on a $I \neq \emptyset$. Soit $\eta \in]0, \min_{i \in I}(|a_i|)[$.

Le théorème 3.2.1 appliqué avec x , G et η fournit un voisinage V_0 de b dans B , un polynôme $P_0 \in \mathcal{B}(V_0)[T]$ unitaire de degré d et des nombres réels $s_1, s_2, \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$. Puisque $\|P_0(b) - \mu_x\| \leq \eta$, $P_0(b)$ n'est pas une puissance de T . Soit V un élément de $\mathcal{V}_b$ contenu dans V_0 . Identifions P_0 à son image dans $\mathcal{B}(V)[T]$. Quitte à restreindre V , on peut supposer que, pour tout $b' \in B$, $P_0(b')$ n'est pas une puissance de T . La propriété i) est immédiate avec $K = nd \max(\|T\|_{\overline{D}_V(P_0; s_2)}^{nd-1}, 1)$. La propriété ii) découle du théorème 3.2.1 et du corollaire 1.4.17.

- Supposons que $x = 0$.

D'après la remarque 3.2.2, on peut choisir $P_0 = T$ dans l'énoncé du théorème 3.2.1. Le même raisonnement que précédemment s'applique alors, en utilisant la remarque 1.4.18 au lieu du corollaire 1.4.17. $\square$

Des arguments standards permettent de démontrer un résultat similaire sans hypothèse sur $G(b)(T)$. Nous renvoyons à la preuve de [Poi10a, théorème 5.5.3] pour les détails (dans un cadre où les normes ne sont pas prises en compte).

Notons $G(b)(T) = \prod_{j=1}^t h_j(T)^{n_j}$ la décomposition en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $G(b)(T)$ dans $\mathcal{H}(b)[T]$. D'après [Poi13a, corollaire 5.4], il existe $H_1, \dots, H_t \in \mathcal{O}_{B,b}[T]$ unitaires tels que

- i) $G = \prod_{j=1}^t H_j$ dans $\mathcal{O}_{B,b}[T]$;
- ii) pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, on a $H_j(b) = h_j^{n_j}$.

Il s'agit de la condition (D_G) de [Poi13a, définition 4.6], elle-même liée à la condition (I_G) de [Poi10a, définition 5.3.5] qui est présente dans l'énoncé de [Poi10a, théorème 5.5.3]. Le résultat précédent est conséquence de l'hensélianité du corps $\kappa(b)$ (cf. [Poi13a, théorème 5.2]).

Pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, notons z_j le point rigide de X_b déterminé par l'annulation de h_j .

Corollaire 3.2.4. — *Plaçons-nous dans le cadre précédent. Si $\mathcal{H}(b)$ est trivialement valué et l'un des h_j est inséparable, supposons que b est ultramétrique typique.*

Pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, soit U_j un voisinage de z_j dans X sur lequel H_j est défini. Alors, il existe un voisinage compact spectralement convexe V de b dans B , des polynômes $P_{1,0}, \dots, P_{t,0} \in \mathcal{B}(V)[T]$ unitaires non constants et des nombres réels $s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{t,1}, s_{t,2} \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $s_{j,1} < s_{j,2}$ pour tout j tels qu'on ait

$$x \in \overline{D}_V(P_{j,0}; s_{j,1}) \subset \overline{D}_V(P_{j,0}; s_{j,2}) \subset U_j \text{ pour tout } j$$

et, en posant

$$\begin{aligned} \psi: \quad \mathcal{B}(V)^d &\longrightarrow \prod_{j=1}^t \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_{j,0}; s_{j,2})), \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) &\longmapsto (\sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i, \dots, \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i) \end{aligned}$$

les propriétés suivantes soient vérifiées :

- i) *il existe $K \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{B}(V)^d$ et tout $s \in \prod_{j=1}^t [s_{j,1}, s_{j,2}]$, on ait*

$$\|\psi(A)\|_s \leq K \|A\|_{V,\infty},$$

où $\|\cdot\|_s$ désigne la norme uniforme sur $\prod_{j=1}^t \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_{j,0}; s_j))$;

- ii) *pour tout $s \in \prod_{j=1}^t]s_{j,1}, s_{j,2}[$ et tout $B \in \prod_{j=1}^t \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_{j,0}; s_{j,2}))$, il existe un unique $A_s \in \mathcal{B}(V)^d$ tel que $\psi(A_s) = B$ dans $\prod_{j=1}^t \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_{j,0}; s_j))/(H_j)$. L'élément A_s est indépendant de $s \in \prod_{j=1}^t]s_{j,1}, s_{j,2}[$. En outre, il existe*

$K'_s \in \mathbf{R}_{>0}$ (indépendant de B) tel que $\|A_s\|_{V,\infty} \leq K'_s \|B\|_{s_2}$, où $\|\cdot\|_{s_2}$ désigne la norme uniforme sur $\prod_{j=1}^t \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_{j,0}; s_{j,2}))$.

En particulier, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_b[T]/(G(T)) \longrightarrow \prod_{j=1}^t \mathcal{O}_{z_j}/(H_j)$$

est un isomorphisme.

Appliquons finalement ces résultats au cas d'un endomorphisme polynomial de X , de façon à obtenir une version normée du théorème 1.6.7. Soit $P \in \mathcal{A}[T]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$. Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T] & \longrightarrow & \mathcal{A}[T] \\ T & \longmapsto & P(T) \end{array}$$

induit un morphisme $\varphi_P: X \rightarrow X$.

Remarquons que si U et V sont des parties compactes de X telles que $\varphi_P(U) \subset W$, alors nous avons un morphisme naturel $\mathcal{B}(W) \rightarrow \mathcal{B}(U)$ envoyant T sur $P(T)$.

Corollaire 3.2.5. — *Plaçons-nous dans le cadre précédent. Si $\mathcal{H}(b)$ est de caractéristique non nulle et trivialement valué, supposons que b est ultramétrique typique.*

Soit $y \in X$. Notons $\varphi_P^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_t\}$. Soit W un voisinage de y dans X . Pour $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, soit U_j un voisinage de x_j dans $\varphi_P^{-1}(W)$. Alors, il existe un voisinage compact spectralement convexe V de y dans W et, pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, un voisinage spectralement convexe U'_j de x_j dans $\varphi_P^{-1}(V) \cap U_j$ tels que, en définissant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(W)^d & \longrightarrow & \mathcal{B}(U_1) \times \dots \times \mathcal{B}(U_t) \\ \chi_W: (a_0(T), \dots, a_{d-1}(T)) & \longmapsto & \left(\sum_{i=0}^{d-1} \varphi_P^\#(a_i) T^i, \dots, \sum_{i=0}^{d-1} \varphi_P^\#(a_i) T^i \right) \end{array}$$

et $\chi_V: \mathcal{B}(V)^d \rightarrow \prod_{j=1}^t \mathcal{B}(U'_j)$ par la même formule, les propriétés suivantes soient vérifiées :

- i) il existe $K \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{B}(W)^d$, on ait $\|\chi_W(A)\|_U \leq K \|A\|_{W,\infty}$ et $\|\chi_V(A)\|_{U'} \leq K \|A\|_{V,\infty}$, où $\|\cdot\|_U$ et $\|\cdot\|_{U'}$ désignent respectivement les normes infini sur $\prod_{i=1}^t \mathcal{B}(U_i)$ et $\prod_{i=1}^t \mathcal{B}(U'_i)$;
- ii) il existe $K' \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout $B \in \prod_{j=1}^t \mathcal{B}(U_j)$, il existe un unique $A \in \mathcal{B}(V)^d$ tel que $\chi_V(A) = B$ (dans $\prod_{j=1}^t \mathcal{B}(U'_j)$) et $\|A\|_{V,\infty} \leq K' \|B\|_U$.

En particulier, le morphisme $\chi: \mathcal{O}_y^d \rightarrow \prod_{j=1}^t \mathcal{O}_{x_j}$ défini par la même formule que χ_W est un isomorphisme.

Démonstration. — On se ramène au corollaire 3.2.4 en écrivant comme d'habitude le morphisme φ_P comme celui provenant de la composition

$$\mathcal{A}[T] \longrightarrow \mathcal{A}[T, S]/(P(S) - T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}[S].$$

Notons p_1, p_2 les projections de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2, \text{an}}$ sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$. Notons σ la section de p_2 envoyant x sur $(P(x), x)$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2, \text{an}} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}} & \xleftarrow{\varphi_P} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}} \end{array} \quad \text{avec une courbe courbée } \sigma \text{ de } \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2, \text{an}} \text{ vers } \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}} \text{ au-dessus de } p_2.$$

Notons Z le fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2, \text{an}}$ défini par l'équation $P(S) - T = 0$. La projection p_2 induit un isomorphisme entre Z et $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ dont l'inverse est la section σ .

D'après la proposition 1.6.4, si b est ultramétrique typique, il en va de même pour y et les $\sigma(x_j)$. Nous pouvons donc appliquer le corollaire 3.2.4 en remplaçant $\mathcal{A}$ par un voisinage compact spectralement convexe de y dans W , T par S , G par $P(S) - T$ et chaque U_j par un voisinage de $\sigma(x_j)$ dans $p_2^{-1}(U_j)$ sur lequel H_j est défini. On obtient l'énoncé désiré en posant $U'_j = p_2(\overline{D}_V(P_{j,0}, s_j))$ et en utilisant le fait que tirer en arrière une fonction (ici par σ ou p_2) diminue sa norme. $\square$

3.3. Fermeture des idéaux du faisceau structural

Dans cette section, nous démontrons un résultat de fermeture pour les faisceaux d'idéaux du faisceau structural d'un espace analytique. Nous commencerons par étudier quelques cas particuliers : celui de l'idéal nul et celui de l'idéal engendré par une puissance d'une uniformisante (en un point situé au-dessus d'un point dont l'anneau local est fortement de valuation discrète).

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Lemme 3.3.1. — *Soit $b \in B$. Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète relativement à une base fine $\mathcal{V}$ de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B . Soit ϖ_b une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$. Alors,*

pour tout $v \in \mathbf{N}$, l'idéal $(\varpi_b^v) \subset \mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}$.

Démonstration. — Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur v . Le cas $v = 0$ est immédiat.

Supposons avoir démontré le résultat pour $v \geq 0$. Soient U un voisinage compact de b et V un élément de $\mathcal{V}$ tel que $V \subset \mathring{U}$. Puisque $\mathcal{V}$ est une base fine de voisinages, il existe un élément V_1 de $\mathcal{V}$ tel que $V_1 \subset \mathring{U}$ et $V \subset \mathring{V}_1$. Soit $f \in \mathcal{B}(U)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{B,b}$ appartient à l'idéal (ϖ_b^{v+1}) .

Par définition d'anneau fortement de valuation discrète, il existe $g \in \mathcal{B}(V_1)$ tel que $f = g\varpi_b$ sur $\mathcal{B}(V_1)$ et $\|g\|_{V_1} \leq K_{V_1,U} \|f\|_U$, où $K_{V_1,U}$ est la constante intervenant dans la définition d'anneau fortement de valuation discrète. De plus, puisque $\mathcal{O}_{B,b}$ est intègre, le germe au voisinage de b correspondant à g est un multiple de ϖ_b^v .

Par hypothèse de récurrence, il existe $h \in \mathcal{B}(V)$ telle que $h\varpi_b^v = g$ dans $\mathcal{B}(V)$ et $\|h\|_V \leq K_{V,V_1,v} \|g\|_{V_1}$ où $K_{V,V_1,v}$ est la constante intervenant dans la définition d'idéal $\mathcal{B}$ -fortement de type fini de (ϖ_b^v) . Ainsi, on a l'égalité $h\varpi_b^{v+1} = f$ dans $\mathcal{B}(V)$ et l'inégalité $\|h\|_V \leq K_{V,V_1,v} K_{V_1,U} \|f\|_U$. $\square$

Lemme 3.3.2. — Soit b un point décent de B . Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Soit ϖ_b une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soient x un point rigide épais de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de b et $v \in \mathbf{N}$. Alors, pour tout voisinage compact V de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, il existe un voisinage compact spectralement convexe V' de x dans $\mathring{V}$ et une constante $K_{V',V,v} \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{B}(V)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n,x}$ appartient à (ϖ_b^v) , il existe $g \in \mathcal{B}(V')$ tel que

- i) $f = \varpi_b^v g$ dans $\mathcal{B}(V')$;
- ii) $\|g\|_{V'} \leq K_{V',V,v} \|f\|_V$.

Démonstration. — Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est donné par le lemme 3.3.1.

Soit $n \geq 1$ et supposons que le résultat est satisfait pour $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$. Notons x_{n-1} la projection de x sur ses $n - 1$ premières coordonnées.

Commençons par démontrer l'énoncé dans le cas où x est le point 0 au-dessus du point x_{n-1} , que nous noterons $0_{x_{n-1}}$. Soient V un voisinage compact de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $f \in \mathcal{B}(V)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{0_{x_{n-1}}}$ appartienne à (ϖ_b^v) . Il existe $g \in \mathcal{O}_{0_{x_{n-1}}}$ tel que $f = \varpi_b^v g$ dans $\mathcal{O}_{0_{x_{n-1}}}$.

Le point $0_{x_{n-1},n}$ admet une base de voisinages de la forme $\overline{D}_W(t)$, où W parcourt une base de voisinages de x_{n-1} . Soit W un voisinage compact spectralement convexe de x_{n-1} et $t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $\overline{D}_W(t)$ soit contenu dans $\overset{\circ}{V}$, les fonctions f , g et ϖ_b soient $\mathcal{B}$ -définies sur $\overline{D}_W(t)$ et $f = \varpi_b^v g$ dans $\mathcal{B}(\overline{D}_W(t))$. Soit $s \in]0, t[$. D'après la proposition 1.4.7, on a

$$\|f\|_{W,s} \leq \frac{t}{t-s} \|f\|_{\overline{D}_W(t)} \text{ et } \|g\|_{W,s} \leq \frac{t}{t-s} \|g\|_{\overline{D}_W(t)},$$

où les normes à gauche des inégalités sont les normes de f et g vues comme des éléments $\sum_{i \geq 0} \alpha_i T^i$ et $\sum_{i \geq 0} \beta_i T^i$ de $\mathcal{B}(W) \langle |T| \leq s \rangle$. Nous avons

$$\sum_{i \geq 0} \alpha_i T^i = \varpi_b^v \sum_{i \geq 0} \beta_i T^i \text{ dans } \mathcal{B}(W) \langle |T| \leq s \rangle,$$

ce qui implique que, pour tout $i \geq 0$, $\alpha_i = \varpi_b^v \beta_i$.

Par hypothèse de récurrence, il existe un voisinage spectralement convexe W' de x_{n-1} dans $\overset{\circ}{W}$, une constante $K_{W',W,v} \in \mathbf{R}_{>0}$ et, pour tout $i \geq 0$, un élément $\beta_{i,v}$ de $\mathcal{B}(W')$ tels que

- i) pour tout $i \geq 0$, $\|\beta_{i,v}\|_{W'} \leq K_{W',W,v} \|\alpha_i\|_W$;
- ii) $\sum_{i \geq 0} \alpha_i T^i = \varpi_b^v \left(\sum_{i \geq 0} \beta_{i,v} T^i \right)$ dans $\mathcal{B}(W') \langle |T| \leq s \rangle$.

Le voisinage $V' := \overline{D}_{W'}(s)$ satisfait donc les propriétés de l'énoncé.

Passons maintenant au cas où x est un point rigide épais quelconque au-dessus de x_{n-1} . Soit $P(S) \in \kappa(x_{n-1})[S]$ le polynôme minimal du point x au-dessus de x_{n-1} . On note $\tilde{P} \in \mathcal{O}_{x_{n-1}}[S]$ un relèvement unitaire de P . Soit $\tilde{U}$ un voisinage compact spectralement convexe de x_{n-1} tel que chacun des coefficients de $\tilde{P}$ soit $\mathcal{B}$ -défini sur $\tilde{U}$. En notant $\varphi_P : \mathbf{A}_{\mathcal{B}(\tilde{U})}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}(\tilde{U})}^{1,\text{an}}$ le morphisme défini par le polynôme $\tilde{P} \in \mathcal{B}(\tilde{U})[T]$, nous avons $\varphi_P^{-1}(0_{x_{n-1}}) = \{x\}$. Le résultat se déduit alors du cas du point $0_{x_{n-1}}$ et du corollaire 3.2.5

On note encore $\varphi_P : \mathbf{A}_{\mathcal{B}(\tilde{U})}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}(\tilde{U})}^{1,\text{an}}$ le morphisme d'espaces analytiques associé au polynôme $\tilde{P} \in \mathcal{B}(\tilde{U})[T]$. Il envoie le point x sur le point $0_{x_{n-1}}$ et nous avons $\varphi_P^{-1}(0_{x_{n-1}}) = \{x\}$. $\square$

La proposition suivante montre que, sous certaines conditions, la propriété que l'idéal nul de l'anneau local en un point soit $\mathcal{B}$ -fortement de type fini se transfère aux points de la fibre.

Proposition 3.3.3. — *Soit $b \in B$. Soit $\mathcal{V}_b$ une base fine de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B . Si $\mathcal{H}(b)$ est de caractéristique non*

nulle et trivialement valué, supposons que tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini. Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps fort ou un anneau fortement de valuation discrète relativement à $\mathcal{V}_b$ et que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ soit $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}_b$.

Soit x un point de $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ au-dessus de b . Alors, il existe une base fine de voisinages compacts spectralement convexes de x dans $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ relativement à laquelle l'idéal nul de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_A^{1,\text{an}},x}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini.

Démonstration. — Nous supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante ϖ_b . Le cas des corps forts se traite de manière similaire (et plus simple).

Soit $\mathcal{V}_x$ une base de voisinages de x satisfaisant les conclusions du corollaire 3.1.12. Soit U un voisinage compact de x et f un élément de $\mathcal{B}(U)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_x$ est nulle. Soit $\overline{C}_V(P, r, s)$ un élément de $\mathcal{V}_x$ contenu dans $\mathring{U}$. D'après le point ii) du corollaire 3.1.12, il existe $r', s' \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec $r' \prec r$ et $s' > s$ et un élément V' de $\mathcal{V}_b$ contenant V tels que $\overline{C}_{V'}(P, r', s')$ appartienne à $\mathcal{V}_x$ et que l'on ait

$$\overline{C}_V(P, r, s) \subset \overbrace{\overline{C}_{V'}(P, r', s')} \subset \overline{C}_{V'}(P, r', s') \subset \mathring{U}.$$

On va montrer que f est nulle sur $\overline{C}_V(P, r, s)$. D'après le point i) du corollaire 3.1.12, $\overline{C}_b(P, r', s')$ est connexe, donc le principe du prolongement analytique assure que f y est nulle. D'après [Poi13a, corollaire 9.8], f est multiple de π_b sur $\mathcal{B}(\overline{C}_{V'}(P, r', s'))$. En répétant cet argument (en partant d'un $\overline{C}_{V''}(P, r'', s'')$ légèrement plus grand), on montre que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f est multiple de π_b^n dans $\mathcal{B}(\overline{C}_{V'}(P, r', s'))$. La seconde partie de l'énoncé de [Poi13a, corollaire 9.8] assure alors que f est nulle au voisinage de $\overline{C}_b(P, r', s')$.

D'après le point iii) du corollaire 3.1.12, le morphisme naturel

$$\mathcal{B}(\overline{C}_{V'}(r', s'))[S]/(P(S) - T) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{C}_{V'}(P; r', s'))$$

est un isomorphisme. En utilisant la proposition 1.4.7, on en déduit un morphisme injectif naturel

$$\mathcal{B}(\overline{C}_{V'}(P, r', s'')) \longrightarrow \mathcal{B}(V')\langle r \leq |T| \leq s \rangle[S]/(P(S) - T).$$

L'image de f par ce morphisme possède un représentant de la forme $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i S^i$, où d est le degré du polynôme P et, pour tout $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $\alpha_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i,k} T^k$ est un élément $\mathcal{B}(V')\langle r \leq |T| \leq s \rangle$. Puisque f est nulle

au voisinage de $\overline{C}_b(P, r', s')$, pour tous $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ et $k \in \mathbf{Z}$, $a_{i,k}$ est nul au voisinage de b , et donc sur V' car l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}_b$. Le résultat s'ensuit. $\square$

On peut démontrer un énoncé similaire sans hypothèses sur $\mathcal{O}_{B,b}$ dans le cas des points rigides épais.

Proposition 3.3.4. — *Soit $b \in B$. Soit $\mathcal{V}_b$ une base fine de voisinages compacts spectralement convexes de b dans B . Supposons que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ soit $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}_b$.*

Soit x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ rigide épais au-dessus de b . Si $\mu_{\kappa,x}$ est inséparable et si $\mathcal{H}(b)$ est trivialement valué, supposons que tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini. Alors, il existe une base fine de voisinages compacts spectralement convexes de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ relativement à laquelle l'idéal nul de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}},x}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini.

Démonstration. — Posons $d := \deg(\mu_{\kappa,x})$. Choisissons un relevé unitaire P_0 de $\mu_{\kappa,x}$ dans $\mathcal{O}_{B,b}[T]$. Nous allons distinguer deux cas.

- Supposons que $\mu_{\kappa,x}$ est séparable ou que tout élément de $\mathcal{V}_b$ possède un bord analytique fini.

Soit $\mathcal{V}_x$ une base de voisinages de x satisfaisant les conclusions du corollaire 3.1.13 iii). Soient U un voisinage compact de x , $\overline{D}_V(P_0, s)$ un élément de $\mathcal{V}_x$ inclus dans $\mathring{U}$ et f un élément de $\mathcal{B}(U)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_x$ est nulle.

Les propriétés de $\mathcal{V}_x$ assurent que le morphisme naturel

$$\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle[S]/(P_0(S) - T) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(P_0, s))$$

est un isomorphisme. L'antécédent de f possède un unique représentant de la forme $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i S^i$, avec $\alpha_i = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k} T^k \in \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq s \rangle$.

Pour tous i et k , le germe de $a_{i,k}$ en b est nul. En effet, puisque le germe de f en x est nul, il existe $V' \subset V$ et $s' \leq s$ tels que $\overline{D}_{V'}(P_0, s')$ appartienne à $\mathcal{V}_x$ et f soit nulle sur $\overline{D}_{V'}(P_0, s')$. Le résultat découle alors du fait que le morphisme naturel

$$\mathcal{B}(V')\langle |T| \leq s' \rangle[S]/(P_0(S) - T) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_{V'}(P_0, s'))$$

est un isomorphisme.

Puisque l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}_b$, pour tous i et k , $a_{i,k}$ est nul sur V . Le résultat s'ensuit.

- Supposons que $\mathcal{H}(b)$ est ultramétrique et non trivialement valué.

Soit $\mathcal{V}_x$ une base de voisinages de x satisfaisant les conclusions du corollaire 3.1.13 iii'). Soient U un voisinage compact de x , $\overline{D}_V(P_0, s)$ un élément de $\mathcal{V}_x$ inclus dans $\mathring{U}$ et f un élément de $\mathcal{B}(U)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_x$ est nulle. Par hypothèse, il existe $Q \in \mathcal{B}(V)[S]$ unitaire de degré d et un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}_{>0}$ contenant t tels que, pour tout voisinage compact spectralement convexe V' de b dans V et tout $s' \in I$, on ait $\overline{D}_{V'}(Q, s') = \overline{D}_{V'}(P_0, s')$ et le disque $\overline{D}_{V'}(s')$ (avec coordonnée T) satisfasse la propriété $(\mathcal{BN}_{Q(S)-T})$.

Puisque $\mathcal{H}(b)$ n'est pas trivialement valué, on peut trouver un polynôme à coefficients dans $\kappa(b)$ unitaire de degré d et séparable qui soit arbitrairement proche de $P_0(b)$. Par conséquent, il existe un voisinage compact spectralement convexe V' de b dans V , $Q' \in \mathcal{B}(V')[S]$ unitaire de degré d tel que $Q'(b)$ soit séparable et $s_0, s_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ vérifiant $s_0 < s < s_1$ tels que, pour tout $s' \in [s_0, s_1]$, on ait $\overline{D}_{V'}(Q', s') = \overline{D}_{V'}(P_0, s')$. On peut également supposer que f est nulle sur $\overline{D}_{V'}(Q', s_0)$, que $\overline{D}_{V'}(Q', s_1)$ soit contenu dans U et que $s_1 \in I$. D'après la proposition 3.1.11, ii), on peut supposer que $\overline{D}_{V'}(s_0)$ et $\overline{D}_{V'}(s_1)$ satisfont la condition $(\mathcal{BN}_{Q'(S)-T})$.

En utilisant le même argument que dans le cas précédent, on montre que l'image de f dans $\overline{D}_{V'}(Q', s_1)$ est nulle. Par conséquent, l'image de f dans $\overline{D}_{V'}(Q', s) = \overline{D}_{V'}(P_0, s) = \overline{D}_{V'}(Q, s)$ est nulle. En réutilisant le même argument, on montre que l'image de f dans $\overline{D}_V(Q, s) = \overline{D}_V(P_0, s)$ est nulle. $\square$

Nous allons maintenant synthétiser les propositions 3.3.3 et 3.3.4 dans le résultat suivant.

Proposition 3.3.5. — *Soit b un point décent de B . Supposons que l'idéal nul de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini. Alors, pour tout point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de b , l'idéal nul de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini.*

Démonstration. — Soit x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de b . D'après la remarque 1.6.22, quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que la projection x_k de x sur les k premières soit purement localement transcendante au-dessus de b et tel que x soit rigide épais au-dessus de x_k . Rappelons que, d'après la proposition 1.6.4, si b est ultramétrique typique, alors tous les points au-dessus de b le sont également.

On montre tout d'abord que le point x_k satisfait les conclusions de l'énoncé à l'aide d'une récurrence utilisant la proposition 3.3.3. On passe de x_k à x par une récurrence utilisant la proposition 3.3.4. $\square$

Rappelons un résultat technique qui nous sera utile.

Lemme 3.3.6 ([Poi13a, lemme 9.14]). — *Soit b un point décent de B tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante ϖ_b . Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ un point rigide épais au-dessus de b . Alors, pour tout élément non nul f de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$, il existe un unique couple $(v, g) \in \mathbf{N} \times \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) $f = \varpi_b^v g$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$;
- ii) la restriction de g à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$ n'est pas nulle.

$\square$

Adaptons maintenant ce résultat (et sa preuve) au cas d'un corps fort.

Lemme 3.3.7. — *Soit b un point décent de B tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps fort. Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de b . Alors, pour tout élément non nul f de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$, la restriction de f à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$ n'est pas nulle.*

Démonstration. — Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. D'après la remarque 1.6.22, quitte à les permuter, on peut supposer que la projection x_k de x sur les k premières coordonnées est purement localement transcendante au-dessus de b et que x est rigide épais au-dessus de x_k . Démontrons l'énoncé par récurrence sur l'entier $n - k$.

Si $n - k = 0$, alors x est purement localement transcendant sur b et, d'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,x}}$ est un corps. Par conséquent, si f est non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$, alors $f(x)$ est non nul. Le résultat s'ensuit.

Soit $l \in \mathbf{N}$ et supposons avoir démontré le résultat pour $n - k = l$. Supposons que $n - k = l + 1$. Notons x_{n-1} la projection de x sur les $n - 1$ premières coordonnées. Par hypothèse, x est rigide épais au-dessus de x_{n-1} . Considérons son polynôme minimal $\mu_{\kappa,x} \in \kappa(x_{n-1})[T_n]$ sur $\kappa(x_{n-1})$ et choisissons $P \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}},x_{n-1}}[T_n]$ un relevé unitaire de ce polynôme. Notons $0_{x_{n-1}}$ le point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de x_{n-1} défini par $T_n = 0$. D'après le théorème 1.6.7 et le lemme 1.6.25, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},0_{x_{n-1}}}[S]/(P(S) - T_n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x},$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $0_{x_{n-1}}$. Or, d'après la proposition 1.4.8, tout élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an},0_{x_{n-1}}}$ possède un développement en série entière à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an},x_{n-1}}$. On conclut alors par l'hypothèse de récurrence. $\square$

À l'aide du théorème de division de Weierstraß avec contrôle sur les normes que nous avons démontré dans la partie précédente (cf. théorème 3.2.1), nous allons pouvoir montrer l'énoncé de fermeture des idéaux souhaité. Pour ce faire, nous allons nous placer dans un cadre légèrement plus restrictif que celui des anneaux de base de la définition 1.6.17.

Définition 3.3.8. — Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. On dit que $\mathcal{A}$ est un *anneau de base géométrique* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) $\mathcal{A}$ est un anneau de base tel que, pour tout $b \in B$, les éléments de $\mathcal{V}_b$ puissent être choisis d'intérieur connexe ;
- ii) $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfait le principe du prolongement analytique.

Exemple 3.3.9. — Nos exemples usuels 1.1.16 à 1.1.21 : les corps valués, l'anneau $\mathbf{Z}$ et les anneaux d'entiers de corps de nombres, les corps hybrides, les anneaux de valuation discrète et les anneaux de Dedekind trivialement valués sont tous des anneaux de base géométriques.

Lemme 3.3.10. — Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique. Alors, pour tout $b \in B$, tout idéal de $\mathcal{O}_{B,b}$ est $\mathcal{B}$ -fortement de type fini relativement à $\mathcal{V}_b$.

Démonstration. — Soit $b \in B$. Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort. Les idéaux de $\mathcal{O}_{B,b}$ sont $\mathcal{O}_{B,b}$ et (0) . Par hypothèse, il existe une base de voisinages compacts et spectralement convexes $\mathcal{V}_b$ de b tel que 0 engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal (0) relativement à $\mathcal{V}_b$. Il est immédiat que 1 engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal $\mathcal{O}_{B,b}$ relativement à $\mathcal{V}_b$.

Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Fixons-en une uniformisante ϖ . Les idéaux de $\mathcal{O}_{B,b}$ sont $\mathcal{O}_{B,b}$, (0) et les (ϖ^n) pour $n \in \mathbf{N}^*$. Par hypothèse, il existe une base de voisinages compacts, spectralement convexes et d'intérieur connexe $\mathcal{V}_b$ de b tel que ϖ engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal (ϖ) relativement à $\mathcal{V}_b$. D'après le lemme 3.3.1, pour tout $n \geq 2$, ϖ^n engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal (ϖ^n) relativement à $\mathcal{V}_b$. Comme précédemment, il est évident que 1 engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal $\mathcal{O}_{B,b}$ relativement à $\mathcal{V}_b$. Il reste à traiter le cas de l'idéal nul. Puisque les éléments de $\mathcal{V}_b$ sont d'intérieur connexe,

le fait que 0 engendre $\mathcal{B}$ -fortement l'idéal (0) relativement à $\mathcal{V}_b$ découle du principe du prolongement analytique. $\square$

Le résultat qui suit généralise [Poi10a, théorème 6.6.19] en dimension quelconque. La preuve que nous proposons est très largement inspirée de celle de [GR09, theorem II.D.2].

Pour $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, $g = (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{O}_x^p$ et V voisinage compact de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ sur lequel g est définie, on pose

$$\|g\|_V := \max_{1 \leq i \leq p} (\|g_i\|_V).$$

Théorème 3.3.11. — *Supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique. Soient x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, $p \geq 1$ un entier et M un sous-module de $\mathcal{O}_x^p$ engendré par des éléments $f_1, \dots, f_l$.*

Alors, pour tout voisinage compact V de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, il existe un voisinage compact spectralement convexe V' de x dans V sur lequel les f_i sont $\mathcal{B}$ -définis et une constante $K_{V',V} \in \mathbf{R}_{>0}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout élément f de $\mathcal{B}(V)^p$ dont l'image dans $\mathcal{O}_x^p$ appartient à M , il existe $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{B}(V')$ tels que

$$i) \ f = \sum_{i=1}^l a_i f_i \text{ dans } \mathcal{B}(V')^p ;$$

$$ii) \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \text{ on a } \|a_i\|_{V'} \leq K_{V',V} \|f\|_V.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que si l'énoncé vaut pour l'entier $p = 1$ et pour un entier $p = p_0 \geq 1$ donné, alors il vaut encore pour $p = p_0 + 1$. En effet, considérons un sous-module M de $\mathcal{O}_x^{p_0+1}$ engendré par des éléments $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{O}_x^{p_0+1}$. Notons $f'_1, \dots, f'_l \in \mathcal{O}_x^{p_0}$ les projections respectives de $f_1, \dots, f_l$ sur les p_0 premiers facteurs et M' le sous-module de $\mathcal{O}_x^{p_0}$ engendré par $f'_1, \dots, f'_l$. Le noyau M'' du morphisme $M \rightarrow M'$ s'identifie alors à un sous-module de $\mathcal{O}_x$. Le résultat pour le module M découle aisément de celui pour M' et M'' .

Une récurrence immédiate montre qu'il suffit de traiter le cas où $p = 1$, cadre que l'on adopte désormais.

Notons b la projection de x sur $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. D'après la remarque 1.6.22, quitte à permuter les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, on peut supposer qu'il existe $k \in$

$\llbracket 0, n \rrbracket$ tel que la projection x_k de x sur les k premières coordonnées soit purement localement transcendante au-dessus de b et que x soit rigide épais au-dessus de x_k . Démontrons le résultat par récurrence sur l'entier $n - k$.

- *Initialisation de la récurrence : $n - k = 0$.*

Dans ce cas, d'après le théorème 1.6.28, l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est un corps fort ou un anneau fortement de valuation discrète. Soit V un voisinage compact de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$.

Supposons tout d'abord que $\mathcal{O}_{X, x}$ est un corps fort. Si tous les f_i sont nuls, le résultat découle de la définition de corps fort. Sinon, nous pouvons supposer que $f_1 \neq 0$. Il existe alors un voisinage spectralement convexe V' de x dans V sur lequel f_1 et f_1^{-1} sont $\mathcal{B}$ -définies. Pour tout $f \in \mathcal{B}(V)$, nous avons alors $f = (ff_1^{-1})f_1$ dans $\mathcal{B}(V')$ et $\|ff_1^{-1}\|_{V'} \leq \|f_1^{-1}\|_{V'} \|f\|_V$, ce qui démontre l'énoncé.

Supposons maintenant que $\mathcal{O}_x$ est un anneau fortement de valuation discrète. Si $M = 0$, le résultat découle de la proposition 3.3.5. Si $M = \mathcal{O}_x$, l'un des f_i est inversible et le résultat s'obtient comme dans le cas où $\mathcal{O}_x$ est un corps fort. Sinon, on peut se ramener au cas où $l = 1$ et f_1 est une puissance non triviale d'une uniformisante de $\mathcal{O}_x$. Le résultat se déduit alors du lemme 3.3.1.

- *Étape de récurrence.*

Supposons que le résultat soit satisfait lorsque $n - k = N \geq 0$ (pour $p = 1$ et donc pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ d'après la remarque préliminaire) et démontrons-le dans le cas où $n - k = N + 1$.

– *Cas où la restriction de f_1 à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-k, \text{an}}$ n'est pas nulle*

Soient x_{n-1} la projection de x sur les $n - 1$ premières coordonnées. Puisque $n - k \geq 1$, le point x est rigide épais au-dessus de x_{n-1} . Notons $P \in \kappa(x_{n-1})[T]$ son polynôme minimal. Soit W un voisinage spectralement convexe de x_{n-1} dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$ sur lequel les coefficients de P sont $\mathcal{B}$ -définis. Puisque l'énoncé est local, on peut se placer dans $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(W)}^{1, \text{an}}$ pour le démontrer.

Soit $\varphi_P: \mathbf{A}_{\mathcal{B}(W)}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}(W)}^{1, \text{an}}$ le morphisme induit par P . En notant $0_{x_{n-1}}$ le point de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(W)}^{1, \text{an}}$ appartenant à la fibre au-dessus de x_{n-1} et égal à 0 dans cette fibre, on a $\varphi_P^{-1}(0_{x_{n-1}}) = \{x\}$. Le corollaire 3.2.5 permet de ramener la démonstration du résultat pour le point x (pour $p = 1$) à celui pour le

point $0_{x_{n-1}}$ (pour p égal au degré de P , et donc pour $p = 1$ d'après la remarque préliminaire). On peut donc supposer que $x = 0_{x_{n-1}}$.

Par hypothèse, la restriction de f_1 à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-k, \text{an}}$ n'est pas nulle. Le lemme 1.6.11 assure que, quitte à effectuer un changement de variables, on peut supposer que la restriction de f_1 à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-1, \text{an}}$ n'est pas nulle. Notons T la dernière coordonnée sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Alors $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_{n-1})}^{1, \text{an}}, x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante T . Notons v la valuation de f_1 .

D'après le théorème de division de Weierstraß 3.2.1 (la version sans normes [Poi13a, théorème 8.3] suffirait), tout élément f de $\mathcal{O}_x$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $f = f'f_1 + \tilde{f}$ avec $f' \in \mathcal{O}_x$ et $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{x_{n-1}}[T]$ de degré inférieur à $v - 1$.

Considérons le $\mathcal{O}_{x_{n-1}}$ -module $\tilde{M} := \mathcal{O}_{x_{n-1}}[T]_{\leq v-1} \cap M$, autrement dit le module des restes de M dans la division de Weierstraß par f_1 . Par noetherianité, $\tilde{M}$ est de type fini. Fixons des générateurs $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m$. Pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, il existe $a_{i,1}, \dots, a_{i,l} \in \mathcal{O}_x$ tels que $\tilde{g}_i = \sum_{j=1}^l a_{i,j} f_j$ dans $\mathcal{O}_x$.

Soit V un voisinage compact de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. D'après le théorème de division de Weierstraß 3.2.1, il existe un voisinage compact W de x_{n-1} dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$, un polynôme $P \in \mathcal{B}(W)[T]$ et des nombres réel $s, K \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $\overline{D}_W(P; s)$ soit contenu dans V et, pour tout élément f de $\mathcal{B}(V)$ les propriétés suivantes soient satisfaites : f' est $\mathcal{B}$ -défini sur $\overline{D}_W(P; s)$, les coefficients de $\tilde{f}$ sont $\mathcal{B}$ -définis sur W et on a

$$\|f'\|_{\overline{D}_W(P; s)} \leq K \|f\|_V \text{ et } \|\tilde{f}\|_{\overline{D}_W(P; s)} \leq K \|f\|_V.$$

Puisque le point x est le point 0 au-dessus de x_{n-1} , il possède une base de voisinages de la forme $\overline{D}_W(T; s)$ et on peut donc supposer que $P = T$. On peut en outre supposer que tous les $a_{i,j}$ sont $\mathcal{B}$ -définis sur $\overline{D}_W(T; s)$.

Pour toute partie compacte U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et tout nombre réel $t \in \mathbf{R}_{>0}$, considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi: \quad \mathcal{B}(U)^v &\longrightarrow \mathcal{B}(U)[T]_{\leq v-1} \\ (h_0, \dots, h_{v-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{v-1} h_i T^i \end{aligned}.$$

Pour tous $h \in \mathcal{B}(U)^v$ et $k \in \mathcal{B}(U)[T]_{\leq v-1}$, on a

$$\|\psi(h)\|_{\overline{D}_U(T; t)} \leq v \max(1, t^{v-1}) \|h\|_U$$

et

$$\|\psi^{-1}(k)\|_U \leq \max(1, t^{1-v}) \|k\|_{\overline{D}_U(T;t)}.$$

La première inégalité est immédiate. Pour la seconde, on se ramène immédiatement à une situation un corps valué complet, auquel cas elle est conséquence de la description explicite des normes des disques dans le cas ultramétrique ou de la formule de Cauchy dans le cas archimédien (cf. [Poi10a, lemme 2.1.2]).

L'hypothèse de récurrence appliquée au module $\tilde{M}$, que l'on identifie à un sous-module de $\mathcal{O}_{x_{n-1}}^v$ via la restriction de ψ , et à W fournit un voisinage W' de x_{n-1} dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$ et une constante K' .

On peut maintenant démontrer le résultat. Soit $f \in \mathcal{B}(V)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_x$ appartient à M . On peut l'écrire sous la forme $f = f'f_1 + \sum_{j=1}^m b_j \tilde{g}_j$ avec $f' \in \mathcal{B}(\overline{D}_W(T;s))$, $b_1, \dots, b_m \in \mathcal{B}(W')$,

$$\|f'\|_{\overline{D}_W(T;s)} \leq K \|f\|_V$$

et, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\|b_j\|_{W'} \leq K \max(1, t^{1-v}) \|f\|_V.$$

On conclut alors en réécrivant f sous la forme

$$f = (f' + \sum_{j=1}^m b_j a_{i,j}) f_1 + \sum_{i=2}^l \left(\sum_{j=1}^m b_j a_{i,j} \right) f_i$$

et en choisissant $V' := \overline{D}_{W'}(T;s)$.

– Cas général

Si $M = 0$, le résultat découle de la proposition 3.3.5. On peut donc supposer que $M \neq 0$, et même que tous les f_i sont non nuls.

Si $\mathcal{O}_b$ est un corps fort, alors le lemme 3.3.7 assure que la restriction de f_1 à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-k, \text{an}}$ n'est pas nulle et on se ramène au cas précédent. On peut donc supposer que $\mathcal{O}_b$ est un anneau fortement de valuation discrète. Soit ϖ_b une uniformisante de $\mathcal{O}_b$.

D'après le lemme 3.3.6, pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, il existe $v_i \in \mathbf{N}$ et $g_i \in \mathcal{O}_x$ dont la restriction à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-k, \text{an}}$ n'est pas nulle tels que $f_i = \varpi_b^{v_i} g_i$ dans $\mathcal{O}_x$. Quitte à permuter les f_i , on peut supposer que v_1 est le minimum des v_i . Le lemme 3.3.2 permet de déduire le résultat pour l'idéal M de $\mathcal{O}_x$ engendré par les f_i du résultat pour l'idéal engendré par les $\pi_b^{-v_1} f_i$. Pour ce dernier, la

restriction de la fonction $\pi_b^{-v_1} f_1 = g_1$ à $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-k, \text{an}}$ n'est pas nulle et on se ramène de nouveau au cas précédent. $\square$

Corollaire 3.3.12. — *Supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique. Soient x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, $p \geq 1$ un entier et M un sous-module de $\mathcal{O}_x^p$. Soient V un voisinage compact de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(V)^p$ qui converge vers un élément g de $\mathcal{B}(V)^p$. Si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'image de g_n dans $\mathcal{O}_x^p$ appartient à M , alors l'image de g dans $\mathcal{O}_x^p$ appartient à M .*
Démonstration. — D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_x$ est noethérien, donc M est de type fini. Soient $f_1, \dots, f_l$ des générateurs de M . D'après le théorème 3.3.11, il existe un voisinage compact V' de x dans V sur lequel les f_i sont $\mathcal{B}$ -définis et une constante $K \in \mathbf{R}_{>0}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout élément f de $\mathcal{B}(V)^p$ dont l'image dans $\mathcal{O}_x^p$ appartient à M , il existe $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{B}(V')$ tels que

- i) $f = \sum_{i=1}^l a_i f_i$ dans $\mathcal{B}(V')^p$;
- ii) pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, on a $\|a_i\|_{V'} \leq K \|f\|_V$.

Soit $(g_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ une sous-suite de $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on ait l'inégalité $\|g_{n_{k+1}} - g_{n_k}\|_V \leq 1/2^k$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $a_{1,k}, \dots, a_{l,k} \in \mathcal{B}(V')$ tels que

- i) $g_{n_{k+1}} - g_{n_k} = \sum_{i=1}^l a_{i,k} f_i$ dans $\mathcal{B}(V')^p$;
- ii) pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, on a $\|a_{i,k}\|_{V'} \leq \frac{K}{2^k}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, la suite $(\sum_{j=0}^k a_{i,j})_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, et donc convergente. Notons $s_i \in \mathcal{B}(V')$ sa limite. On a alors

$$g = g_{n_0} + \sum_{i=1}^l s_i f_i \text{ dans } \mathcal{B}(V')^p.$$

Le résultat s'ensuit. $\square$

Remarque 3.3.13. — La présence des anneaux $\mathcal{B}(V)$ dans l'énoncé du corollaire 3.3.12 n'est guère heureuse et peut le rendre difficile à utiliser en pratique. Au chapitre 8, grâce à la théorie des espaces de Stein, nous montrerons que le résultat reste valable en remplaçant les $\mathcal{B}(V)$ par des $\mathcal{O}(U)$, cf. corollaire 8.4.8.

CHAPITRE 4

CATÉGORIE DES ESPACES ANALYTIQUES : PROPRIÉTÉS

Ce chapitre est consacré à l'étude de la catégorie des espaces analytiques sur un anneau de Banach. Fixons un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$.

Dans la section 4.1, nous construisons un foncteur d'analytification de la catégorie des schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$ vers celle des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. L'ingrédient principal est l'existence d'une correspondance bijective entre les morphismes d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique vers l'espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et les n -uplets de fonctions globales sur X . La démonstration de ce résultat repose de façon cruciale sur le théorème de fermeture des idéaux 3.3.11. Aussi devrons-nous souvent, dans cette section et tout au long du chapitre, supposer que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique.

Dans la section 4.2, étant donné un anneau de Banach $\mathcal{B}$ et un morphisme borné $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nous construisons un foncteur $\cdot \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ d'extension des scalaires, défini de la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques vers celle des espaces $\mathcal{B}$ -analytiques. Dans la section 4.3, nous démontrons que la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques admet des produits fibrés.

Nous dédions deux sections à des propriétés importantes des morphismes : propreté dans la section 4.4 et séparation dans la section 4.6.

La section 4.5 est consacrée aux parties spectralement convexes et, plus précisément, à la description de l'extension des scalaires d'une partie spectralement convexe et du produit fibré de deux parties spectralement convexes. Nous expliquons également comment identifier une fibre d'un morphisme à un produit fibré.

4.1. Analytification de schémas

La théorie des schémas peut fournir de nombreux exemples d'espaces analytiques, *via* un foncteur d'analytification. Afin de construire ce foncteur, nous aurons besoin de la description attendue de l'ensemble des morphismes d'un espace analytique quelconque vers un espace affine analytique.

Proposition 4.1.1. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ un morphisme borné de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach, où $\mathcal{B}'$ est un anneau de base géométrique. Soit X un espace $\mathcal{B}'$ -analytique. L'application*

$$\begin{aligned} s_X: \quad \text{Hom}_{\text{An}_{\mathcal{A}}, f}(X, \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}) &\longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n \\ \varphi &\longmapsto (\varphi^\sharp(T_1), \dots, \varphi^\sharp(T_n)) \end{aligned}$$

où $T_1, \dots, T_n$ sont les coordonnées, sur $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}$ est bijective.

En outre, la famille $(s_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{B}'\text{-An})}$ définit une transformation naturelle entre les foncteurs $\text{Hom}_{\text{An}_{\mathcal{A}}, f}(\cdot, \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}})$ et $\Gamma(\cdot, \mathcal{O})^n$.

Démonstration. — Commençons par vérifier que la famille $s := (s_X)$ définit bien une transformation naturelle. En effet, pour tout morphisme d'espaces $\mathcal{B}'$ -analytiques $\psi: Y \rightarrow X$, on a

$$s_Y(\varphi \circ \psi) = (\psi^\sharp(\varphi^\sharp(T_1)), \dots, \psi^\sharp(\varphi^\sharp(T_n))) = \psi^\sharp(s_X(\varphi)).$$

Soit X un espace $\mathcal{B}'$ -analytique. Montrons que s_X est bijective.

• *Injectivité* : Soient $\varphi: X \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}$ et $\varphi': X \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}$ des morphismes d'espaces analytiques au-dessus de f tels que l'on ait

$$(\varphi^\sharp(T_1), \dots, \varphi^\sharp(T_n)) = (\varphi'^\sharp(T_1), \dots, \varphi'^\sharp(T_n)).$$

Soit $x \in X$. Commençons par montrer que $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Soit $P \in \mathcal{B}[T_1, \dots, T_n]$. Notons $f(P) \in \mathcal{B}'[T_1, \dots, T_n]$ le polynôme obtenu en appliquant f à tous les coefficients de P . D'après la proposition 2.2.10, on a

$$\begin{aligned} |P(T_1(\varphi(x)), \dots, T_n(\varphi(x)))| &= |f(P)(\varphi^\sharp(T_1)(x), \dots, \varphi^\sharp(T_n)(x))| \\ &= |f(P)(\varphi'^\sharp(T_1)(x), \dots, \varphi'^\sharp(T_n)(x))| \\ &= |P(T_1(\varphi'(x)), \dots, T_n(\varphi'(x)))|. \end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi(x) = \varphi'(x)$.

Montrons, à présent, que, pour tout $y \in \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}$, les morphismes $\varphi^\sharp: \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}, y} \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ et $\varphi'^\sharp: \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}, y} \rightarrow \varphi'_*(\mathcal{O}_X)_y = \varphi_*(\mathcal{O}_X)_y$ sont égaux.

Soit $y \in \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$. Soient $F \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}},y}$ et V un voisinage compact de y dans $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ sur lequel F est définie. Quitte à réduire V , on peut supposer que F est limite uniforme sur V d'une suite de fractions rationnelles $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_{i \in \mathbf{N}}$ sans pôles sur V .

Soit $x \in \varphi^{-1}(\mathring{V})$. Montrons que $\varphi^\sharp(F) = \varphi'^\sharp(F)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Par définition d'espace $\mathcal{B}'$ -analytique, x possède un voisinage Z qui est un fermé analytique d'un ouvert U d'un espace affine analytique sur $\mathcal{B}'$. Notons $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux cohérent sur U définissant Z et $j: Z \rightarrow U$ l'immersion fermée correspondante.

La définition de morphisme assure qu'il existe un voisinage U' de $j(x)$ dans U et un morphisme $\tilde{\varphi}: U' \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de f tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} \\ j \uparrow & \nearrow \varphi|_{j^{-1}(U')} & \\ j^{-1}(U') & & \end{array}$$

commute. Quitte à restreindre U' , on peut supposer qu'il existe également un morphisme $\tilde{\varphi}': U' \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ au-dessus de f tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} & \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} \\ j \uparrow & \nearrow \varphi'|_{j^{-1}(U')} & \\ j^{-1}(U') & & \end{array}$$

commute.

Par la définition de morphisme entre ouverts d'espaces affines, il existe un voisinage compact U'' de x dans U' tel que $\tilde{\varphi}(U'') \subset V$ et, pour tout $G \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}}(V)$, $\|\tilde{\varphi}^\sharp(G)\|_{U''} \leq \|G\|_V$. On en déduit que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left\| \tilde{\varphi}^\sharp(F) - \tilde{\varphi}^\sharp\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) \right\|_{U''} = 0.$$

Quitte à restreindre U'' , on peut supposer que le même résultat vaut pour $\tilde{\varphi}'$, et donc que

$$\|\tilde{\varphi}^\sharp(F) - \tilde{\varphi}'^\sharp(F)\|_{U''} = 0.$$

Par hypothèse, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{\varphi}^\sharp(T_k) - \tilde{\varphi}'^\sharp(T_k)$ appartient à $\mathcal{I}(U'')$. On en déduit que, pour $i \in \mathbf{N}$, $\tilde{\varphi}^\sharp\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) - \tilde{\varphi}'^\sharp\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$ appartient à $\mathcal{I}(U'')$. Le

lemme 2.1.3 et le corollaire 3.3.12 assurent alors que l'élément $\tilde{\varphi}^\sharp(F) - \tilde{\varphi}'^\sharp(F)$ de $\mathcal{O}_{U'',j(x)}$ appartient à $\mathcal{I}_{j(x)}$ et donc que $\varphi^\sharp(F) = \varphi'^\sharp(F)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

On a démontré que $\varphi^\sharp = \varphi'^\sharp$, et donc que $\varphi = \varphi'$.

• *Surjectivité* : Soient $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{O}_X(X)$. Puisque l'application s_X est injective, il suffit de vérifier que tout point x de X possède un voisinage ouvert Z tel que $(F_1, \dots, F_n)$ appartienne à l'image de s_Z .

Soit x un point de X . Il possède un voisinage Z qui est un fermé analytique d'un ouvert U d'un espace affine analytique sur $\mathcal{B}'$. Notons $j: Z \rightarrow U$ l'immersion fermée correspondante. Quitte à restreindre Z et U , on peut supposer que $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{O}_Z(Z)$ appartiennent à l'image du morphisme $j^\sharp: \mathcal{O}_U(U) \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$. Choisissons des relevés $F'_1, \dots, F'_n \in \mathcal{O}_U(U)$ de ces éléments.

D'après l'exemple 2.1.4, il existe un morphisme d'espaces $\mathcal{B}'$ -analytiques $\psi: U \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}'}^{n,\text{an}}$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $\psi^\sharp(T_i) = F'_i$. Posons $\varphi := \tilde{f}_n \circ \psi \circ j$, où $\tilde{f}_n: \mathbf{A}_{\mathcal{B}'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ est le morphisme défini dans l'exemple 2.2.4. C'est un morphisme analytique au-dessus de f qui satisfait $s_Z(\varphi) = (F_1, \dots, F_n)$. $\square$

Corollaire 4.1.2. — *Soit $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ un morphisme borné de $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach, où $\mathcal{B}'$ est un anneau de base géométrique. Soient $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{B}[T_1, \dots, T_n]$ et $r_1, s_1, \dots, r_k, s_k \in \mathbf{R}$. Posons*

$$U := \bigcap_{i=1}^k \{y \in \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} : r_i < |P_i(y)| < s_i\}.$$

Soit X un espace $\mathcal{B}'$ -analytique. Alors, l'application s_X induit une bijection entre $\text{Hom}_{A_{n,\mathcal{A}},f}(X, U)$ et l'ensemble

$$\{(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}(X)^n : \forall x \in X, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, r_i < |P_i(f_1, \dots, f_n)(x)| < s_i\}$$

Démonstration. — Le résultat provient du fait que, pour tout $x \in X$ et tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} |P_i(\varphi(x))| &= |P_i(T_1(\varphi(x)), \dots, T_n(\varphi(x)))| \\ &= |P_i(\varphi^\sharp(T_1)(x), \dots, \varphi^\sharp(T_n)(x))|. \end{aligned}$$

$\square$

Il découle de la proposition 4.1.1 que, sous des hypothèses convenables, l'espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ représente le foncteur attendu.

Corollaire 4.1.3. — Supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ représente le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\text{-An} & \longrightarrow & \text{Ens} \\ X & \longmapsto & \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n \end{array} .$$

□

Nous pouvons maintenant construire un foncteur d'analytification. Nous noterons $\text{Hom}_{\mathcal{A}\text{-loc}}(\cdot, \cdot)$ l'ensemble des morphismes dans la catégorie des espaces localement $\mathcal{A}$ -annelés.

Théorème 4.1.4. — Supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique. Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{\mathcal{X}}: \mathcal{A}\text{-An} & \longrightarrow & \text{Ens} \\ Y & \longmapsto & \text{Hom}_{\mathcal{A}\text{-loc}}(Y, \mathcal{X}) \end{array}$$

est représentable.

Démonstration. — Nous allons procéder en plusieurs étapes.

- $\mathcal{X}$ est un espace affine.

Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{X} = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n$. Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n$. Pour tout espace $\mathcal{A}$ -analytique Y , l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}\text{-loc}}(Y, \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n) & \rightarrow & \mathcal{O}(Y)^n \\ \varphi & \mapsto & (\varphi^{\sharp}(T_1), \dots, \varphi^{\sharp}(T_n)) \end{array}$$

est alors une bijection (cf. [EGA1, proposition 1.6.3]). La proposition 4.1.1 entraîne alors que $\Phi_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n}$ est représenté par $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$.

- $\mathcal{X}$ est un schéma affine de présentation finie sur $\mathcal{A}$.

Il existe $n \in \mathbf{N}$ et un idéal de type fini I de $\mathcal{O}(\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n)$ tel que $\mathcal{X}$ soit le sous-schéma fermé de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n$ défini par I . L'idéal I engendre un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Notons X le fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ défini par $\mathcal{I}$. Le point précédent et la proposition 2.3.8 assurent que le foncteur $\Phi_{\mathcal{X}}$ est représenté par X .

- $\mathcal{X}$ est un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$.

Le schéma $\mathcal{X}$ admet un recouvrement ouvert $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ par des schémas affines de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Pour chaque $i \in I$, considérons l'espace $\mathcal{A}$ -analytique X_i et le morphisme $\rho_i: X_i \rightarrow \mathcal{X}_i$ associés à $\mathcal{X}_i$ par la construction du point précédent.

Pour tout $i \in I$ et tout ouvert U de $\mathcal{X}_i$, on vérifie que $\rho_i^{-1}(U)$ représente le foncteur Φ_U . On déduit de cette propriété que les X_i se recollent. En effet, on peut identifier les intersections puisqu'elles représentent un même foncteur.

On vérifie que l'espace $\mathcal{A}$ -analytique X obtenu en recollant les X_i représente $\mathcal{X}$. $\square$

Définition 4.1.5. — Supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique. Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. On appelle *analytification* ou *analytifié* de $\mathcal{X}$ l'espace $\mathcal{A}$ -analytique qui représente $\Phi_{\mathcal{X}}$. On le note $\mathcal{X}^{\text{an}}$ et on note $\rho_{\mathcal{X}}: \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme d'espaces localement $\mathcal{A}$ -annelés canoniquement associé.

Soit $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme entre schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. La représentabilité du foncteur $\Phi_{\mathcal{Y}}$ assure l'existence d'un unique morphisme d'espace $\mathcal{A}$ -analytiques de $\mathcal{X}^{\text{an}}$ dans $\mathcal{Y}^{\text{an}}$, noté φ^{an} , faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^{\text{an}} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{X}}} & \mathcal{X} \\ \downarrow \varphi^{\text{an}} & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{Y}^{\text{an}} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Le morphisme $\varphi^{\text{an}}: \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{Y}^{\text{an}}$ est appelé *analytification* ou *analytifié* de φ .

4.2. Extension des scalaires

Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique.

Définition 4.2.1. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. On dit que X *s'étend* à $\mathcal{B}$ si le foncteur

$$\begin{array}{ccc} B_{X,\mathcal{B}}: & \mathcal{B}\text{-An} & \longrightarrow \text{Ens} \\ & Y & \longmapsto \text{Hom}_{\text{An}_{\mathcal{A}},f}(Y, X) \end{array}$$

est représentable. Dans ce cas, on appelle *extension des scalaires de X à $\mathcal{B}$* l'espace $\mathcal{B}$ -analytique représentant $B_{X,\mathcal{B}}$. On le note $X_{\mathcal{B}}$ ou $X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ (par analogie avec le cas classique, cf. [Ber93, §1.4]).

Commençons par un lemme général.

Lemme 4.2.2. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique qui s'étend à $\mathcal{B}$. Notons $\pi_{\mathcal{B}}: X_{\mathcal{B}} \rightarrow X$ le morphisme canonique.

- i) Soit U un ouvert de X . Alors $\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U)$ est l'extension des scalaires de U à $\mathcal{B}$.
- ii) Soient F un fermé de X défini par un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$. Alors le fermé analytique de $X_{\mathcal{B}}$ défini par l'idéal image de $\pi_{\mathcal{B}}^*\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{B}}}$ est l'extension des scalaires de F à $\mathcal{B}$.
- iii) Soit $\iota: X' \rightarrow X$ une immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée) d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors X' s'étend à $\mathcal{B}$ et le morphisme canonique $X'_{\mathcal{B}} \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ est une immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée) d'espaces $\mathcal{B}$ -analytiques.

Démonstration. — Le point i) découle directement de la propriété universelle de l'extension. Pour démontrer le point ii), on utilise la proposition 2.3.8. Le point iii) se déduit des deux premiers. $\square$

Passons maintenant à des résultats d'existence.

Proposition 4.2.3. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors l'extension des scalaires de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ à $\mathcal{B}$ est $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ avec pour morphisme canonique $\tilde{f}_n: \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, tel que défini dans l'exemple 2.2.4.

Démonstration. — Le résultat découle de la proposition 4.1.1. $\square$

Théorème 4.2.4. — Tout espace $\mathcal{A}$ -analytique s'étend à $\mathcal{B}$.

Démonstration. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Si X est un modèle local $\mathcal{A}$ -analytique, alors le résultat découle de la proposition 4.2.3 et du lemme 4.2.2. Le cas général s'en déduit en recouvrant X par des modèles locaux et en recollant les différentes extensions. $\square$

On peut considérer des extensions des scalaires successives.

Lemme 4.2.5. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soit $\mathcal{B}'$ un anneau de base géométrique et soit $f': \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ un morphisme d'anneaux de Banach borné. Alors on a un isomorphisme canonique

$$X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}' \xrightarrow{\sim} (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'.$$

Démonstration. — Lorsque X est un espace affine analytique, le résultat découle de la proposition 4.2.3. Celui pour les modèles locaux analytiques s'en déduit par le lemme 4.2.2, et, finalement, le cas général, par recollement. $\square$

On peut également combiner extension des scalaires et analytification.

Lemme 4.2.6. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Alors on a un isomorphisme d'espaces $\mathcal{B}$ -analytiques canonique

$$\mathcal{X}^{an} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})^{an}.$$

Démonstration. — Lorsque $\mathcal{X}$ est un espace affine, le résultat découle de la proposition 4.2.3. Celui pour les schémas affines s'en déduit par le lemme 4.2.2 et la construction de l'analytifié (deuxième point de la preuve du théorème 4.1.4). Le cas général s'en déduit par recollement (troisième point de la preuve du théorème 4.1.4). $\square$

Il est souvent utile de considérer l'extension des scalaires d'un espace au corps résiduel complété d'un de ses points.

Lemme 4.2.7. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Le morphisme $\lambda_x: \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$ de l'exemple 2.2.13 induit un morphisme

$$\lambda_x \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x): \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \longrightarrow X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x)$$

qui est une immersion fermée. Son image x' est envoyée sur x par le morphisme $X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x) \rightarrow X$ et le morphisme canonique $\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(x')$ est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. — L'image de λ_x étant le point x , on peut localiser au voisinage de x pour démontrer le résultat. On peut donc supposer que X est un fermé analytique d'un ouvert U d'un espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,an}$. Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,an}$. Le morphisme λ_x est alors défini comme celui associé au morphisme d'évaluation $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$.

Par extension des scalaires à $\mathcal{H}(x)$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,an} \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x) & \longrightarrow & U \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x) & \longrightarrow & \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{n,an} \end{array}$$

dans lequel le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{n,an}$ est associé au morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] & \longrightarrow & \mathcal{H}(x) \\ T_i & \longmapsto & T_i(x) \end{array}.$$

En particulier, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{n,an}$ est une immersion fermée définie par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ sur $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{n,an}$ engendré par $T_1 - T_1(x), \dots, T_n -$

$T_n(x)$. Le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x)$ est donc encore une immersion fermée, définie par le tiré en arrière de $\mathcal{I}$ sur X .

La dernière partie de l'énoncé est claire. $\square$

4.3. Produits fibrés

Dans cette section, nous supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique. Nous allons démontrer que la catégorie $\mathcal{A}\text{-An}$ admet des produits fibrés. La stratégie adoptée est la même qu'à la section 4.2 pour l'extension des scalaires.

Commençons par deux lemmes généraux.

Lemme 4.3.1. — *Soient $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Supposons que le produit fibré de X et Y au-dessus de Z existe dans la catégorie $\mathcal{A}\text{-An}$. Notons P ce produit et $p_X: P \rightarrow X$ et $p_Y: P \rightarrow Y$ les deux projections canoniques.*

- i) *Soient U un ouvert de X et V un ouvert de Y . Alors $p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V)$ est le produit fibré de U et V au-dessus de Z dans $\mathcal{A}\text{-An}$.*
- ii) *Soient F un fermé de X défini par un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ et G un fermé de Y défini par un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J}$. Alors le fermé analytique de P défini par l'idéal somme des images de $p_X^*\mathcal{I}$ et $p_Y^*\mathcal{J}$ dans $\mathcal{O}_P$ est le produit fibré de F et G au-dessus de Z dans $\mathcal{A}\text{-An}$.*

Démonstration. — Le point i) découle directement de la propriété universelle du produit. Pour démontrer le point ii), on utilise la proposition 2.3.8. $\square$

L'énoncé qui suit découle du précédent.

Lemme 4.3.2. — *Soit Z un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soient X et Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques au-dessus de Z . Supposons qu'il existe un produit fibré P de X et Y au-dessus de Z dans $\mathcal{A}\text{-An}$. Soit $\iota: X' \rightarrow X$ une immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée) d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques au-dessus de Z . Alors, il existe un produit fibré P' de X' et Y au-dessus de Z dans $\mathcal{A}\text{-An}$ et le morphisme canonique $P' \rightarrow P$ est une immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée). $\square$*

Nous allons maintenant démontrer des résultats d'existence de produits.

Proposition 4.3.3. — *Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{an}}$ est le produit de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$ dans la catégorie $\mathcal{A}\text{-An}$.*

Démonstration. — Le résultat découle de la proposition 4.1.1. $\square$

Puisque chaque espace $\mathcal{A}$ -analytique possède un morphisme canonique vers $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, le produit dans la catégorie $\mathcal{A} - \text{An}$ coïncide avec le produit fibré au-dessus de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous pourrions donc utiliser le lemme 4.3.1 dans le contexte des produits.

Corollaire 4.3.4. — Soient $n, m \in \mathbf{N}$. Soient X un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et Y un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$. Alors le produit de X et Y existe dans la catégorie $\mathcal{A} - \text{An}$ et c'est un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{an}}$. $\square$

Corollaire 4.3.5. — La catégorie $\mathcal{A} - \text{An}$ admet des produits finis.

Démonstration. — Il suffit de montrer que le produit de deux espaces existe. Soient X et Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Si ce sont des modèles locaux $\mathcal{A}$ -analytiques, le résultat découle du corollaire 4.3.4. Le cas général s'en déduit en recouvrant les espaces par des modèles locaux et en recollant les différents produits. $\square$

Notation 4.3.6. — Soient X et Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Nous noterons $X \times_{\mathcal{A}} Y$ leur produit dans la catégorie $\mathcal{A} - \text{An}$.

L'existence de produits va nous permettre de démontrer l'existence de produits fibrés.

Proposition 4.3.7. — Soient $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Notons $p_X: X \times_{\mathcal{A}} Y \rightarrow X$ et $p_Y: X \times_{\mathcal{A}} Y \rightarrow Y$ les deux morphismes de projection. Supposons que Z soit un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons

$$f_i := (\varphi \circ p_X)^{\sharp}(T_i) \text{ et } g_i := (\psi \circ p_Y)^{\sharp}(T_i) \text{ dans } \mathcal{O}(X \times_{\mathcal{A}} Y).$$

Alors, le fermé analytique de $X \times_{\mathcal{A}} Y$ défini par l'idéal $(f_1 - g_1, \dots, f_n - g_n)$ est le produit fibré de X et Y au-dessus de Z .

Démonstration. — Cela découle de la proposition 2.3.8. $\square$

Théorème 4.3.8. — Pour tous morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$, le produit fibré de X et Y au-dessus de Z existe et est naturellement un fermé analytique de $X \times_{\mathcal{A}} Y$.

En particulier, la catégorie $\mathcal{A} - \text{An}$ admet des produits fibrés finis.

Démonstration. — Le résultat s'obtient en recouvrant Z par des modèles locaux, en appliquant la proposition 4.3.7 au-dessus de chacun d'eux, puis en recollant les produits fibrés obtenus. $\square$

Notation 4.3.9. — Soient $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Nous noterons $X \times_Z Y$ le produit fibré de X et Y au-dessus de Z dans la catégorie $\mathcal{A}\text{-An}$ (en sous-entendant les morphismes φ et ψ).

En utilisant le corollaire 4.3.4, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 4.3.10. — Soient $n, m \in \mathbf{N}$. Soient X un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et Y un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$. Soient $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors le produit fibré $X \times_Z Y$ est un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{an}}$. $\square$

En utilisant les propriétés universelles, on vérifie que le produit fibré commute à l'extension des scalaires.

Lemme 4.3.11. — Soient $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique. Alors, on a un isomorphisme canonique

$$(X \times_Z Y) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \simeq (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} (Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}).$$

$\square$

On peut également combiner produit fibré et analytification.

Lemme 4.3.12. — Soient $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ des morphismes de schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Alors on a un isomorphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques canonique

$$(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y})^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}^{\text{an}} \times_{\mathcal{Z}^{\text{an}}} \mathcal{Y}^{\text{an}}.$$

Démonstration. — La propriété universelle du produit fibré permet de construire un morphisme canonique $(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y})^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}} \times_{\mathcal{Z}^{\text{an}}} \mathcal{Y}^{\text{an}}$.

En utilisant la propriété universelle de l'analytification et le fait que les produits fibrés dans la catégorie des schémas sont également des produits fibrés dans la catégorie des espaces localement annelés (cf. [Sta20, Tag 01JN]), on construit un morphisme canonique $\mathcal{X}^{\text{an}} \times_{\mathcal{Z}^{\text{an}}} \mathcal{Y}^{\text{an}} \rightarrow (\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y})^{\text{an}}$.

On vérifie que ces morphismes sont inverses l'un de l'autre, ce qui permet de conclure. $\square$

En utilisant l'extension des scalaires, on peut obtenir un énoncé plus général d'existence de produits fibrés. Il se démontre directement à l'aide des résultats déjà obtenus.

Proposition 4.3.13. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Z$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique. Soient Y un espace $\mathcal{B}$ -analytique et $\psi: Y \rightarrow Z$ un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de f . Alors l'espace $\mathcal{B}$ -analytique $(X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Y$ représente le foncteur qui à tout espace analytique T au-dessus de $\mathcal{B}$ associe l'ensemble des diagrammes commutatifs d'espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$ de la forme*

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array} .$$

□

Dans le cadre de la proposition précédente, nous adopterons parfois la notation simplifiée

$$X \times_Z Y := (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} Y.$$

Définissons maintenant les morphismes diagonaux.

Définition 4.3.14. — Soient X, Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme. On note $p_1: X \times_Y X \rightarrow X$ et $p_2: X \times_Y X \rightarrow X$ les deux projections canoniques. On appelle *morphisme diagonal* l'unique morphisme $\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{\text{id}_X} & & X \\ & \searrow \Delta_{X/Y} & & \searrow p_2 & \\ & X \times_Y X & \xrightarrow{\quad} & X & \\ & \downarrow p_1 & & \downarrow \varphi & \\ & X & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & Y & \end{array} .$$

Dans le cas où $Y = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et φ est le morphisme structural, on pose $\Delta_X := \Delta_{X/\mathcal{M}(\mathcal{A})}$.

Proposition 4.3.15. — Soient X, Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme. Supposons que X est un modèle local $\mathcal{A}$ -analytique. Alors, le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion fermée.

Démonstration. — Par hypothèse, X s'identifie à un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et identiquement leur restriction à X . Posons $\Delta := \Delta_{X/Y}$.

Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $X \times_Y X$ engendré par les sections $p_1^*T_j - p_2^*T_j$ avec $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, F le fermé analytique de $X \times_Y X$ qu'il définit et $\iota: F \rightarrow X \times_Y X$ l'immersion fermée associée. Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \Delta^*(p_1^*T_j - p_2^*T_j) &= \Delta^*p_1^*T_j - \Delta^*p_2^*T_j \\ &= T_j - T_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, d'après la proposition 2.3.8, il existe un morphisme $\psi: X \rightarrow F$ tel que $\Delta = \iota \circ \psi$.

Montrons que ψ est un isomorphisme, d'inverse $p_1 \circ \iota$. Cela entraînera que Δ est une immersion fermée, comme désiré. Remarquons, tout d'abord, que l'on a

$$p_1 \circ \iota \circ \psi = p_1 \circ \Delta = \text{id}_X$$

par définition.

Calculons maintenant $\psi \circ p_1 \circ \iota$. D'après le corollaire 4.3.10, $X \times_Y X$ est un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2n,\text{an}}$. Les fonctions $p_1^*T_1, \dots, p_1^*T_n, p_2^*T_1, \dots, p_2^*T_n$ forment un système de coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2n,\text{an}}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$(\psi \circ p_1 \circ \iota)^* \iota^* p_1^*T_i = \iota^* p_1^* \psi^* \iota^* p_1^*T_i = \iota^* p_1^*T_i,$$

et, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a

$$(\psi \circ p_1 \circ \iota)^* \iota^* p_2^*T_j = \iota^* p_1^* \psi^* \iota^* p_2^*T_j = \iota^* p_1^*T_j = \iota^* p_2^*T_j,$$

par définition de F . On déduit alors de la proposition 4.1.1 que $\psi \circ p_1 \circ \iota = \text{id}_X$. $\square$

Corollaire 4.3.16. — Soient X, Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme. Alors, le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion.

Démonstration. — D'après la proposition 2.3.10, il suffit de montrer que tout point z de $X \times_Y X$ possède un voisinage W tel que le morphisme

$\Delta_{X/Y}^{-1}(W) \rightarrow W$ induit par Δ soit une immersion fermée. La question est donc locale sur $X \times_Y X$. D'après le lemme 4.3.1, on peut donc restreindre X et supposer que c'est un modèle local $\mathcal{A}$ -analytique. Le résultat découle alors de la proposition 4.3.15. $\square$

4.4. Morphismes propres

Commençons par rappeler la définition d'application propre entre espaces topologiques (cf. [Bou71, I, §10]).

Définition 4.4.1. — Une application $f: T \rightarrow T'$ entre espaces topologiques est dite *propre* si elle est continue et si, pour tout espace topologique T'' , l'application $f \times \text{id}_{T''}: T \times T'' \rightarrow T' \times T''$ est fermée.

Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques est dit *propre* si l'application induite entre les espaces topologiques sous-jacents est propre au sens précédent.

Remarque 4.4.2. — La propriété est une notion locale au but, cf. [Bou71, I, §10, n° 1, proposition 3 b)].

Remarque 4.4.3. — Dans le cas où $\mathcal{A} = k$ est un corps valué ultramétrique complet, V. Berkovich définit les morphismes propres comme les morphismes qui sont propres au sens topologique et sans bord (cf. [Ber90, p. 50, après le corollaire 3.1.6]). Puisque nous ne considérons ici que des espaces sans bords (cf. remarque 2.1.21), cette dernière condition est toujours satisfaite et il n'est donc pas nécessaire de l'imposer.

Énonçons quelques propriétés des applications propres vis-à-vis de la composition.

Lemme 4.4.4 ([Bou71, I, §10, n° 1, proposition 5])

Soient $f: T \rightarrow T'$ et $g: T' \rightarrow T''$ des applications continues entre espaces topologiques.

- i) Si f et g sont propres, alors $g \circ f$ est propre.*
- ii) Si $g \circ f$ est propre et f est surjective, alors g est propre.*
- iii) Si $g \circ f$ est propre et g est injective, alors f est propre.*
- iv) Si $g \circ f$ est propre et T' est séparé, alors f est propre.*

La propriété peut essentiellement s'exprimer en termes de compacité. Nous disposons en particulier d'un critère utile pour démontrer la propriété.

Lemme 4.4.5. — Soit $f: T \rightarrow T'$ une application continue entre espaces topologiques.

- i) Si f est propre, alors pour toute partie quasi-compacte K de T , l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est quasi-compacte.
- ii) Si tout point t de T' possède un voisinage compact V dont l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est compacte, alors f est propre.

Démonstration. — i) découle de [Bou71, I, §10, n° 2, proposition 6].

ii) découle de la remarque 4.4.2 et de [Bou71, I, §10, n° 2, corollaire 2 du lemme 2]. $\square$

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous avons défini un morphisme $\tilde{f}_n: \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ dans l'exemple 2.2.4.

Proposition 4.4.6. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Le morphisme $\tilde{f}_n$ est propre.

Démonstration. — Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$. Pour tout $r \in \mathbf{R}_{>0}$, notons $\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(r)$ et $\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{B})}(r)$ les polydisques fermés de poly-rayon $(r, \dots, r)$ au-dessus de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ respectivement.

Soit K une partie compacte de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Il existe $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $K \subset \overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(r)$. Or, on a

$$\tilde{f}_n^{-1}(\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(r)) = \overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{B})}(r),$$

qui est une partie compacte de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$. Puisque $\tilde{f}_n$ est continue, $\tilde{f}_n^{-1}(K)$ est fermée dans un compact de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$, et donc compacte. On déduit alors du lemme 4.4.5, ii) que $\tilde{f}_n$ est propre. $\square$

Corollaire 4.4.7. — Pour tout espace $\mathcal{A}$ -analytique X , le morphisme d'extension des scalaires $X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightarrow X$ est propre.

Démonstration. — D'après le lemme 4.4.5, il suffit de montrer que tout point x de X possède un voisinage compact dont l'image réciproque est compacte.

Soit $x \in X$. Quitte à remplacer X par un voisinage de x , on peut supposer que X est un sous-espace analytique d'un ouvert U de l'espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. La proposition 4.5.2 assure que le morphisme $\tilde{f}_n: \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est propre. D'après le lemme 4.2.2, on a $U \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = \tilde{f}_n^{-1}(U)$ et $X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = \tilde{f}_n^{-1}(X)$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Proposition 4.4.8. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$

est un anneau de base géométrique. Alors le morphisme $\varphi_{\mathcal{B}}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, déduit de φ par extension des scalaires à $\mathcal{B}$, est propre.

Démonstration. — La propriété étant locale au but, d'après le lemme 4.2.2, on peut supposer que Y est un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. D'après le lemme 4.2.2 et la proposition 4.2.3, $Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ est alors un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$. En particulier, $|Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}|$ est séparé.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow \varphi_{\mathcal{B}} & & \downarrow \varphi \\ Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

D'après le corollaire 4.4.7, le morphisme p_X est propre. On déduit alors du lemme 4.4.4 que $\varphi \circ p_X = p_Y \circ \varphi_{\mathcal{B}}$ est propre, puis que $\varphi_{\mathcal{B}}$ est propre, comme désiré. $\square$

Comme on s'y attend, la propriété est également stable par changement de base. Nous le démontrerons à la proposition 4.5.6.

4.5. Parties spectralement convexes

Dans cette section, nous étudions le comportement des parties spectralement convexes par extension des scalaires et produit fibré.

Commençons par l'extension des scalaires. Soient $\mathcal{B}$ un anneau de Banach et $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme borné. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des anneaux de base géométriques.

Notation 4.5.1. — Soient $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ et $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ deux $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach. On définit une semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}}$ sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ par la formule suivante : pour tout $x \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$,

$$\|x\|_{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}} = \inf \left(\left\{ \sum_{i \in I} \|m_i\|_{\mathcal{M}} \|n_i\|_{\mathcal{N}}, x = \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i \right\} \right).$$

On note $\mathcal{M} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ le séparé complété de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ pour la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}}$ et $\mathcal{M} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{N}$ le séparé complété pour la semi-norme spectrale associée.

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous avons défini un morphisme $\tilde{f}_n: \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ dans l'exemple 2.2.4.

Proposition 4.5.2. — Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit V une partie compacte spectrale-ment convexe de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Alors $\tilde{f}_n^{-1}(V)$ est compacte et spectralement convexe et le morphisme canonique

$$\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(V))$$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. — Notons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$.

D'après la proposition 4.4.6 et le lemme 4.4.5, i), $\tilde{f}_n^{-1}(V)$ est compacte. Le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}[T_1, \dots, T_n]$ induit un morphisme $\mathcal{K}(V) \rightarrow \mathcal{K}(\tilde{f}_n^{-1}(V))$ et un morphisme borné d'anneaux de Banach $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(V))$. Ces morphismes s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] & \longrightarrow & \mathcal{B}[T_1, \dots, T_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(V) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(V)) \end{array} .$$

Puisque V est spectralement convexe, l'image de l'application $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est égale à V . On en déduit que l'image de l'application $\mathcal{M}(\mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(V))) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ est contenue dans $\tilde{f}_n^{-1}(V)$, et donc que $\tilde{f}_n^{-1}(V)$ est spectralement convexe, d'après la proposition 1.3.9.

Passons maintenant à la démonstration de l'isomorphisme. Le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(V)$ induit un morphisme de $\mathcal{B}$ -algèbres $\mathcal{B}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}$. Considérons le morphisme induit $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$.

D'après la proposition 1.3.11, il suffit de démontrer les deux propriétés suivantes :

- i) l'image du morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ est contenue dans $\tilde{f}_n^{-1}(V)$;
- ii) pour toute $\mathcal{B}$ -algèbre de Banach uniforme $\mathcal{C}$ et tout morphisme de $\mathcal{B}$ -algèbres $\mathcal{B}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{C}$ tel que l'image du morphisme induit $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ soit contenue dans $\tilde{f}_n^{-1}(V)$, le morphisme $\mathcal{B}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}$.

Pour démontrer i), il suffit de vérifier que l'image du morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ est contenue dans V . Or le morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow$

$\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}$ se factorise par $\mathcal{B}(V)$. Puisque V est spectralement convexe, le résultat s'ensuit.

Démontrons maintenant ii). Soient $\mathcal{C}$ une $\mathcal{B}$ -algèbre de Banach uniforme et $\mathcal{B}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{C}$ un morphisme de $\mathcal{B}$ -algèbres tel que le morphisme induit $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{n, \text{an}}$ se factorise par $\tilde{f}_n^{-1}(V)$. Le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ se factorise alors par V . Puisque V est spectralement convexe, la proposition 1.3.11 assure que le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{C}$ se factorise par $\mathcal{B}(V)$, et ce de façon unique. En tensorisant par $\mathcal{B}$ au-dessus de $\mathcal{A}$, on en déduit une factorisation de $\mathcal{B}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{C}$ par $\mathcal{B}(V) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, elle aussi unique. Puisque l'algèbre $\mathcal{C}$ est complète et uniforme, le morphisme $\mathcal{B}(V) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{B}$, ce qui clôt la démonstration. $\square$

On peut, comme de coutume, exprimer la fibre d'un morphisme au-dessus d'un point à l'aide d'un produit fibré.

Proposition 4.5.3. — *Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et y un point de Y . Considérons le morphisme $\lambda_y: \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \rightarrow Y$ de l'exemple 2.2.13 et le produit fibré*

$$X \times_Y \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) := (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$$

de la proposition 4.3.13. Alors, la projection $p_X: X \times_Y \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \rightarrow X$ induit un homéomorphisme

$$X \times_Y \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \xrightarrow{\sim} \varphi^{-1}(y).$$

Démonstration. — Après extension des scalaires de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{H}(y)$, on obtient le morphisme

$$\varphi_{\mathcal{H}(y)} := \varphi \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)): X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \longrightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)).$$

D'après le lemme 4.2.7, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$ induit par λ_y est une immersion fermée et, en notant y' l'unique point de son image, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}(y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(y')$. On déduit alors du lemme 4.3.1 que le morphisme

$$(X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \longrightarrow \varphi_{\mathcal{H}(y)}^{-1}(y')$$

induit par la première projection est un homéomorphisme. Il suffit donc de montrer que l'application $\varphi_{\mathcal{H}(y)}^{-1}(y') \rightarrow \varphi^{-1}(y)$ induite par le morphisme $\pi_{\mathcal{H}(y)}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y) \rightarrow X$ est un homéomorphisme. Le morphisme $\pi_{\mathcal{H}(y)}$ est

continu et propre, d'après le corollaire 4.4.7. Par conséquent, il suffit de montrer que l'application $\varphi_{\mathcal{H}(y)}^{-1}(y') \rightarrow \varphi^{-1}(y)$ est bijective.

Quitte à restreindre Y , on peut supposer qu'il s'envoie par une immersion dans un espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$, et même qu'il coïncide avec cet espace affine. Notons $T_1, \dots, T_m$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$.

On peut également raisonner localement sur X . Quitte à restreindre X , on peut supposer que c'est un fermé analytique d'un ouvert U d'un espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. On peut également supposer que le morphisme φ s'étend en un morphisme $\tilde{\varphi}: X \rightarrow Y = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$.

Soit V un voisinage spectralement convexe de x . Soit $z \in V \cap \varphi^{-1}(y)$. Le morphisme

$$\mathcal{A}[T_1, \dots, T_{n'}] \longrightarrow \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{H}(z)$$

se factorise par $\mathcal{H}(y)$ et induit donc un morphisme

$$\sigma_z: \mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{H}(y) \longrightarrow \mathcal{H}(z),$$

par la propriété universelle du produit tensoriel. Or, d'après la proposition 4.5.2, $\tilde{f}_n^{-1}(V)$ est spectralement convexe et on a un isomorphisme $\mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(V)) \simeq \mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{H}(y)$. Par conséquent, le morphisme σ_z définit un point $\sigma(z)$ de $\tilde{f}_n^{-1}(V)$. On vérifie qu'il appartient à $\varphi_{\mathcal{H}(y)}^{-1}(y')$ et que $\pi_{\mathcal{H}(y)}(\sigma(z)) = z$. On vérifie également que, pour tout point t de $\tilde{f}_n^{-1}(V) \cap \varphi_{\mathcal{H}(y)}^{-1}(y')$, on a $\sigma(\pi_{\mathcal{H}(y)}(t)) = t$. Ceci conclut la preuve. $\square$

Passons maintenant à l'étude du produit fibré.

Proposition 4.5.4. — Soient $n, m, N \in \mathbf{N}$. Soit U' (resp. V' , resp. W') un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ (resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$, resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{N,\text{an}}$). Soit U (resp. V , resp. W) un ensemble compact spectralement convexe de U' (resp. V' , resp. W'). Soient $\varphi: U' \rightarrow W'$ et $\psi: V' \rightarrow W'$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques tels que $\varphi(U) \subset W$ et $\psi(V) \subset W$. On a naturellement

$$U' \times_{W'} V' \subset U' \times_{\mathcal{A}} V' \subset \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}} \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m,\text{an}}.$$

Notons $p_{U'}: U' \times_{W'} V' \rightarrow U'$ et $p_{V'}: U' \times_{W'} V' \rightarrow V'$ les deux projections.

Alors, l'ensemble

$$U \times_W V := p_{U'}^{-1}(U) \cap p_{V'}^{-1}(V),$$

est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m,\text{an}}$ et le morphisme canonique

$$\mathcal{B}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}(W)}^{\text{sp}} \mathcal{B}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(U \times_W V).$$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. — La suite d'inclusions suivie d'un isomorphisme provient du théorème 4.3.8, du lemme 4.3.1 et de la proposition 4.3.3.

Notons $T_1, \dots, T_n$ (resp. $S_1, \dots, S_m$, resp. $Z_1, \dots, Z_N$) les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ (resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$, resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{N,\text{an}}$). Notons $p_{\mathcal{A},U'}: U' \times_{\mathcal{A}} V' \rightarrow U'$ et $p_{\mathcal{A},V'}: U' \times_{\mathcal{A}} V' \rightarrow V'$ les deux projections. Posons

$$U \times_{\mathcal{A}} V := p_{\mathcal{A},U'}^{-1}(U) \cap p_{\mathcal{A},V'}^{-1}(V).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, posons

$$f_i := (\varphi \circ p_{\mathcal{A},U'})^{\sharp}(Z_i) \text{ et } g_i := (\psi \circ p_{\mathcal{A},V'})^{\sharp}(Z_i) \text{ dans } \mathcal{O}(U' \times_{\mathcal{A}} V').$$

D'après la proposition 4.3.7, $U' \times_{W'} V' = U' \times_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{N,\text{an}}} V'$ est le fermé analytique de $U' \times_{\mathcal{A}} V'$ défini par l'idéal $(f_1 - g_1, \dots, f_N - g_N)$.

Montrons, tout d'abord, que $U \times_W V$ est compact. Puisque c'est un fermé de $U \times_{\mathcal{A}} V$, il suffit de montrer que ce dernier l'est. Puisque U et V sont compacts, il existe $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_m \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $U \subset \overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(r_1, \dots, r_n)$ et $V \subset \overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(s_1, \dots, s_m)$. Alors, $U \times_{\mathcal{A}} V$ est une partie fermée de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m,\text{an}}$ qui est contenue dans le compact $\overline{D}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_m)$. Elle est donc compacte.

Montrons, maintenant, que $U \times_W V$ est spectralement convexe. Le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(U \times_W V)$ s'étend en un morphisme borné d'algèbres de Banach $\mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U \times_W V)$. Par conséquent, l'image du morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U \times_W V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m,\text{an}}$ induit par $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m] \rightarrow \mathcal{B}(U \times_W V)$ est contenue dans $p_{U'}^{-1}(U)$. En raisonnant de façon similaire, on montre que cette image est également contenue dans $p_{V'}^{-1}(V)$, et donc dans $U \times_{\mathcal{A}} V$. En outre, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $f_i - g_i = 0$ sur $U' \times_{W'} V'$ et donc dans $\mathcal{B}(U \times_W V)$. On en déduit que l'image du morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U \times_W V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m,\text{an}}$ est contenue dans $U \times_W V$, ce qui entraîne que $U \times_W V$ est spectralement convexe, d'après la proposition 1.3.13.

Passons finalement à la démonstration de l'isomorphisme. À partir des morphismes $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(U)$ et $\mathcal{A}[S_1, \dots, S_m] \rightarrow \mathcal{B}(V)$, on construit un

morphisme

$$\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m] \longrightarrow \mathcal{B}(U) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}(W)}^{\text{sp}} \mathcal{B}(V).$$

Considérons le morphisme induit $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}(W)}^{\text{sp}} \mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{an}}$. D'après la proposition 1.3.11, il suffit de démontrer les deux propriétés suivantes :

- i) l'image du morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}(W)}^{\text{sp}} \mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{an}}$ est contenue dans $U \times_W V$;
- ii) pour toute $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach uniforme $\mathcal{C}$ et tout morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m] \rightarrow \mathcal{C}$ tel que l'image du morphisme induit $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{an}}$ soit contenue dans $U \times_{\mathcal{B}(W)} V$, le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m] \rightarrow \mathcal{C}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{B}(U) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}(W)}^{\text{sp}} \mathcal{B}(V)$.

On y parvient en raisonnant d'une façon similaire à celle adoptée dans la démonstration de la proposition 4.5.2. $\square$

Énonçons une conséquence du résultat précédent concernant les espaces topologiques sous-jacents aux produits fibrés d'espaces analytiques.

Proposition 4.5.5. — Soient $\varphi: X \rightarrow Z$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Notons $|X|$, $|Y|$ et $|Z|$ les espaces topologiques sous-jacents à X , Y et Z respectivement. L'application naturelle

$$|X \times_Z Y| \longrightarrow |X| \times_{|Z|} |Y|$$

est continue, propre et surjective.

Démonstration. — L'application $\Pi: |X \times_Z Y| \rightarrow |X| \times_{|Z|} |Y|$ est continue par construction. Montrons qu'elle est surjective. Soient $x \in X$, $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $z = \varphi(x) = \psi(y)$. Quitte à restreindre les espaces, on peut supposer que X , Y , et Z sont des fermés analytiques d'espaces affines. Notons T l'ensemble des points de $X \times_Z Y$ qui se projettent respectivement sur x et y par les première et deuxième projections. D'après les exemples 1.3.2 et 1.3.4 et le théorème 1.3.7, tout point x d'un espace affine est spectralement convexe et on a $\mathcal{B}(\{x\}) = \mathcal{H}(x)$. La proposition 4.5.4 assure donc que T est en bijection avec $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(z)}^{\text{sp}} \mathcal{H}(y))$. Or $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(z)}^{\text{sp}} \mathcal{H}(y)$ n'est pas nulle, donc, d'après le théorème 1.1.8, T n'est pas vide. On en déduit que l'application Π est surjective.

Montrons finalement que l'application $\Pi: |X \times_Z Y| \rightarrow |X| \times_{|Z|} |Y|$ est propre. D'après le lemme 4.4.5, il suffit de montrer que tout point de $|X| \times_{|Z|} |Y|$

possède un voisinage compact dont l'image réciproque par Π est compacte. Soient t un point de $|X| \times_{|Z|} |Y|$. Il existe $x \in X$, $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $z = \varphi(x) = \psi(y)$ et t soit l'image du point (x, y) de $|X| \times |Y|$. Soit U (resp. V , resp. W) un voisinage de x dans X (resp. y dans Y , resp. z dans Z) qui est un fermé analytique d'un ouvert U' (resp. V' , resp. W') d'un espace affine analytique. On peut supposer que $\varphi(U) \subset W$ et que φ s'étend en un morphisme $\tilde{\varphi}: U' \rightarrow W'$. De même, on peut supposer que $\psi(V) \subset W$ et que ψ s'étend en un morphisme $\tilde{\psi}: V' \rightarrow W'$. Soit W_0 un voisinage compact de z dans W qui est spectralement convexe dans W' . Soit U_0 (resp. V_0) un voisinage compact de x dans U (resp. y dans V) qui est spectralement convexe dans U' (resp. V') et tel que $\varphi(U_0) \subset W_0$ (resp. $\psi(V_0) \subset W_0$). Il suffit de montrer que l'image réciproque de $U_0 \times_{W_0} V_0$ par Π est compacte. Cela découle de la proposition 4.5.4. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la stabilité des morphismes propres par changement de base.

Proposition 4.5.6. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors le morphisme $\varphi_Z: X \times_Y Z \rightarrow Z$, déduit de φ par changement de base à Z , est propre.*

Démonstration. — L'application entre espaces topologiques $|\varphi|: |X| \rightarrow |Y|$ est propre. Par définition, la propriété est préservée par changement de base, donc l'application $|X| \times_{|Z|} |Y| \rightarrow |Z|$ induite par $|\varphi|$ et $|\psi|$ est propre. En outre, d'après la proposition 4.5.5, l'application naturelle $|X \times_Y Z| \rightarrow |X| \times_{|Y|} |Z|$ est propre. Le lemme 4.4.4 assure que la composée $|\varphi_Z|$ des applications précédentes est propre. $\square$

4.6. Morphismes séparés

Cette section est consacrée à la notion de morphisme séparé. Précisons que les espaces analytiques que nous considérons, qui s'obtiennent pas des recollements généraux de sous-espaces d'espaces affines, ne sont pas nécessairement topologiquement séparés.

Définition 4.6.1. — Soient X, Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme. On dit que le morphisme φ est *séparé* si le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion fermée.

On dit que l'espace $\mathcal{A}$ -analytique X est *séparé* si son morphisme structural $\pi: X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est séparé.

Exemple 4.6.2. — D'après la proposition 4.3.15, tout modèle local est séparé (ainsi que tout morphisme dont la source est un modèle local).

Proposition 4.6.3. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme séparé d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques.

- i) Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique. Alors le morphisme $\varphi_{\mathcal{B}}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, déduit de φ par extension des scalaires à $\mathcal{B}$, est séparé.
- ii) Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors le morphisme $\varphi_Z: X \times_Y Z \rightarrow Z$, déduit de φ par changement de base à Z , est séparé.

Démonstration. — i) Par hypothèse, le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion fermée. Par la propriété universelle de l'extension des scalaires, l'extension de $\Delta_{X/Y}$ à $\mathcal{B}$ s'identifie au morphisme diagonal

$$\Delta_{X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} / Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \longrightarrow (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}).$$

D'après le lemme 4.2.2, iii), c'est encore une immersion fermée. Le résultat s'ensuit.

ii) Le résultat se démontre comme i), en utilisant le lemme 4.2.2 au lieu du lemme 4.3.2, □

Intéressons-nous maintenant à la version topologique de la séparation.

Définition 4.6.4. — Soient T, T' des espaces topologiques. Une application $f: T \rightarrow T'$ est dite *séparée* si l'image du morphisme diagonal $T \rightarrow T \times_{T'} T$ est fermée.

La caractérisation suivante se démontre sans difficultés.

Lemme 4.6.5. — Soient T, T' des espaces topologiques. Une application $f: T \rightarrow T'$ est séparée si, et seulement si, pour tout $t' \in T'$ et tous $t_1 \neq t_2 \in f^{-1}(t')$, il existe des voisinages U_1 de t_1 et U_2 de t_2 dans T tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

En particulier, si T est séparé, alors toute application $f: T \rightarrow T'$ est séparée. □

Remarque 4.6.6. — La séparation est une propriété locale au but.

Lemme 4.6.7. — Soient $f: T \rightarrow T'$ et $g: T' \rightarrow T''$ des applications continues entre espaces topologiques.

- i) Si f et g sont séparées, alors $g \circ f$ est séparée.
- ii) Si $g \circ f$ est séparée, alors f est séparée.

□

Les notions de séparation analytique et topologique sont reliées.

Proposition 4.6.8. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors, φ est séparé si, et seulement si, le morphisme d'espaces topologiques sous-jacent $|\varphi|: |X| \rightarrow |Y|$ est séparé.

Démonstration. — Supposons que φ est séparé. Le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}$ est alors une immersion fermée. En particulier, son image est fermée. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} |X| & \xrightarrow{|\Delta_{X/Y}|} & |X \times_Y X| \\ & \searrow \Delta_{|X|/|Y|} & \downarrow \Pi \\ & & |X| \times_{|Y|} |X| \end{array} .$$

On a

$$\text{Im}(\Delta_{|X|/|Y|}) = \Pi(\text{Im}(|\Delta_{X/Y}|)).$$

D'après la proposition 4.5.5, l'application Π est propre, donc fermée. Par conséquent, $\text{Im}(\Delta_{|X|/|Y|})$ est fermée.

Réciproquement, supposons que $|\varphi|$ est séparé. Nous allons montrer que $\Delta_{X/Y}$ est une immersion fermée. D'après le corollaire 4.3.16, $\Delta_{X/Y}$ est une immersion, donc, d'après la proposition 2.3.9, il suffit de montrer que son image est fermée.

Soit $t \in (X \times_Y X) \setminus \Delta_{X/Y}(X)$. Alors, avec les notations de la définition 4.6.1, on a $p_1(t) \neq p_2(t)$. Puisque $|\varphi|$ est séparé, il existe un voisinage ouvert U_1 de $p_1(t)$ dans X et un voisinage ouvert U_2 de $p_2(t)$ dans X tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. L'ouvert $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$ de $X \times_Y X$ contient alors t sans rencontrer $\Delta_{X/Y}(X)$. On en déduit que $(X \times_Y X) \setminus \Delta_{X/Y}(X)$ est ouvert, et donc que $\Delta_{X/Y}(X)$ est fermé. □

Terminons en considérant les graphes de morphismes.

Définition 4.6.9. — Soient X, Y, Z des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme au-dessus de Z . Notons $p_X: X \times_Z Y \rightarrow X$ et $p_Y: X \times_Z Y \rightarrow Y$

les deux projections naturelles. On appelle *graphe du morphisme* φ l'unique morphisme $\Gamma_\varphi: X \rightarrow X \times_Z Y$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{\varphi} & & Y \\
 \searrow \Gamma_\varphi & & & \searrow p_Y & \\
 & X \times_Z Y & \xrightarrow{\quad} & Y & \\
 \swarrow \text{id}_X & \downarrow p_X & & \downarrow & \\
 & X & \xrightarrow{\quad} & Z &
 \end{array}$$

Proposition 4.6.10. — Soient X, Y, Z des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme au-dessus de Z . Alors, le morphisme $\Gamma_\varphi: X \rightarrow X \times_Z Y$ est une immersion.

Si le morphisme $Y \rightarrow Z$ est séparé, alors Γ_φ est une immersion fermée.

Démonstration. — On a le diagramme cartésien suivant dans la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Gamma_\varphi} & X \times_Z Y \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow (\text{id}_X, \varphi) \\
 Y & \xrightarrow{\Delta_{Y/Z}} & Y \times_Z Y
 \end{array}$$

D'après le corollaire 4.3.16, $\Delta_{Y/Z}$ est une immersion. Si le morphisme $Y \rightarrow Z$ est séparé, c'est même une immersion fermée, par définition. Le résultat découle maintenant du lemme 4.3.2. $\square$

CHAPITRE 5

ÉTUDE DES MORPHISMES FINIS

Ce chapitre est consacré aux morphismes finis et à leurs applications.

Dans la section 5.1, nous définissons les morphismes finis d'espaces analytiques en établissons quelques propriétés élémentaires. Nous nous intéressons ensuite aux analogues de certains résultats classiques dans notre contexte.

Dans la section 5.2, nous montrons que l'image directe d'un faisceau cohérent par un morphisme fini est un faisceau cohérent (*cf.* théorème 5.2.1). La preuve fournit également un critère de finitude locale : pour qu'un morphisme soit fini au voisinage d'un point, il faut et il suffit que ce point soit isolé dans sa fibre (*cf.* théorème 5.2.9). Nous nous attendons, plus généralement, à ce que la cohérence soit préservée par image directe par un morphisme propre. Nous prévoyons de traiter cette question dans un prochain travail.

Dans la section 5.3, nous montrons que les morphismes finis sont stables par changement de base (*cf.* proposition 5.3.1).

Dans la section 5.4, nous établissons une propriété de changement de base fini pour les faisceaux cohérents. Étant donné un carré cartésien correspondant au produit fibré d'un morphisme fini par un morphisme quelconque, les opérations de tirer en arrière puis pousser en avant ou de pousser en avant puis tirer en arrière fournissent des faisceaux cohérents isomorphes (*cf.* corollaire 5.4.9). Le même résultat vaut en remplaçant ci-dessus le morphisme quelconque par une extension des scalaires (*cf.* corollaire 5.4.11).

Dans la section 5.5, nous démontrons une variante du Nullstellensatz, dite Nullstellensatz de Rückert (*cf.* théorème 5.5.5 et corollaire 5.5.8), établissant un lien entre fonctions nulles en tout point et fonctions nilpotentes. Elle est

utilisée dans la section finale 5.6 pour montrer des critères d'ouverture de morphismes finis, par exemple le fait qu'un morphisme fini et plat est ouvert (cf. corollaire 5.6.5).

Fixons $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de base géométrique. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

5.1. Définition et premières propriétés

Dans cette section, nous définissons les morphismes finis et rappelons quelques résultats classiques.

Définition 5.1.1. — Une application f entre espaces topologiques est dite *quasi-finie* si ses fibres sont finies. Elle est dite *finie* si elle est, en outre, continue, séparée et fermée.

Remarque 5.1.2. — La finitude est une propriété locale au but.

Lemme 5.1.3. — Soit $f: T \rightarrow T'$ une application continue et fermée entre espaces topologiques. Soient $t' \in T'$ et $\mathcal{V}$ une base de voisinages de t' dans T' . Alors

$$\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$$

est une base de voisinages de $f^{-1}(t')$ dans T . □

Le résultat suivant est une conséquence directe de [Bou71, I, §10, n°2, théorème 1].

Proposition 5.1.4. — Toute application finie entre espaces topologiques est propre.

En particulier, une application quasi-finie est finie si, et seulement si, elle est séparée et propre. □

Énonçons quelques propriétés des applications finies vis-à-vis de la composition.

Lemme 5.1.5. — Soient $f: T \rightarrow T'$ et $g: T' \rightarrow T''$ des applications continues entre espaces topologiques.

- i) Si f et g sont quasi-finies (resp. finies), alors $g \circ f$ est quasi-finie (resp. finie).
- ii) Si $g \circ f$ est quasi-finie et f est surjective, alors g est quasi-finie.
- iii) Si $g \circ f$ est quasi-finie (resp. finie) et g est injective, alors f est quasi-finie (resp. finie).

Démonstration. — Les résultats se démontrent aisément pour la propriété de quasi-finitude. En utilisant la proposition 5.1.4, on se ramène à démontrer les propriétés correspondantes pour les applications séparées et propres, et l'on conclut par les lemmes 4.4.4 et 4.6.7. $\square$

Définition 5.1.6. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. On dit que φ est *quasi-fini* (resp. *fini*) si l'application induite entre les espaces topologiques sous-jacents est quasi-finie (resp. finie).

Pour tout point x de X , on dit que φ est *fini en x* s'il existe un voisinage U de x dans X et un voisinage V de $\varphi(x)$ dans Y tel que $\varphi(U) \subset V$ et le morphisme $\varphi_{U,V}: U \rightarrow V$ induit par φ soit fini.

Lemme 5.1.7. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$. Si φ est fini en x et ψ est fini en $\varphi(x)$, alors $\psi \circ \varphi$ est fini en x . $\square$

Exemple 5.1.8. — Soit $P \in \mathcal{A}[T]$ un polynôme unitaire non constant. Alors le morphisme $\varphi_P: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ défini par P (cf. exemple 2.1.4) est fini.

En effet, φ_P est clairement quasi-fini et séparé, puisque $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ est séparé. En outre, pour tout $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, l'ensemble

$$\varphi_P^{-1}(\overline{D}_B(r)) = \overline{D}_B(P, r)$$

est compact (cf. [Poi10a, Corollaire 1.1.12]). Par conséquent, d'après le lemme 4.4.5, le morphisme φ_P est propre.

L'énoncé suivant se déduit sans difficultés du lemme 5.1.3.

Proposition 5.1.9. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques.

i) Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$ et tout $y \in Y$, le morphisme naturel

$$(\varphi_* \mathcal{F})_y \longrightarrow \prod_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mathcal{F}_x$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modules.

ii) Le foncteur φ_* de la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules dans celle des $\mathcal{O}_Y$ -modules est exact. $\square$

Rappelons qu'un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique possède une résolution flasque (par exemple, la résolution canonique de Godement définie dans [God73, II, §4.3]). L'existence de ces résolutions permet de

démontrer le résultat suivant (cf. par exemple [GR04, I, §1, theorem 5] pour les détails).⁽¹⁾

Théorème 5.1.10. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$ et tout $q \in \mathbf{N}$, on a un isomorphisme naturel*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \simeq H^q(Y, \varphi_* \mathcal{F}).$$

□

5.2. Images directes des faisceaux cohérents

Le but de cette section est de montrer que si φ est un morphisme fini d'espaces analytiques, le foncteur φ_* préserve les faisceaux cohérents.

Théorème 5.2.1. — *Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors, le faisceau $\varphi_* \mathcal{F}$ est cohérent.*

D'un point de vue intuitif, cela signifie que la finitude topologique entraîne la finitude algébrique. Le point-clé consiste à montrer qu'un morphisme fini ressemble localement à la projection d'un espace affine sur un sous-espace de coordonnées, à composition par des immersions fermées près, à la source et au but (cf lemme 5.2.4). Notre stratégie de preuve reprend celle de [GR84, §3.1].

Les mêmes méthodes permettent de démontrer un critère qui relie la propriété d'être fini au voisinage d'un point à celle d'être isolé dans sa fibre (cf. théorème 5.2.9).

Nous commençons par traiter plusieurs cas particuliers du théorème 5.2.1. Le premier découle directement des définitions.

Lemme 5.2.2. — *Soit $\iota: X \rightarrow X'$ une immersion fermée d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors, un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$ est cohérent si, et seulement si, $\iota_* \mathcal{F}$ est cohérent.* □

Lemme 5.2.3. — *Posons $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ avec coordonnée T et notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. Soit $\omega \in \mathcal{A}[T]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$. Notons Z le fermé analytique défini par ω . Alors,*

i) le morphisme $\pi|_Z: Z \rightarrow B$ est un morphisme fini ;

⁽¹⁾La structure analytique est ici totalement superflue et le résultat vaut encore pour un morphisme fini entre espaces topologiques et un faisceau de groupes abéliens.

ii) le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_B^d &\longrightarrow (\pi_Z)_* \mathcal{O}_Z \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i \end{aligned}$$

est un isomorphisme ;

iii) pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur Z , le faisceau $(\pi_Z)_* \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur B .

Démonstration. — i) Puisque ω est unitaire, le fermé analytique Z est compact (cf. [Poi10a, corollaire 1.1.12]). Par conséquent, d'après le lemme 4.4.5, le morphisme $\pi|_Z$ est propre. En outre, pour tout point b de B , l'image réciproque $\pi|_Z^{-1}(b)$ s'identifie à l'ensemble des racines du polynôme unitaire $\omega(b)$, et elle est donc finie. En d'autres termes, $\pi|_Z$ est quasi-fini. Finalement, puisque X est séparé, $\pi|_Z$ est séparé. On en déduit que $\pi|_Z$ est fini.

ii) Soit $b \in B$. Puisque ω est unitaire de degré d , le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{B,b}^d &\longrightarrow \mathcal{O}_{B,b}[T]/(\omega) \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i \end{aligned}$$

est un isomorphisme. D'après le corollaire 1.6.6, on a un isomorphisme naturel $\mathcal{O}_{B,b}[T]/(\omega) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{z_i}$, où $z_1, \dots, z_t$ sont les zéros de $\omega(b)$ dans $\pi|_Z^{-1}(b)$, autrement dit les points de $\pi|_Z^{-1}(b)$. Le résultat découle alors de l'isomorphisme naturel $((\pi|_Z)_* \mathcal{O}_Z)_b \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{z_i}$ de la proposition 5.1.9.

iii) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Z . Soit $b \in B$. Notons $z_1, \dots, z_t$ les éléments de $\pi|_Z^{-1}(b)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, on peut trouver un voisinage ouvert U_i de z_i dans X et une suite exacte

$$\mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{n_i} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0.$$

D'après le lemme 5.1.3, on peut supposer que les U_i sont disjoints et qu'il existe un voisinage ouvert V de b tel que $\pi|_Z^{-1}(V) = \bigcup_{1 \leq i \leq t} U_i$. D'après la proposition 5.1.9, la suite

$$(\pi|_Z)_* \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow (\pi|_Z)_* \mathcal{O}_{U_i}^{n_i} \longrightarrow (\pi|_Z)_* \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$$

est encore exacte et, d'après ii), le faisceau $(\pi|_Z)_* \mathcal{O}_{U_i}$ est cohérent. Le résultat s'ensuit. $\square$

Énonçons maintenant deux lemmes qui nous seront utiles à plusieurs reprises pour effectuer des raisonnements par récurrence.

Lemme 5.2.4. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et soit $x \in X$. Posons $y := \varphi(x)$ et supposons que $\varphi^{-1}(y) = \{x\}$.*

Alors, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un voisinage ouvert V de y dans Y tel que $\varphi^{-1}(V) = U$, des entiers $k, l \in \mathbf{N}$, un ouvert U' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k, \text{an}}$, un ouvert V' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l, \text{an}}$, des immersions fermées $\iota_U: U \rightarrow U' \times_{\mathcal{A}} V'$ et $\iota_V: V \rightarrow V'$ tels que, en notant $p_{V'}: U' \times_{\mathcal{A}} V' \rightarrow V'$ la seconde projection, on ait $\iota_V \circ \varphi|_U = p_{V'} \circ \iota_U$.

Démonstration. — Par définition d'espace analytique, le point x possède un voisinage ouvert U_0 qui peut s'envoyer par une immersion fermée i_{U_0} dans un ouvert U'_0 de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k, \text{an}}$ pour un certain $k \in \mathbf{N}$. D'après le lemme 5.1.3, il existe un voisinage ouvert V de y tel que $\varphi^{-1}(V) \subset U_0$. Quitte à restreindre V , on peut supposer qu'il existe une immersion fermée i_V dans un ouvert V' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l, \text{an}}$ pour un certain $l \in \mathbf{N}$. Posons $U := \varphi^{-1}(V)$. Il existe alors une immersion fermée i_U dans un ouvert U' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k, \text{an}}$. Notons $\psi: U \rightarrow V$ le morphisme induit par φ .

D'après la proposition 4.6.10, le morphisme $\Gamma_\psi: U \rightarrow U \times_{\mathcal{A}} V$ est une immersion fermée. D'après le lemme 4.3.1, nous avons également une immersion fermée $j: U \times_{\mathcal{A}} V \rightarrow U' \times_{\mathcal{A}} V'$. En posant $\iota_U := j \circ \Gamma_\psi$ et $\iota_V := i_V$, on obtient le résultat. $\square$

Lemme 5.2.5. — *Soient $l, n \in \mathbf{N}$ avec $n > l$. Pour $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $\varrho_m: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{an}}$ le morphisme de projection sur les m dernières coordonnées. Notons T la première coordonnée de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Soit U un fermé analytique d'un ouvert W' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et V un fermé analytique d'un ouvert V' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l, \text{an}}$ tels que $\varrho_l(U) = V$. Soient $x \in U$ et $y \in V$ tels que $\varrho_l^{-1}(y) \cap U = \{x\}$.*

Alors il existe un voisinage ouvert W'_{n-1} de $\varrho_{n-1}(x)$ dans $\varrho_{n-1}(W')$ et un polynôme $\omega \in \mathcal{O}(W'_{n-1})[T]$ unitaire non constant tel que $U \cap \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ soit un fermé analytique du fermé analytique Z_ω de $\varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ défini par ω .

Démonstration. — Posons $x_{n-1} := \varrho_{n-1}(x)$. Puisque $\varrho_l^{-1}(y) \cap U = \{x\}$, on a $\varrho_{n-1}^{-1}(x_{n-1}) \cap U = \{x\}$. Par conséquent, il existe $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}, x}$ appartenant à l'idéal de U , qui s'annule en x mais n'est pas identiquement nul sur $\varrho_{n-1}^{-1}(x_{n-1})$. Quitte à restreindre W' , nous pouvons supposer que $g \in \mathcal{O}(W')$ et que U est contenu dans le lieu d'annulation de g sur W' . Posons $W'_{n-1} := \varrho_{n-1}(W')$. D'après le corollaire 1.5.13, c'est un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$. D'après le théorème

de préparation de Weierstraß 1.6.27, quitte à restreindre encore W' , on peut supposer qu'il existe $e \in \mathcal{O}(W')$ inversible et $\omega \in \mathcal{O}(W'_{n-1})[T]$ unitaire tel que $g = e\omega$. Posons $d := \deg(\omega)$. Les propriétés de g assurent que $d \geq 1$.

Notons Z_ω le fermé analytique de $\varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ défini par ω . D'après le lemme 5.2.3, le morphisme $\varrho'_{n-1}: Z_\omega \rightarrow W'_{n-1}$ induit par ϱ_{n-1} est fini. Par conséquent, quitte à réduire W'_{n-1} , et remplacer W' par $W' \cap \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$, on peut supposer que Z_ω est une réunion finie d'ouverts disjoints et que l'un de ces ouverts est $Z_\omega \cap W'$. Dans cette situation, $Z_\omega \cap W'$ est un fermé analytique de Z_ω et, par conséquent, U aussi. $\square$

Démontrons un autre cas particulier du théorème 5.2.1, celui où le morphisme provient d'une projection d'un espace affine analytique sur un sous-espace de coordonnées.

Lemme 5.2.6. — *Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soient $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $\varphi^{-1}(y) = \{x\}$. Supposons qu'il existe des entiers n, l avec $n \geq l$, des ouverts W' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et V' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l, \text{an}}$ et des immersions fermées $\iota_X: X \rightarrow W'$ et $\iota_Y: Y \rightarrow V'$ tels que, en notant $\varrho_l: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l, \text{an}}$ la projection sur les l dernières coordonnées, on ait $\varrho_l(W') = V'$ et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & W' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varrho_{l, |W'} \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & V' \end{array}$$

commute.

Alors, il existe un voisinage ouvert Y' de y dans Y tel que

- i) le morphisme $\psi: \varphi^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ le morphisme induit par φ soit fini;*
- ii) pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\varphi^{-1}(Y')$, le faisceau $\psi_*\mathcal{F}$ soit cohérent.*

Démonstration. — Démontrons le résultat par récurrence sur $n \geq l$. Si $n = l$, on a $W' = V'$, donc $\varrho_l = \text{id}$ et $\iota_Y \circ \varphi = \iota_X$. Par conséquent, on a $(\iota_Y)_*\varphi_*\mathcal{F} = (\iota_X)_*\mathcal{F}$. Le résultat découle alors des lemmes 5.1.5 et 5.2.2.

Supposons maintenant que $n > l$ et que le résultat est vrai pour $n-1$. Notons $\varrho_{n-1}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$ la projection sur les $n-1$ dernières coordonnées et T la première coordonnée de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. D'après le lemme 5.2.5, il existe un voisinage ouvert W'_{n-1} de $\varrho_{n-1}(x)$ dans $\varrho_{n-1}(W')$ et un polynôme $\omega \in \mathcal{O}(W'_{n-1})[T]$ unitaire non constant tel que $X \cap \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ soit un fermé analytique du fermé analytique Z_ω de $\varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ défini par ω . Quitte à remplacer W' par

$W' \cap \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ et les autres espaces en conséquence, on peut supposer que $W'_{n-1} = \varrho_{n-1}(W')$.

Par hypothèse, l'immersion fermée ι_X peut se factoriser sous la forme $\iota_X = j_{Z_\omega} \circ j_X$, où $j_X: X \rightarrow Z_\omega$ et $j_{Z_\omega}: Z_\omega \rightarrow \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ sont deux immersions fermées. On a $\varrho_{n-1} \circ \iota_X = q_{n-1,|Z_\omega} \circ j_X$. D'après le lemme 5.2.3, c'est un morphisme fini et, d'après les lemmes 5.2.2 et 5.2.3, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , le faisceau

$$(\varrho_{n-1})_*(\iota_X)_*\mathcal{F} = (q_{n-1,|Z_\omega})_*(j_X)_*\mathcal{F}$$

est un faisceau cohérent sur W_{n-1} .

Le raisonnement précédent appliqué avec le faisceau structural montre que $(\varrho_{n-1})_*(\iota_X)_*\mathcal{O}_X$ est cohérent. Son support $S := \varrho_{n-1}(\iota(X))$ est donc un fermé analytique de W'_{n-1} , d'après la remarque 2.3.2. En particulier, il est muni d'une structure d'espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\varrho'_l: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l,\text{an}}$ la projection sur les l dernières coordonnées et $\varrho': S \rightarrow Y$ le morphisme induit. On a $(\varrho')^{-1}(y) = \{\varrho_{n-1}(x)\}$. Par hypothèse de récurrence, quitte à restreindre S et Y , on peut supposer que ϱ' est fini et que, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur S , le faisceau $(\varrho')_*\mathcal{G}$ est cohérent. Le morphisme $\varphi = \varrho' \circ \varrho_{n-1} \circ \iota_X$ est alors fini et, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , le faisceau

$$\varphi_*\mathcal{F} = (\varrho')_*(\varrho_{n-1})_*(\iota_X)_*\mathcal{F}$$

est cohérent. □

Tous les ingrédients sont maintenant en place pour démontrer le résultat de cohérence annoncé en toute généralité.

Démonstration du théorème 5.2.1. — La cohérence étant une notion locale, il suffit de montrer le résultat au voisinage de tout point de Y . Soit $y \in Y$.

Si y n'appartient pas à l'image de φ , puisque φ est fermé, il existe un voisinage V de y tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit vide. Par conséquent, $\varphi_*\mathcal{F}$ est nul, et donc cohérent, au voisinage de y .

Supposons que y appartient à l'image de φ . Notons $x_1, \dots, x_t$ ses antécédents par φ . Puisque φ est fini, d'après le lemme 5.1.3, il existe un voisinage V de y tel que $\varphi^{-1}(V)$ puisse s'écrire comme union disjointe finie d'ouverts $\bigsqcup_{i=1}^t U_i$, où, pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, U_i contient x_i . Pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, notons $\varphi_i: U_i \rightarrow V$ le morphisme induit par φ . Il est encore fini.

Il suffit de montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, il existe un voisinage ouvert V_i de y dans V tel que, en notant $\psi_i: \varphi_i^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ le morphisme induit par φ_i , le faisceau $(\psi_i)_*\mathcal{F}$ soit cohérent. En effet, dans ce cas, on peut choisir un voisinage ouvert W de y contenu dans tous les V_i et on a alors

$$(\varphi_*\mathcal{F})|_W = \prod_{i=1}^t ((\psi_i)_*\mathcal{F})|_W,$$

ce qui permet de conclure.

Soit $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$. Puisque φ_i est fini, il est propre, d'après la proposition 5.1.4, et le point x_i est isolé dans sa fibre. On peut donc appliquer le lemme 5.2.4 avec φ_i et x_i . On se trouve alors dans la situation du lemme 5.2.6, qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 5.2.7. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$. Alors

- i) le morphisme $\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$ induit par φ fait de $\mathcal{O}_x$ un $\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}$ -module de type fini ;
- ii) les extensions de corps $\kappa(x)/\kappa(\varphi(x))$ et $\mathcal{H}(x)/\mathcal{H}(\varphi(x))$ induites par φ sont finies.

Démonstration. — D'après le théorème 5.2.1, le faisceau $\varphi_*\mathcal{O}_X$ est cohérent. Le point i) découle alors de la proposition 5.1.9, i). Le point ii) s'en déduit. $\square$

Corollaire 5.2.8. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors $\varphi(X)$ est un fermé analytique de Y .

Démonstration. — D'après le théorème 5.2.1, le faisceau $\varphi_*\mathcal{O}_X$ est cohérent. D'après la remarque 2.3.2, son support, qui n'est autre que $\varphi(X)$, est un fermé analytique de Y . $\square$

Démontrons finalement un critère de finitude locale.

Théorème 5.2.9. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $x \in X$. Le morphisme φ est fini en x si, et seulement si, le point x est isolé dans sa fibre $\varphi^{-1}(\varphi(x))$.

Démonstration. — Supposons que φ est fini en x . Alors, il existe un voisinage U de x dans X tel que $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap U$ est fini. On en déduit que x est isolé dans $\varphi^{-1}(\varphi(x))$.

Supposons que x est isolé dans $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. Quitte à restreindre X , on peut supposer que $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$. Dans ce cas, le lemme 5.2.4 s'applique. On se trouve alors dans la situation du lemme 5.2.6, qui permet de conclure. $\square$

5.3. Stabilité des morphismes finis

Dans cette section, nous démontrons que les morphismes finis sont stables par changement de base.

Proposition 5.3.1. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$.*

- i) Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique. Notons $\varphi_{\mathcal{B}}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ le morphisme déduit de φ par extension des scalaires à $\mathcal{B}$. Si φ est quasi-fini (resp. fini, resp. fini en x), alors $\varphi_{\mathcal{B}}$ est quasi-fini (resp. fini, resp. fini en tout point au-dessus de x).*
- ii) Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Notons $\varphi_Z: X \times_Y Z \rightarrow Z$ le morphisme déduit de φ par changement de base à Z . Si φ est quasi-fini (resp. fini, resp. fini en x), alors φ_Z est quasi-fini (resp. fini, resp. fini en tout point au-dessus de x).*

Démonstration. — i) Supposons que φ est quasi-fini. Soit $z \in Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$. Posons $y := p_Y(z)$. L'exemple 2.2.13 fournit un morphisme $\lambda_z: \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$. D'après la proposition 4.5.3, il suffit de montrer que l'ensemble sous-jacent à l'espace

$$(X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) := ((X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}} \mathcal{H}(z)) \times_{(Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \hat{\otimes}_{\mathcal{B}} \mathcal{H}(z)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z))$$

est fini. Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \end{array}$$

commute, en utilisant les lemmes 4.2.5 et 4.3.11, on obtient une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
& (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \\
& \simeq (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \\
& \simeq ((X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z)) \times_{(Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \\
& \simeq ((X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z).
\end{aligned}$$

D'après la proposition 4.5.3, l'ensemble sous-jacent à $F := (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$ est homéomorphe à $\varphi^{-1}(y)$. Par conséquent, F est fini et la seconde projection $F \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$ est un morphisme fini (et donc séparé) d'espaces $\mathcal{H}(y)$ -analytiques.

D'après le lemme 4.2.2, pour montrer que $F \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z)$ est fini, on peut supposer que F est réduit à un point, disons a . D'après le corollaire 5.2.7, l'extension de corps $\mathcal{H}(a)/\mathcal{H}(y)$ est finie.

L'espace F étant réduit à un point, on peut l'identifier à un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{n,\text{an}}$. D'après la proposition 4.2.3 et le lemme 4.2.2, l'ensemble sous-jacent à $F \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z)$ s'identifie alors à $\tilde{f}_n^{-1}(F)$. Puisque F est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{n,\text{an}}$, d'après la proposition 4.5.2, $\tilde{f}_n^{-1}(F)$ est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(z)}^{n,\text{an}}$ et on a

$$\mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(F)) \simeq \mathcal{B}(F) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)}^{\text{sp}} \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(a) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z).$$

Puisque l'extension $\mathcal{H}(a)/\mathcal{H}(y)$ est finie, $\mathcal{H}(a) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z)$ est une $\mathcal{H}(z)$ -algèbre finie et

$$\tilde{f}_n^{-1}(F) = \mathcal{M}(\mathcal{B}(\tilde{f}_n^{-1}(F))) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(a) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(z))$$

est finie, ce qui termine la démonstration.

Le cas fini se déduit des cas quasi-fini, séparé (cf. proposition 4.6.3) et propre (cf. proposition 4.4.8). Le cas fini en x se ramène au cas fini par les propriétés de l'extension des scalaires (cf. lemme 4.2.2).

ii) Supposons que φ est quasi-fini. Soit $z \in Z$. Posons $y := \psi(z)$. L'exemple 2.2.13 fournit un morphisme $\lambda_z: \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \rightarrow Z$. D'après la proposition 4.5.3, il suffit de montrer que l'ensemble sous-jacent à l'espace

$$(X \times_Y Z) \times_Z \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) := ((X \times_Y Z) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)) \times_{Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z))$$

est fini. En utilisant le lemme 4.3.11, on obtient la suite d'isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} & ((X \times_Y Z) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)) \times_{Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \\ & \simeq ((X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)} (Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z))) \times_{Z \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \\ & \simeq (X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)) \times_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(z)). \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.5.3, ce dernier espace est homéomorphe à une fibre du morphisme $\varphi_{\mathcal{H}(z)}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z) \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(z)$ déduit de φ par extension des scalaires à $\mathcal{H}(z)$. D'après i), ce morphisme est fini et le résultat s'ensuit.

Les cas fini et fini en x se déduisent des cas quasi-fini, séparé (*cf.* proposition 4.6.3) et propre (*cf.* proposition 4.5.6), comme dans i). $\square$

5.4. Changement de base fini

Le but de cette section est de démontrer une propriété de changement de base pour l'image directe d'un faisceau par un morphisme fini. Énonçons précisément ce dont il s'agit.

Définition 5.4.1. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Nous dirons que φ *satisfait la propriété de changement de base* si, pour tout morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $\psi: Z \rightarrow Y$ et tout faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$, le morphisme naturel

$$\psi^* \varphi_* \mathcal{F} \longrightarrow \chi_* \rho^* \mathcal{F}$$

est un isomorphisme, où χ et ρ sont définis par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xrightarrow{\rho} & X \\ \downarrow \chi & & \downarrow \varphi \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} .$$

Nous utiliserons également une version locale de cette propriété.

Définition 5.4.2. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$ et supposons que φ est fini en x . On dit que φ *satisfait la propriété de changement de base en x* si, pour tout morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $\psi: Z \rightarrow Y$ et tout $z \in \psi^{-1}(\varphi(x))$, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{Z,z} \longrightarrow \prod_{t \in \rho^{-1}(x) \cap \chi^{-1}(z)} \mathcal{O}_{X \times_Y Z, t},$$

avec les notations de la définition 5.4.1, est un isomorphisme.

Remarquons qu'il découle de la stabilité par changement de base des morphismes finis (cf. proposition 5.3.1) que l'ensemble $\rho^{-1}(x) \cap \chi^{-1}(z)$ est fini.

Lemme 5.4.3. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Supposons que φ satisfasse la propriété de changement de base en tout point de X . Alors, φ satisfait la propriété de changement de base.*

Démonstration. — Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Posons $T := Z \times_Y X$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules. Il suffit de montrer que, pour tout $z \in Z$, le morphisme

$$(\psi^* \varphi_* \mathcal{F})_z \longrightarrow (\chi_* \rho^* \mathcal{F})_z$$

est un isomorphisme.

Soit $z \in Z$. Posons $y := \psi(z)$. On a des isomorphismes naturels

$$(\psi^* \varphi_* \mathcal{F})_z \simeq \left(\prod_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mathcal{F}_x \right) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Z,z}$$

et

$$(\chi_* \rho^* \mathcal{F})_z \simeq \prod_{t \in \chi^{-1}(z)} (\mathcal{F}_{\rho(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\rho(t)}} \mathcal{O}_{T,t}).$$

Or, par hypothèse, pour tout $x \in \varphi^{-1}(y)$, le morphisme naturel

$$\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Z,z} \longrightarrow \prod_{t \in \rho^{-1}(x) \cap \chi^{-1}(z)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{T,t}$$

est un isomorphisme. Le résultat s'en déduit. $\square$

Démontrons maintenant la propriété de changement de base locale. Commençons par deux lemmes.

Lemme 5.4.4. — *Soient $\varphi_1: X_1 \rightarrow X_2$ et $\varphi_2: X_2 \rightarrow X_3$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x_1 \in X_1$. Supposons que φ_1 est fini en x_1 et que φ_2 est fini en $\varphi_1(x_1)$. Si φ_1 et φ_2 satisfont la propriété de changement de base respectivement en x_1 et $\varphi_1(x_1)$, alors $\varphi_2 \circ \varphi_1$ satisfait la propriété de changement de base en x_1 . $\square$*

Lemme 5.4.5. — *Soient $\varphi_1: X_1 \rightarrow X_2$ et $\varphi_2: X_2 \rightarrow X_3$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x_1 \in X_1$. Supposons que φ_1 est fini en x_1 et que φ_2 est fini en $\varphi_1(x_1)$. Si $\varphi_2 \circ \varphi_1$ satisfait la propriété de changement de base en x_1 , alors φ_1 aussi.*

Démonstration. — Soit $\psi: Z \rightarrow X_2$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. On a un isomorphisme canonique

$$Z \times_{X_2} X_1 \xrightarrow{\sim} Z \times_{X_3} X_1,$$

où les morphismes définissant le produit fibré de droite sont $\varphi_2 \circ \psi$ et $\varphi_2 \circ \varphi_1$. De même, pour tout $z \in \psi^{-1}(\varphi_1(x_1))$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X_1, x_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_2, \varphi_1(x_1)}} \mathcal{O}_{Z, z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_1, x_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_3, \varphi_2(\varphi_1(x_1))}} \mathcal{O}_{Z, z}.$$

Le résultat s'en déduit. $\square$

Traisons maintenant deux cas particuliers de la propriété de changement de base locale.

Lemme 5.4.6. — *Soit Y un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $\omega \in \mathcal{O}(Y)[T]$ un polynôme unitaire non constant. Considérons $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ avec coordonnée T et notons $\pi: Y \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}} \rightarrow Y$ le morphisme de projection. Notons Z_{ω} le fermé analytique de $Y \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ défini par ω . Soit $x \in Z_{\omega}$ tel que $\pi|_{Z_{\omega}}^{-1}(\pi|_{Z_{\omega}}(x)) = \{x\}$. Alors $\pi|_{Z_{\omega}}$ satisfait la propriété de changement de base en x .*

Démonstration. — Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $z \in Z$ tel que $\psi(z) = \pi(x)$. Posons $y := \pi(x)$. Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T := Z \times_Y Z_{\omega} & \xrightarrow{\rho} & Z_{\omega} \\ \downarrow \chi & & \downarrow \pi|_{Z_{\omega}} \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}.$$

D'après le lemme 4.3.1, le produit fibré T s'identifie au fermé analytique de $Z \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ défini par le polynôme $\psi^{\sharp}(\omega) \in \mathcal{O}(Z)[T]$. D'après la proposition 5.1.9 et le lemme 5.2.3, on a des isomorphismes naturels

$$\prod_{t \in \chi^{-1}(z)} \mathcal{O}_{T, t} \simeq (\chi_* \mathcal{O}_T)_z \simeq \mathcal{O}_{Z, z}[T]/(\psi^{\sharp}(\omega))$$

et

$$\mathcal{O}_{Z_{\omega}, x} \simeq ((\pi|_{Z_{\omega}})_* \mathcal{O}_{Z_{\omega}})_y \simeq \mathcal{O}_{Y, y}[T]/(\omega).$$

On en déduit que $\mathcal{O}_{Z_{\omega}, x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y, y}} \mathcal{O}_{Z, z} \simeq \prod_{t \in \chi^{-1}(z)} \mathcal{O}_{T, t}$. Puisque $\pi|_{Z_{\omega}}^{-1}(y) = \{x\}$, on a $\chi^{-1}(z) \subset \rho^{-1}(x)$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Lemme 5.4.7. — *Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soient $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $\varphi^{-1}(y) = \{x\}$. Supposons qu'il existe des entiers n, l avec $n \geq l$, des ouverts W' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et V' de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l, \text{an}}$ et des immersions*

fermées $\iota_X: X \rightarrow W'$ et $\iota_Y: Y \rightarrow V'$ tels que, en notant $\varrho_l: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l,\text{an}}$ la projection sur les l dernières coordonnées, on ait $\varrho_l(W') = V'$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & W' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varrho_{l,|W'} \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & V' \end{array}$$

commute. Alors φ satisfait la propriété de changement de base en x .

Démonstration. — Démontrons par récurrence sur $n \geq l$ que φ satisfait la propriété de changement de base en x .

Si $n = l$, alors $V' = W'$ et $q_l = \text{id}$. D'après le lemme 5.4.5, on peut remplacer φ par sa composée avec ι_Y et donc supposer que $Y = V'$ et que $\iota_Y = \text{id}$. On a alors $\varphi = \iota_X$. Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et reprenons les notations du début de la section. D'après le lemme 4.3.1, le morphisme χ est alors le morphisme d'inclusion d'un fermé analytique défini par le même idéal que X dans W' . Pour tout $z \in Z$ tel que $\psi(z) = \varphi(x)$, la fibre $\chi^{-1}(z)$ contient donc un unique point, disons t , et nous avons $\mathcal{O}_{T,t} = \mathcal{O}_{Z,z} \otimes_{\mathcal{O}_{W',\varphi(x)}} \mathcal{O}_{X,x}$. Le résultat s'en déduit.

Supposons que $n > l$ et que le résultat est satisfait pour $n - 1$. Notons $\varrho_{n-1}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$ le morphisme de projection sur les $n - 1$ dernières coordonnées et T la première coordonnée de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. D'après le lemme 5.2.5, il existe un voisinage ouvert W'_{n-1} de $\varrho_{n-1}(x)$ dans $\varrho_{n-1}(W')$ et un polynôme $\omega \in \mathcal{O}(W'_{n-1})[T]$ unitaire non constant tel que $X \cap \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ soit un fermé analytique du fermé analytique Z_ω de $\varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ défini par ω . Quitte à remplacer W' par $W' \cap \varrho_{n-1}^{-1}(W'_{n-1})$ et les autres espaces en conséquence, on peut supposer que $W'_{n-1} = \varrho_{n-1}(W')$.

D'après le lemme 5.2.3 et le corollaire 5.2.8, $X_{n-1} := \varrho_{n-1}(X)$ est un fermé analytique de W'_{n-1} . En particulier, on peut le munir d'une structure d'espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\varrho'_{n-1}: X \rightarrow X_{n-1}$ le morphisme induit par ϱ_{n-1} . D'après le lemme 5.4.6, ϱ'_{n-1} satisfait la propriété de changement de base en x . Notons $\varrho_{n-1,l}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l,\text{an}}$ le morphisme de projection sur les l dernières coordonnées et $\varrho'_{n-1,l}: X_{n-1} \rightarrow Y$ le morphisme induit. Par hypothèse de récurrence, $\varrho'_{n-1,l}$ satisfait la propriété de changement de base en $\varrho_{n-1}(x)$. Le résultat découle alors du lemme 5.4.4. $\square$

Démontrons, à présent, le résultat de changement de base en toute généralité.

Théorème 5.4.8. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Z \rightarrow Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$ et supposons que φ est fini en x . Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{\rho} & X \\ \downarrow \chi & & \downarrow \varphi \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} .$$

Alors, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{Z,z} \longrightarrow \prod_{t \in \rho^{-1}(x) \cap \chi^{-1}(z)} \mathcal{O}_{X \times_Y Z, t}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Le résultat étant local en x , quitte à restreindre X et Y , on peut supposer que $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$. On peut alors appliquer le lemme 5.2.4 pour se retrouver dans la situation du lemme 5.4.7, qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 5.4.9. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Z \rightarrow Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Supposons que φ est fini. Alors, avec les notations du théorème 5.4.8, pour tout faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$, le morphisme naturel

$$\psi^* \varphi_* \mathcal{F} \longrightarrow \chi_* \rho^* \mathcal{F}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Le résultat découle du lemme 5.4.3 et du théorème 5.4.8. $\square$

En utilisant les mêmes arguments, on peut démontrer un résultat similaire en remplaçant le changement de base par une extension des scalaires.

Théorème 5.4.10. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Z \rightarrow Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$ et supposons que φ est fini en x . Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique. Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ \downarrow \varphi_{\mathcal{B}} & & \downarrow \varphi \\ Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array} .$$

Alors, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, z} \longrightarrow \prod_{t \in \rho^{-1}(x) \cap \chi^{-1}(z)} \mathcal{O}_{X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, t}$$

est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 5.4.11. — Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ et $\psi: Z \rightarrow Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Supposons que φ est fini. Alors, avec les notations du théorème 5.4.10, pour tout faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{F}$, le morphisme naturel

$$(\pi_Y)^* \varphi_* \mathcal{F} \longrightarrow (\varphi_B)_* (\pi_X)^* \mathcal{F}$$

est un isomorphisme. $\square$

5.5. Nullstellensatz de Rückert

Dans cette section, nous démontrons une version analytique du Nullstellensatz, connue en géométrie analytique complexe sous le nom de Nullstellensatz de Rückert. Dans sa première version, il s'agit de montrer que si une fonction s'annule sur le support d'un faisceau cohérent, alors une puissance de cette fonction annule le faisceau. Nous suivons ici la stratégie de [GR84, §3.2 et §4.1.5].

Commençons par démontrer plusieurs cas particuliers du résultat. Comme de coutume, nous noterons $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Rappelons la définition 1.2.18 concernant les projections.

Lemme 5.5.1. — Soient x un point de U et U un voisinage ouvert de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Supposons que x est purement localement transcendant au-dessus de $b := \pi_n(x)$. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U et $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}}(U)$ une fonction analytique nulle en tout point du support de $\mathcal{F}$. Alors, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $f^d \mathcal{F}_x = 0$.

Démonstration. — Si l'image de f dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ est nulle, alors le résultat vaut avec $d = 1$. Supposons donc que l'image de f dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ n'est pas nulle.

D'après le théorème 1.6.28, si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort (resp. un anneau fortement de valuation discrète), alors il en va de même pour $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$.

Supposons que $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ est un corps fort. Alors, on a $f(x) \neq 0$, donc x n'appartient pas au support de $\mathcal{F}$ et on a donc $\mathcal{F}_x = 0$.

Supposons que $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Choisissons-en une uniformisante ϖ_x . La fonction f peut alors s'écrire de façon unique sous la forme $f = h\varpi_x^l$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$, où h est un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ et l un entier non nul.

Par hypothèse, le support de $\mathcal{F}$ est contenu dans le fermé analytique défini par f . Au voisinage de x , il est donc contenu dans le fermé analytique défini par ϖ_x . En particulier, d'après le corollaire 1.5.13, ce support n'est donc pas un voisinage de x . Or le support de $\mathcal{F}$ coïncide avec le lieu des zéros de son idéal annulateur, qui est cohérent. On en déduit qu'il existe $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ non nul tel que $g\mathcal{F}_x$ soit nul. Puisque $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante ϖ_x , on en déduit qu'il existe $v \in \mathbf{N}$ tel que $\varpi_x^v \mathcal{F}_x = 0$. Soit $d \in \mathbf{N}$ tel que $dl \geq v$. On a alors

$$f^d \mathcal{F}_x = h^d \varpi_x^{dl} \mathcal{F}_x = h^d \varpi_x^{dl-v} (\varpi_x^v \mathcal{F}_x) = 0.$$

□

Lemme 5.5.2. — Soient $k, n \in \mathbf{N}$ avec $n > k$. Soient U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U dont le support est contenu dans le fermé analytique défini par T_{k+1} . Soient $b \in B$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un corps fort. Soit $y \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}}$ tel que $\pi_k(y) = b$ et y soit purement localement transcendant au-dessus de b . Notons $0_y \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ le point 0 de la fibre $\pi_{n,k}^{-1}(y)$. Alors, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$.

Démonstration. — D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},y}$ est un corps fort.

Par hypothèse, le support de $\mathcal{F}$ est inclus dans le fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ défini par T_{k+1} . En particulier, le support de $\mathcal{F}$ n'est pas un voisinage de 0_y . Or le support de $\mathcal{F}$ coïncide avec le lieu des zéros de son idéal annulateur, qui est cohérent. On en déduit qu'il existe $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},0_y}$ non nul tel que $g\mathcal{F}_{0_y}$ soit nul. Quitte à restreindre U , on peut supposer que $g\mathcal{F} = 0$.

Notons Z_g le fermé analytique de U défini par g et $j: Z_g \rightarrow U$ l'immersion fermée associée. Le faisceau $\mathcal{F}$ possède une structure naturelle de $\mathcal{O}_U/(g)$ -module. Par conséquent, on a $j_* j^* \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Démontrons maintenant le résultat par récurrence sur $n \geq k+1$.

- Supposons que $n = k+1$.

D'après la proposition 1.4.8 (appliquée avec $t = 0$), g peut s'écrire sous la forme

$$g = T_{k+1}^d \sum_{i \geq 0} \alpha_i T_{k+1}^i,$$

où les α_i sont des éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},y}$ avec $\alpha_0 \neq 0$. Puisque $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},y}$ est un corps fort, α_0 est inversible et il en va de même pour $\sum_{i \geq 0} \alpha_i T_{k+1}^i$. L'égalité $g\mathcal{F}_{0_y} = 0$ entraîne donc $T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$.

- Supposons que $n > k + 1$ et que l'énoncé est démontré pour $n - 1$.

D'après la proposition 3.3.7, la restriction de g à $\pi_{n,k}^{-1}(y)$ n'est pas nulle. Posons $0_{n-1,y} := \pi_{n,n-1}(0_y)$. D'après le lemme 1.6.11, quitte à effectuer un changement de variables, on peut supposer que l'image de g dans $\mathcal{O}_{\pi_{n,n-1}^{-1},0_{n-1,y}}$ n'est pas nulle. Par conséquent, quitte à restreindre U , on peut supposer que $Z_g \cap \pi_{n,n-1}^{-1}(0_{n-1,y}) = \{0_y\}$.

D'après le théorème 5.2.9, quitte à réduire U , on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert V de $0_{n-1,y}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$ tel que $\pi_{n,n-1}(U) \subset V$ et le morphisme $\pi'_{n,n-1} : U \cap Z_g \rightarrow V$ induit par $\pi_{n,n-1}$ soit fini. D'après le théorème 5.2.1, $(\pi'_{n,n-1})_* j^* \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur V . Son support est contenu dans le fermé analytique défini par T_{k+1} donc, par hypothèse de récurrence, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que

$$T_{k+1}^d ((\pi'_{n,n-1})_* j^* \mathcal{F})_{0_{n-1,y}} = T_{k+1}^d j^* \mathcal{F}_{0_y} = T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0.$$

□

Lemme 5.5.3. — Soient $k, n \in \mathbf{N}$ avec $n > k$. Soient U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U dont le support est contenu dans le fermé analytique défini par T_{k+1} . Soient $b \in B$ tel que $\mathcal{O}_{B,b}$ soit un anneau fortement de valuation discrète. Soit $y \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}}$ tel que $\pi_k(y) = b$ et y soit purement localement transcendant au-dessus de b . Notons $0_y \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ le point 0 de la fibre $\pi_{n,k}^{-1}(y)$. Alors, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$.

Démonstration. — Notons ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$. D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},y}$ est encore un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante ϖ . Quitte à restreindre U , on peut supposer que ϖ est définie sur U . Notons Z_{ϖ} le fermé analytique de U défini par ϖ et $j : Z_{\varpi} \rightarrow U$ l'immersion fermée associée.

Il suffit de montrer qu'il existe $v, d \in \mathbf{N}$ tels que $\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$. Si $v = 0$, on obtient directement le résultat souhaité. Supposons que $v \geq 1$. Quitte à restreindre U , on peut supposer que $\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F} = 0$. Le faisceau $\varpi^{v-1} T_{k+1}^d \mathcal{F}$ est alors naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}_U/(\varpi)$ -module et on a donc $j_* j^* (\varpi^{v-1} T_{k+1}^d \mathcal{F}) = \varpi^{v-1} T_{k+1}^d \mathcal{F}$.

Or $\mathcal{O}_{Z,y} = \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},y}/(\varpi)$ est un corps fort. D'après le lemme 5.5.2, il existe donc d' tel que

$$T_{k+1}^{d'} j^*(\varpi^{v-1} T_{k+1}^d \mathcal{F})_{0_y} = j^*(\varpi^{v-1} T_{k+1}^{d+d'} \mathcal{F})_{0_y} = \varpi^{v-1} T_{k+1}^{d+d'} \mathcal{F}_{0_y} = 0.$$

En répétant le procédé, on montre finalement qu'il existe $d'' \in \mathbf{N}$ tel que $T_{k+1}^{d''} \mathcal{F}_{0_y} = 0$, comme attendu.

Passons maintenant à la démonstration du résultat. Par hypothèse, le support de $\mathcal{F}$ est inclus dans le fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ défini par T_{k+1} . En particulier, le support de $\mathcal{F}$ n'est pas un voisinage de 0_y . Or le support de $\mathcal{F}$ coïncide avec le lieu des zéros de son idéal annulateur, qui est cohérent. On en déduit qu'il existe $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}},0_y}$ non nul tel que $g\mathcal{F}_{0_y}$ soit nul.

Démontrons le résultat par récurrence sur $n \geq k+1$.

- Supposons que $n = k+1$.

D'après la proposition 1.4.8 (appliquée avec $t = 0$), il existe un voisinage ouvert V de y dans $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ tel que g puisse s'écrire sous la forme

$$g = T_{k+1}^d \sum_{i \geq 0} \alpha_i T_{k+1}^i,$$

où les α_i sont des éléments de $\mathcal{O}(V)$ avec $\alpha_0 \neq 0$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},y}$. Posons $\tilde{g} := \sum_{i \geq 0} \alpha_i T_{k+1}^i$.

Si $\alpha_0(y) \neq 0$, alors $\tilde{g}$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k+1,\text{an}},0_y}$ et on en déduit que $T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$. On supposera donc désormais que $\alpha_0(x_k) = 0$. D'après le lemme 3.3.6, il existe $v \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k+1,\text{an}},0_y}$ tels que $\tilde{g} = \varpi^v h$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k+1,\text{an}},0_y}$ et la restriction de h à $\pi_{k+1,k}^{-1}(y)$ ne soit pas nulle. On a alors

$$h\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0.$$

Quitte à restreindre U , nous pouvons supposer que $h\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F} = 0$.

Si $h(0_y) \neq 0$, alors on a $\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$. On supposera donc désormais que $h(0_y) = 0$. D'après la proposition 1.4.8, quitte à restreindre V , on peut écrire h sous la forme

$$h = \sum_{i \geq 0} \beta_i T_{k+1}^i,$$

où les β_i sont des éléments de $\mathcal{O}(V)$. Remarquons que $\beta_0(y) = 0$, autrement dit, β_0 est divisible par ϖ . Le support du faisceau $\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}$ est contenu dans

l'ensemble

$$\begin{aligned} \{h = 0\} \cap \{T_{k+1} = 0\} &= \{\beta_0 = 0\} \cap \{T_{k+1} = 0\} \\ &= \{\varpi = 0\} \cap \{T_{k+1} = 0\}. \end{aligned}$$

En particulier, le support du faisceau $\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}$ est contenu dans $\{\varpi = 0\}$.

Puisque la restriction de h à $\pi_{k+1,k}^{-1}(y)$ n'est pas nulle, quitte à restreindre U , on peut supposer que l'ensemble des zéros de h dans $\pi_{k+1,k}^{-1}(y) \cap U$ est réduit à 0_y . D'après le théorème 5.2.9, quitte à réduire U et V , on peut supposer que $\pi_{k+1,k}(U) \subset V$ et que le morphisme $\pi'_{k+1,k} : U \cap \{h = 0\} \rightarrow V$ induit par $\pi_{k+1,k}$ est fini. D'après le théorème 5.2.1, le faisceau

$$(\pi_{k+1,k})_*(\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}) = (\pi'_{k+1,k})_*(\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F})|_{\{h=0\}}$$

est un faisceau cohérent sur V .

Puisque le support de $\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F}$ est contenu dans $\{\varpi = 0\}$, celui de $(\pi_{k+1,k})_*(\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F})$ l'est aussi. D'après le lemme 5.5.1, il existe $v' \in \mathbf{N}$ tel que

$$\varpi^{v'} (\pi_{k+1,k})_*(\varpi^v T_{k+1}^d \mathcal{F})_y = (\pi_{k+1,k})_*(\varpi^{v+v'} T_{k+1}^d \mathcal{F})_y = 0.$$

On en déduit que $\varpi^{v+v'} T_{k+1}^d \mathcal{F}_{0_y} = 0$.

- Supposons que $n > k + 1$ et l'énoncé est démontré pour $n - 1$.

D'après le lemme 3.3.6, il existe $v \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, 0_y}$ dont la restriction à $\pi_{n,k}^{-1}(y)$ n'est pas nulle tels que $g = \varpi^v h$. Quitte à remplacer g par h et $\mathcal{F}$ par $\varpi^v \mathcal{F}$, on peut donc supposer que la restriction de g à $\pi_{n,k}^{-1}(y)$ n'est pas nulle. On peut maintenant conclure en reprenant la fin de la démonstration du lemme 5.5.2. $\square$

Démontrons maintenant un lemme technique permettant de ramener l'étude d'un point rigide épais à celle du point rationnel 0.

Lemme 5.5.4. — Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Posons $x_k := \pi_{n,k}(x)$ et notons 0_{x_k} le point de 0 de la fibre $\pi_{n,k}^{-1}(x_k) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{n-k,\text{an}}$.

Supposons que x est rigide épais au-dessus de x_k . Alors, il existe un voisinage ouvert U_k de x_k dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}}$, un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, un voisinage ouvert V de 0_{x_k} dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ tel que $\pi_{n,k}(U) = \pi_{n,k}(V) = U_k$ et un morphisme fini $\varphi : U \rightarrow V$ tel que l'on ait $\varphi^{-1}(0_{x_k}) = \{x\}$ et $\pi_{n,k} \circ \varphi = \pi_{n,k}$.

Démonstration. — Posons $l := n - k$. Démontrons le résultat par récurrence sur l . Dans le cas où $l = 0$, c'est immédiat.

Supposons que $l \geq 1$ et que le résultat est satisfait pour $l - 1$. Posons $x_{n-1} := \pi_{n-1}(x)$. Puisque x est rigide épais au-dessus de x_k , il l'est au-dessus de x_{n-1} . Considérons le polynôme minimal $\mu_{\kappa,x} \in \kappa(x_{n-1})[T_n]$ et relevons-le en un polynôme unitaire $M \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}},x_{n-1}}[T_n]$. Soit U un voisinage compact spectralement convexe de x_{n-1} sur lequel tous les coefficients de M sont $\mathcal{B}$ -définis. Notons $\varphi_M: \mathbf{A}_{\mathcal{B}(U)}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}(U)}^{1,\text{an}}$ le morphisme d'espaces $\mathcal{B}(U)$ -analytiques défini par M (cf. exemple 2.1.4). Identifions $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(U)}^{1,\text{an}}$ à $\pi_{n,n-1}^{-1}(U)$ et notons $0_{x_{n-1}}$ le point de 0 de la fibre $\pi_{n,n-1}^{-1}(x_{n-1})$. Le morphisme φ_M est fini, par l'exemple 5.1.8, et satisfait $\varphi_M^{-1}(0_{x_{n-1}}) = \{x\}$, car $\mu_{\kappa,x}$ est une puissance du polynôme minimal de x sur $\mathcal{H}(x_{n-1})$, d'après le lemme 1.6.25. Remarquons que, puisque φ_M est un morphisme d'espaces $\mathcal{B}(U)$ -analytiques, il satisfait $\pi_{n,n-1} \circ \varphi_M = \pi_{n,n-1}$.

Notons $0_{n-1,x_k}$ le point de 0 de la fibre $\pi_{n-1,k}^{-1}(x_k)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un voisinage ouvert U_k de x_k dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}}$, un voisinage ouvert U_{n-1} de x_{n-1} dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$, un voisinage ouvert V_{n-1} de $0_{n-1,x_k}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$ tel que $\pi_{n-1,k}(U_{n-1}) = \pi_{n-1,k}(V_{n-1}) = U_k$ et un morphisme fini $\psi: U_{n-1} \rightarrow V_{n-1}$ tel que l'on ait $\psi^{-1}(0_{n-1,x_k}) = \{x_{n-1}\}$ et $\pi_{n-1,k} \circ \psi = \pi_{n-1,k}$. On peut supposer que $U_{n-1} \subset U$.

Notons $\psi_n: \pi_{n,n-1}^{-1}(U_{n-1}) = U_{n-1} \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \rightarrow V_{n-1} \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} = \pi_{n,n-1}^{-1}(V_{n-1})$ le morphisme déduit de ψ par le changement de base $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$. D'après la proposition 5.3.1, c'est encore un morphisme fini. Il vérifie $\psi_n^{-1}(0_{x_k}) = \{0_{x_{n-1}}\}$.

Notons $\varphi'_M: \pi_{n,n-1}^{-1}(U_{n-1}) \rightarrow \pi_{n,n-1}^{-1}(U_{n-1})$ le morphisme induit par φ_M . Le morphisme composé $\psi_n \circ \varphi'_M$ satisfait alors les propriétés de l'énoncé. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer l'analogue du Nullstellensatz de Rückert en toute généralité.

Théorème 5.5.5. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $f \in \mathcal{O}(X)$ une fonction analytique nulle en tout point du support de $\mathcal{F}$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $f^d \mathcal{F}_x = 0$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Le résultat étant local au voisinage de X , on peut supposer qu'il existe une immersion fermée $j: X \rightarrow U$, où U est un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Quitte à restreindre X et U , on peut supposer qu'il existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tel que $j^\sharp(g) = f$. Le faisceau $j_* \mathcal{F}$ est cohérent, son support est contenu dans

le lieu d'annulation de g et on a $(j_*\mathcal{F})_{j(x)} = \mathcal{F}_x$. On peut donc supposer que X est un ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$.

D'après la remarque 1.6.22, quitte à permuter les variables, on peut supposer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_k := \pi_{n,k}(x)$ soit purement localement transcendant au-dessus de $\pi_n(x)$ et que x soit rigide épais au-dessus de x_k .

Si $n = k$, alors le résultat découle du lemme 5.5.1. Supposons donc que $n > k$. Notons $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}(T_{n+1})$ la droite affine analytique au-dessus de $\mathcal{A}$ munie de la coordonnée T_{n+1} . Notons $F: U \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}(T_{n+1})$ le morphisme associé à $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}}(U)$ par la proposition 4.1.1. D'après la proposition 4.6.10, le morphisme $\Gamma_F: U \rightarrow U \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}(T_{n+1})$ est une immersion fermée. Identifions le produit $U \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}(T_{n+1})$ à $\pi_{n+1,n}^{-1}(U)$.

Considérons maintenant le faisceau cohérent $(\Gamma_F)_*\mathcal{F}$. Soit $y \in \pi_{n+1,n}^{-1}(U)$ tel que $((\Gamma_F)_*\mathcal{F})_y \neq 0$. Alors y possède un unique antécédent z par Γ_F et on a

$$\mathcal{F}_z \simeq ((\Gamma_F)_*\mathcal{F})_y = 0.$$

On en déduit que

$$T_{n+1}(y) = \Gamma_F^\sharp(f)(y) = f(z) = 0.$$

Par conséquent, le support de $(\Gamma_F)_*\mathcal{F}$ est contenu dans le fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$ défini par T_{n+1} . Il suffit maintenant de montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$T_{n+1}^d((\Gamma_F)_*\mathcal{F})_{\Gamma_F(x)} \simeq ((\Gamma_F)_*(f^d\mathcal{F}))_x = 0.$$

Pour la suite du raisonnement, par commodité, échangeons les variables T_{k+1} et T_{n+1} . On a alors $\pi_{n+1,k+1}(\Gamma_F(x)) = 0_{k+1,x_k}$, où $0_{k+1,x_k} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k+1,\text{an}}$ désigne le point 0 de la fibre $\pi_{k+1,k}^{-1}(x_k)$.

Notons $0_{n+1,x_k} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$ le point 0 de la fibre $(\pi_{n+1,k})^{-1}(x_k)$. D'après le lemme 5.5.4, il existe un voisinage U' de $\Gamma_F(x)$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$, un voisinage ouvert V de $0_{n+1,x_k}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$ tel que $\pi_{n+1,k+1}(U') = \pi_{n+1,k+1}(V)$ et un morphisme fini $\varphi: U' \rightarrow V$ tel que l'on ait $\varphi^{-1}(0_{n+1,x_k}) = \{\Gamma_F(x)\}$ et $\pi_{n+1,k+1} \circ \varphi = \pi_{n+1,k+1}$.

D'après le théorème 5.2.1, $\varphi_*(\Gamma_F)_*\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent. Puisque φ commute à $\pi_{n+1,k+1}$, on a $\varphi^\sharp(T_{k+1}) = T_{k+1}$. Par conséquent, le support de $\varphi_*(\Gamma_F)_*\mathcal{F}$ est contenu dans le fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$ défini par T_{k+1} . En outre, on a

$$(\varphi_*(\Gamma_F)_*\mathcal{F})_{\varphi(\Gamma_F(x))} \simeq ((\Gamma_F)_*\mathcal{F})_{\Gamma_F(x)}.$$

Par conséquent, on peut supposer que $x = 0_{n+1, x_k}$ et que $f = T_{k+1}$. Le résultat découle alors des lemmes 5.5.2 et 5.5.3. $\square$

Corollaire 5.5.6. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soit f un élément de $\mathcal{O}(X)$ qui s'annule identiquement sur X . Alors, pour tout $x \in X$, l'image de f dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est nilpotente. $\square$

Notation 5.5.7. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux sur X . On note $V(\mathcal{J})$ le lieu des zéros de $\mathcal{J}$ et $\sqrt{\mathcal{J}}$ le radical de $\mathcal{J}$.

Soit Z un fermé analytique de X . On note $\mathcal{I}(Z)$ le faisceau d'idéaux des fonctions s'annulant en tout point de Z .

Corollaire 5.5.8. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X . Alors, on a

$$\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) = \sqrt{\mathcal{J}}.$$

En particulier, $\mathcal{I}(X)$ coïncide avec le faisceau d'idéaux $\sqrt{0}$ formé par les éléments nilpotents.

Démonstration. — Soit $x \in X$.

Pour tout $f \in (\sqrt{\mathcal{J}})_x$, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $f^d \in \mathcal{J}_x$. On en déduit que $f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))_x$.

Soit $f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))_x$. Le lieu des zéros de $\mathcal{J}$ s'identifie au support du faisceau $\mathcal{O}/\mathcal{J}$. Par conséquent, au voisinage de x , f s'annule sur ce support. D'après le théorème 5.5.5, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $f^d \mathcal{O}_x / \mathcal{J}_x = 0$, autrement dit, $f^d \in \mathcal{J}_x$.

La dernière partie du résultat s'obtient en appliquant la première au faisceau $\mathcal{J} = 0$. $\square$

5.6. Critères d'ouverture de morphismes finis

Nous allons maintenant utiliser les résultats obtenus dans les sections précédentes de ce chapitre pour formuler des conditions assurant que les morphismes finis soient ouverts.

Définition 5.6.1. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. On dit que l'espace X est *réduit en un point* x de X si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit. On dit que l'espace X est *réduit* s'il est réduit en tout point.

On peut d'ores et déjà remarquer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est réduit. En effet, d'après le théorème 1.6.28, ses anneaux locaux sont réguliers.

Le résultat suivant est inspiré de [GR84, 3.3.2, Criterion of Openness].

Proposition 5.6.2. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$ et supposons que φ est fini en x . Supposons que Y est réduit en $\varphi(x)$ et que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ -module sans torsion. Alors, le morphisme φ est ouvert en x .*

Démonstration. — Le résultat étant local en x , on peut supposer que φ est fini. Il suffit de montrer que $\varphi(X)$ contient un voisinage de $\varphi(x)$. Notons $x_1 := x, x_2, \dots, x_n$ les éléments de $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. D'après le lemme 5.1.3, il existe un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit une union disjointe d'ouverts $\bigsqcup_{i=1}^n U_i$, avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in U_i$. Quitte à remplacer U par U_1 , on peut supposer que $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$.

Posons $\mathcal{F} := \varphi_* \mathcal{O}_U$. On a alors $\mathcal{F}_{\varphi(x)} = \mathcal{O}_{U,x}$. D'après le théorème 5.2.1, c'est un faisceau cohérent, et son support $\varphi(U)$ est donc un fermé analytique de V . Si ce fermé n'est pas un voisinage de $\varphi(x)$, alors il existe un voisinage V' de $\varphi(x)$ dans V et $f \in \mathcal{O}(V')$ non nulle qui s'annule identiquement sur $V' \cap \varphi(U)$. D'après le théorème 5.5.5, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $f^d \mathcal{F}_{\varphi(x)} = 0$. Puisque Y est réduit, l'image de f^d dans $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ n'est pas nulle, donc $\mathcal{F}_{\varphi(x)} = \mathcal{O}_{U,x}$ est de torsion, et on aboutit à une contradiction. $\square$

Définition 5.6.3. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. On dit que le morphisme φ est *plat en un point x* de X si le morphisme d'anneaux $\varphi^\sharp: \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est plat. On dit que le morphisme φ est *plat* s'il est plat en tout point de X .

Les morphismes finis et plats sont stables par changement de base.

Proposition 5.6.4. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$ et supposons que φ est fini et plat en x .*

- i) *Soit $\psi: Z \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors le morphisme $\varphi_Z: X \times_Y Z \rightarrow Z$ obtenu par changement de base à Z est fini et plat en tout point au-dessus de x .*
- ii) *Soit $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux de Banach borné, où $\mathcal{B}$ est un anneau de base géométrique. Alors le morphisme $\varphi_{\mathcal{B}}: X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightarrow Y \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$*

obtenu par extension des scalaires à $\mathcal{B}$ est fini et plat en tout point au-dessus de x .

Démonstration. — Nous nous contenterons de démontrer le point i), l'autre s'obtenant de façon similaire. Soit $t \in X \times_Y Z$ un point au-dessus de x . D'après la proposition 5.3.1, le morphisme φ_Z est fini en t .

Il reste à montrer que l'anneau $\mathcal{O}_{X \times_Y Z, t}$ est plat sur $\mathcal{O}_{Z, \varphi_Z(t)}$. Par hypothèse, $\mathcal{O}_{X, x}$ est plat sur $\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}$, donc $\mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}} \mathcal{O}_{Z, \varphi_Z(t)}$ est plat sur $\mathcal{O}_{Z, \varphi_Z(t)}$. Or, d'après le théorème 5.4.8, $\mathcal{O}_{X \times_Y Z, t}$ s'identifie à un sous-module de $\mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}} \mathcal{O}_{Z, \varphi_Z(t)}$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Les morphismes finis et plats sont ouverts.

Corollaire 5.6.5. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$. Supposons que φ est fini et plat en x . Alors, φ est ouvert en x .

En particulier, pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathcal{A}$, le morphisme $\varphi_P: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ induit par P (cf. exemple 5.1.8) est fini et plat, et donc ouvert.

Démonstration. — Rappelons que l'on désigne par $\mathcal{I}(Y)$ le faisceau d'idéaux sur Y constitué des fonctions qui s'annulent en tout point (cf. notation 5.5.7). Posons $y := \varphi(x)$. D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{Y, y}$ est noethérien, donc $\mathcal{I}(Y)_y$ est engendré par un nombre fini d'éléments $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}_{Y, y}$. Quitte à restreindre Y (et remplacer X par sa préimage par φ), on peut supposer que les g_j sont définis sur Y et s'annulent en tout point.

Notons $\widetilde{Y}$ le fermé analytique de Y défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ engendré par les g_j et $r: \widetilde{Y} \rightarrow Y$ l'immersion fermée correspondante. Puisque les g_j s'annulent identiquement sur Y , r est un homéomorphisme. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y \widetilde{Y} & \xrightarrow{r'} & X \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \widetilde{Y} & \xrightarrow{r} & Y \end{array}$$

Tout comme r , le morphisme r' est un homéomorphisme. En effet, d'après le lemme 4.3.1, le produit fibré $X \times_Y \widetilde{Y}$ s'identifie au fermé analytique défini par l'idéal engendré par $\varphi^* \mathcal{J}$, qui est encore constitué de fonctions s'annulant en tout point.

Puisque r et r' sont des homéomorphismes, il suffit de montrer que $\tilde{\varphi}$ est ouvert en $r'^{-1}(x)$. D'après la proposition 5.6.4, i), $\tilde{\varphi}$ est fini est plat en $r'^{-1}(x)$. En particulier, le $\mathcal{O}_{\tilde{Y}, r^{-1}(y)}$ -module $\mathcal{O}_{X \times_Y \tilde{Y}, r'^{-1}(x)}$ est libre, et donc sans torsion. Or, on a

$$\mathcal{O}_{\tilde{Y}, r^{-1}(y)} = \mathcal{O}_{Y, y} / \mathcal{I}_y = \mathcal{O}_{Y, y} / \mathcal{I}(Y)_y.$$

Par conséquent, d'après le corollaire 5.5.8, l'espace $\tilde{Y}$ est réduit en $r^{-1}(y)$. Le résultat découle alors de la proposition 5.6.2.

Démontrons la seconde partie du résultat. On a déjà vu dans l'exemple 5.1.8 que le morphisme φ_P est fini. Considérons une copie X_T de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ avec coordonnée T et une autre X_S avec coordonnée S . On peut identifier X_S au fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2, \text{an}}$ avec coordonnées T, S défini par $P(S) - T$. Notons $\pi: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{2, \text{an}} \rightarrow X_T$ le morphisme de projection. Le morphisme φ_P s'identifie alors à $\pi|_{X_S}$ et sa platitude découle du lemme 5.2.3 et de la proposition 5.1.9, i). $\square$

Nous pouvons maintenant préciser la conclusion du lemme 5.5.4.

Lemme 5.6.6. — *Dans le lemme 5.5.4, on peut imposer au morphisme φ d'être fini et plat, et donc ouvert.*

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 5.5.4 en utilisant le corollaire 5.6.5 et le fait que les morphismes finis et plats sont stables par changement de base, d'après la proposition 5.6.4, et par composition. $\square$

CHAPITRE 6

STRUCTURE LOCALE DES ESPACES ANALYTIQUES

Dans ce chapitre, nous démontrons quelques résultats sur la structure locale des espaces analytiques et en tirons des applications.

Dans la section 6.1, nous démontrons, qu’au voisinage d’un point, un espace analytique peut s’écrire de façon unique comme union de fermés analytiques intègres en ce point (*cf.* proposition 6.1.8). Il s’agit d’un résultat de décomposition en composantes irréductibles dans lequel on ne prend en compte que l’espace topologique sous-jacent.

Dans la section 6.2, nous démontrons un critère permettant d’assurer qu’un morphisme ouvert en un point reste ouvert au voisinage de ce point (*cf.* proposition 6.2.3).

La section 6.3 contient une variante locale du lemme de normalisation de Noether dans notre contexte (*cf.* théorème 6.3.2). Elle assure qu’étant donné un point en lequel un espace analytique est intègre, il existe un voisinage de ce point pouvant s’envoyer par un morphisme fini et ouvert vers un ouvert d’un espace affine.

Dans la section 6.4, nous définissons la dimension locale d’un espace analytique (*cf.* définition 6.4.8). Nous démontrons, au passage, un résultat d’intérêt indépendant : un morphisme structural plat est ouvert (*cf.* proposition 6.4.1).

Finalement, dans les deux dernières sections, nous comparons certaines propriétés d’un schéma ou d’un morphisme de schémas à celles de son analytifié. Nous commençons, dans la section 6.5, par des résultats assez directs : pour un morphisme, surjectivité, propriété et finitude se transfèrent à l’analytifié

(cf. proposition 6.5.3), pour un faisceau, analytification et image directe par un morphisme fini commutent (cf. proposition 6.5.7).

La section 6.6 est basée sur un résultat plus difficile : la platitude du morphisme d'analytification (cf. théorème 6.6.5). Nous la démontrons pour une classe plus restrictive d'anneaux de base, celle des anneaux de Dedekind analytiques (cf. définition 6.6.1). Nos exemples usuels (corps valués, anneaux d'entiers de corps de nombres, corps hybrides, anneaux de valuation discrète, anneaux de Dedekind trivialement valués) appartiennent à cette classe. Elle nous permet notamment de comparer la dimension d'un schéma à celle de son analytifié (cf. théorème 6.6.12).

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de base géométrique. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

6.1. Décomposition locale des espaces analytiques en composantes irréductibles

Dans cette section, nous suivons de près [GR84, §4.1.3]. Commençons par définir les espaces analytiques localement intègres évoqués dans l'introduction.

Définition 6.1.1. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. On dit que l'espace X est *intègre en un point* x de X si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre. On dit que l'espace X est *localement intègre* s'il est intègre en tout point.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est localement intègre, puisque tous ses anneaux locaux sont réguliers, d'après le théorème 1.6.28.

Rappelons que l'on note $\mathcal{I}(X)$ le faisceau d'idéaux des fonctions s'annulant en tout point de X , $\sqrt{0}$ celui des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_X$ (cf. notation 5.5.7) et que ces deux faisceaux coïncident, d'après le corollaire 5.5.8.

Définition 6.1.2. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. On dit que l'espace X est *irréductible en un point* x de X si $\mathcal{I}(X)_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Lemme 6.1.3. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$. Si X est intègre en x , alors X est irréductible en x .

Démonstration. — Supposons que X est intègre en x . Alors, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et $\mathcal{I}(X)_x = (\sqrt{0})_x = 0$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$. $\square$

Remarque 6.1.4. — Il existe des espaces analytiques irréductibles en un point mais non intègres en ce point. C'est le cas du fermé analytique de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$, avec coordonnée T , défini par le polynôme T^2 .

Le résultat qui suit permet cependant d'affirmer qu'un espace analytique irréductible en un point n'est pas très loin d'être intègre en ce point.

Proposition 6.1.5. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$. Supposons que X est irréductible en x . Alors, il existe un voisinage V de x dans X et un fermé analytique $\widetilde{V}$ de V de même ensemble sous-jacent tels que $\widetilde{V}$ soit intègre en x .*

Démonstration. — Par hypothèse, l'idéal $\mathcal{I}(X)_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ est premier. D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien, donc $\mathcal{I}(X)_x$ est engendré par un nombre fini d'éléments $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{X,x}$. Soit V un voisinage de x dans X sur lequel tous les f_i sont définis. Quitte à restreindre V , on peut supposer que les f_i s'annulent en tout point de V .

Notons $\widetilde{V}$ le sous-espace analytique de V défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ engendré par les f_i . Ensemblistement, on a $\widetilde{V} = V$. Qui plus est, on a

$$\mathcal{O}_{\widetilde{V},x} = \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{I}(X)_x,$$

donc $\widetilde{V}$ est intègre en x . □

Démontrons maintenant un énoncé local de décomposition d'un espace analytique en fermés analytiques intègres. Commençons par rappeler un résultat d'algèbre commutative. Il se déduit, par exemple de [Bou06a, IV, §2, n° 2, théorème 1] (pour l'existence) et [Bou06a, IV, §2, n° 3, proposition 4] (pour l'unicité).

Théorème 6.1.6. — *Soient R un anneau noethérien et I un idéal de R tel que R/I est réduit. Alors, il existe une unique famille finie d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ de R vérifiant, pour tous $i, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ avec $i \neq j$, $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ et telle que*

$$I = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i.$$

Lemme 6.1.7. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et V un fermé analytique de X défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$. Si V est intègre en un point x , alors on a $\mathcal{J}_x = \mathcal{I}(V)_x$.*

Démonstration. — Soit $x \in V$ tel que V est intègre en x . Alors, $\mathcal{J}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$. D'après le corollaire 5.5.8, on a donc $\mathcal{I}(V)_x = \sqrt{\mathcal{J}_x} = \mathcal{J}_x$. □

Proposition 6.1.8. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$. Alors, il existe un voisinage ouvert V de x et des fermés analytiques $V_1, \dots, V_s$ de V*

contenant x et intègres en x vérifiant, pour tous $i, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ avec $i \neq j$, $V_i \not\subset V_j$ et tels que

$$V = \bigcup_{i=1}^s V_i.$$

De plus, cette décomposition est unique au sens suivant : s'il existe un voisinage ouvert V' de x et des fermés analytiques $V'_1, \dots, V'_t$ de V' satisfaisant les mêmes propriétés, alors on a $s = t$ et il existe un voisinage ouvert W de x dans $V \cap V'$ et une permutation σ de $\llbracket 1, s \rrbracket$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, V_i \cap W = V'_{\sigma(i)} \cap W.$$

Démonstration. — • *Existence*

Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers associés à l'idéal $\mathcal{I}(X)_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ par le théorème 6.1.6. Pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, soient $f_{i,1}, \dots, f_{i,k_i}$ des générateurs de $\mathfrak{p}_i$. Soit V un voisinage ouvert de x sur lequel tous les $f_{i,j}$ sont définis. Pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note $\mathcal{I}_i$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_V$ engendré par $f_{i,1}, \dots, f_{i,k_i}$ et V_i le fermé analytique de V qu'il définit.

Pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on a, par définition, $\mathcal{O}_{V_i,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{i,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_i$, donc V_i est intègre en x . Pour tous $i, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ avec $i \neq j$, on a $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ et on en déduit que $V_j \not\subset V_i$. Quitte à restreindre V , on peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, k_i \rrbracket$, on a $f_{i,j} \in \mathcal{I}(X)(V)$. On a alors $V = \bigcup_{i=1}^s V_i$.

• *Unicité*

Soient V' un voisinage ouvert de x et $V'_1, \dots, V'_t$ vérifiant les propriétés de l'énoncé. Pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, notons $\mathcal{I}'_i$ le faisceau d'idéaux de V' définissant V'_i .

D'après le lemme 6.1.7, pour tout $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$, on a $\mathcal{I}(V'_i)_x = \mathcal{I}'_{i,x}$ et c'est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ avec $i \neq j$, on a $\mathcal{I}(V'_i)_x \not\subset \mathcal{I}(V'_j)_x$. En outre, puisque $V' = \bigcup_{i=1}^t V'_i$, on a $\mathcal{I}(X)_x = \bigcap_{i=1}^t \mathcal{I}(V'_i)_x$. Le théorème 6.1.6 assure alors que la famille $(\mathcal{I}(V'_i)_x)_{1 \leq i \leq t}$ est une permutation de la famille $(\mathcal{I}(V_i)_x)_{1 \leq i \leq s}$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Définition 6.1.9. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$. Les fermés analytiques $V_1, \dots, V_s$ de la proposition 6.1.8 sont appelés *composantes locales* de x en X .

6.2. Un critère d'ouverture

Dans cette section, nous démontrons un résultat technique permettant d'assurer qu'un morphisme fini et ouvert en un point le reste sur un voisinage. Nous suivons le raisonnement de [GR84, §3.3.3].

Notation 6.2.1. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules.

On note $\mathcal{F}^{\text{tors}}$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ formé des sections de torsion.

On note $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ le dual de $\mathcal{F}$.

Lemme 6.2.2. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique localement intègre et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors on a

$$\mathcal{F}^{\text{tors}} = \text{Ker}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}).$$

En particulier, le faisceau $\mathcal{F}^{\text{tors}}$ est cohérent.

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tout $x \in X$, on a $\mathcal{F}_x^{\text{tors}} = \text{Ker}(\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^{\vee\vee})$.

Soit $x \in X$. Soit $f \in \mathcal{F}_x^{\text{tors}}$. Par définition, il existe $a \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \{0\}$ tel que $af = 0$ dans $\mathcal{F}_x$. Soit $\varphi \in \mathcal{F}_x^\vee$. On a $a\varphi(f) = \varphi(af) = 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$, donc $\varphi(f) = 0$ car $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre. On en déduit que l'image de f dans $\mathcal{F}_x^{\vee\vee}$ est nulle. Nous avons donc montré que $\mathcal{F}_x^{\text{tors}} \subset \text{Ker}(\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^{\vee\vee})$.

Soit $f \in \mathcal{F}_x \setminus \mathcal{F}_x^{\text{tors}}$. Posons $\mathcal{G} := \mathcal{F}/\mathcal{F}^{\text{tors}}$. Posons $V_x := (\mathcal{O}_{X,x} \setminus \{0\})^{-1}\mathcal{G}_x$. C'est un espace vectoriel de dimension finie sur $\text{Frac } \mathcal{O}_{X,x}$ et le morphisme naturel $\mathcal{G}_x \rightarrow V_x$ est injectif. Notons f' (resp. f'') l'image de f dans $\mathcal{G}_x$ (resp. V_x). L'élément f'' n'étant pas nul, il existe un morphisme $\text{Frac } \mathcal{O}_{X,x}$ -linéaire $\varphi_x'': V_x \rightarrow \text{Frac } \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\varphi_x''(f'') \neq 0$. Quitte à multiplier par un élément convenable de $\mathcal{O}_{X,x}$, on obtient un morphisme $\mathcal{O}_{X,x}$ -linéaire $\varphi_x': \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\varphi_x'(f') \neq 0$. Le faisceau $\mathcal{G}$ étant de type fini, le morphisme φ_x' est induit par un morphisme $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_X$ défini sur un voisinage de x . On en déduit que $f \notin \text{Ker}(\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^{\vee\vee})$. Ceci clôt la démonstration. $\square$

Venons-en maintenant au résultat annoncé.

Proposition 6.2.3. — Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, avec Y localement intègre. Soit $x \in X$. Si φ est ouvert en x et X est intègre en x , alors il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ tels que $\varphi(U) \subset V$ et le morphisme $\varphi_{U,V}: U \rightarrow V$ induit par φ soit fini et ouvert.

Démonstration. — D'après le lemme 5.1.3, quitte à restreindre X , on peut supposer que $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$. Posons $\mathcal{F} := \varphi_*(\mathcal{O}_X)$. D'après le théorème 5.2.1, c'est un faisceau cohérent. D'après la proposition 5.6.2, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ dans Y tel que pour tout $y \in V$, $\mathcal{F}_y$ soit un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module sans torsion. D'après le lemme 6.2.2, $\mathcal{F}^{\text{tors}}$ est cohérent. Par conséquent, son support est fermé. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}_{\varphi(x)}$ est un $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ -module sans torsion.

Montrons tout d'abord que le morphisme $:\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit par $\varphi^\sharp$ est injectif. Soit $f \in \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ dont l'image $\varphi^\sharp(f)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est nulle. Il existe un voisinage U de x dans X tel que $\varphi^\sharp(f)$ est nulle sur U . En utilisant la proposition 2.1.27, on en déduit que f est nulle en tout point de $\varphi(U)$. Puisque φ est ouverte en x , f appartient donc à $\mathcal{I}(Y)_{\varphi(x)}$, donc f est nilpotente dans $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$. Or Y est localement intègre donc f est nulle dans $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$.

Puisque $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$, on a $\mathcal{F}_{\varphi(x)} \simeq \mathcal{O}_{X,x}$. Or, par hypothèse, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre. Le résultat s'ensuit. $\square$

6.3. Normalisation de Noether locale

Le but de cette section est de démontrer un analogue local du lemme de normalisation de Noether, valable en un point en lequel l'espace est intègre.

Rappelons la définition 1.2.18 concernant les projections. Pour tout $b \in B$, notons $0_{b,l} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ le point 0 de la fibre $\pi_l^{-1}(b)$. Commençons par un cas particulier.

Lemme 6.3.1. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. Soient $b \in B$, $x \in \pi^{-1}(b)$, $n \in \mathbf{N}$, V_0 un voisinage ouvert de $0_{b,n}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $\psi: X \rightarrow V_0$ un morphisme fini tel que $\psi(x) = 0_{b,n}$. Alors, il existe un voisinage ouvert W de b dans B , un voisinage ouvert U de x dans X , un entier $l \leq n$, un voisinage ouvert V de $0_{b,l}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l,\text{an}}$ et un morphisme fini $\varphi: U \rightarrow V$ tels que*

- i) $\pi(U) = \pi_l(V) = W$ et $\pi_l \circ \varphi = \pi$;
- ii) $\varphi(U)$ est un voisinage de $0_{b,l}$ dans $\pi_l^{-1}(b)$.

Démonstration. — Démontrons le résultat par récurrence sur n . Si $n = 0$, le résultat est satisfait avec $l = 0$ puisque $\pi_0^{-1}(b) = \{b\}$.

Supposons que $n \geq 1$ et que le résultat est vrai pour $n - 1$. Si $\psi(X)$ est un voisinage de $0_{b,n}$ dans $\pi_n^{-1}(b)$, alors ψ satisfait toutes les propriétés requises. Supposons maintenant que tel n'est pas le cas.

D'après le corollaire 5.2.8, $\psi(X)$ est un fermé analytique de V_0 et $\psi(X) \cap \pi_n^{-1}(b)$ est strictement contenu dans $V_0 \cap \pi_n^{-1}(b)$. On en déduit qu'il existe un voisinage ouvert V de $0_{b,n}$ dans V_0 et un élément f de $\mathcal{O}(V)$ qui soit nul sur $V \cap \psi(X)$ mais pas identiquement nul sur $V \cap \pi_n^{-1}(b)$. Posons $U := \psi^{-1}(V)$ et $W := \pi_n(V)$. D'après le corollaire 1.5.13, W est un ouvert de B . D'après le lemme 1.6.11, il existe un isomorphisme $\sigma: \pi_n^{-1}(W) \rightarrow \pi_n^{-1}(W)$ tel que $\sigma(0_{b,n}) = 0_{b,n}$ et la restriction de $\sigma^\sharp(f)$ à $\pi_{n,n-1}^{-1}(b)$ ne soit pas nulle. Le point $0_{b,n}$ est alors isolé dans $\sigma(\psi(U)) \cap \pi_{n,n-1}^{-1}(b)$.

Posons $\varphi := \pi_{n,n-1} \circ \sigma \circ \psi$. On a alors $\varphi(x) = 0_{b,n-1}$ et le point x est isolé dans $\varphi^{-1}(0_{b,n-1})$. D'après le théorème 5.2.9, le morphisme φ est donc fini en x . Puisqu'il est à valeurs dans un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. $\square$

Théorème 6.3.2. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. Soit x un point de X en lequel $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre. Posons $b := \pi(x)$ et notons $\pi_{b,x}^\sharp: \mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ le morphisme induit par $\pi^\sharp$.*

Si $\pi_{b,x}^\sharp$ est injectif, alors il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un entier $n \in \mathbf{N}$, un ouvert V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et un morphisme fini ouvert $\varphi: U \rightarrow V$.

Si $\pi_{b,x}^\sharp$ n'est pas injectif, alors il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un entier $n \in \mathbf{N}$, un ouvert V de $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$ et un morphisme fini ouvert $\varphi: U \rightarrow V$.

Démonstration. — Puisque la question est locale, on peut supposer que X est un fermé analytique d'un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. D'après la remarque 1.6.22, quitte à permuter les variables, on peut supposer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que x soit rigide épais au-dessus de $x_k := \pi_{n,k}(x)$ et que x_k soit purement localement transcendant au-dessus de $b := \pi_n(x)$.

Pour tout $m \geq k$, notons $0_{x_k,m} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$ le point 0 de la fibre $\pi_{m,k}^{-1}(x_k) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_k)}^{m-k,\text{an}}$. D'après le lemme 5.5.4, il existe un voisinage W de x_k dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}}$, un voisinage ouvert U' de x dans $\tilde{U}$ et un voisinage ouvert V_0 de $0_{x_k,n}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ vérifiant $\pi_{n,k}(U') = \pi_{n,k}(V_0) = W$ et un morphisme fini $\psi: U' \rightarrow V_0$ tels que l'on ait $\psi^{-1}(0_{x_k,n}) = \{x\}$ et $\pi_{n,k} \circ \psi = \pi_{n,k}$.

D'après le lemme 6.3.1 appliqué à $\psi|_X$, quitte à restreindre W , on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un entier $l \geq k$, un

voisinage ouvert V de $0_{x_k,l}$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{l,\text{an}}$ et un morphisme fini $\varphi: U \rightarrow V$ tels que $\pi_{n,k}(U) = \pi_{l,k}(V) = W$, $\pi_{l,k} \circ \varphi = \pi_{n,k}$ et $\varphi(U)$ est un voisinage de $0_{x_k,l}$ dans $\pi_{l,k}^{-1}(b)$. En outre, en utilisant le lemme 5.1.3, on montre que, quitte à restreindre U , on peut supposer que $\varphi^{-1}(0_{x_k,l}) = \{x\}$. Posons $y := 0_{x_k,l}$.

D'après le théorème 5.2.1, le faisceau $\varphi_*\mathcal{O}_U$ est cohérent. Notons $\mathcal{I}$ le noyau du morphisme $\varphi^\sharp: \mathcal{O}_V \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_U$. L'ensemble $\varphi(U)$ est l'ensemble sous-jacent au fermé analytique de V défini par $\mathcal{I}$. Nous considérerons désormais $\varphi(U)$ comme un espace analytique muni de cette structure.

Remarquons que $\mathcal{I}_y$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{V,y}$. En effet, puisque $\varphi^{-1}(y) = \{x\}$, $\mathcal{I}_y$ est le noyau du morphisme $\mathcal{O}_{V,y} \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}$ induit par $\varphi^\sharp$. On en déduit que $\mathcal{O}_{\varphi(U),y} \simeq \mathcal{O}_{V,y}/\mathcal{I}_y$ s'injecte dans $\mathcal{O}_{U,x}$, qui est supposé intègre. Le résultat s'ensuit.

Nous allons à présent traiter séparément les deux cas présentés dans l'énoncé.

- Supposons que le morphisme $\pi_{b,x}^\sharp$ est injectif.

Puisque U est intègre en x et que V est localement intègre, d'après la proposition 6.2.3, il suffit de montrer que φ ouvert en x . Puisqu'on a $\varphi^{-1}(y) = \{x\}$, d'après le lemme 5.1.3, pour tout voisinage U' de x , $\varphi(U')$ est un voisinage de y dans $\varphi(U)$. Il suffit donc de montrer que $\varphi(U)$ est un voisinage de y dans V .

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\varphi(U)$ n'est pas un voisinage de y dans V . Dans ce cas, $\mathcal{I}_y$ n'est pas nul. Soit $f \in \mathcal{I}_y \setminus \{0\}$.

Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps fort. D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},x_k}$ est encore un corps fort. D'après le lemme 3.3.7, l'image de f dans $\mathcal{O}_{\pi_{l,k}^{-1}(x_k),y}$ n'est pas nulle. Or l'image de f dans $\mathcal{O}_{\varphi(U),y}$ est nulle et $\varphi(U)$ est un voisinage de y dans $\pi_{l,k}^{-1}(x_k)$. On aboutit à une contradiction.

Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète. Fixons-en une uniformisante π_b . D'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{k,\text{an}},x_k}$ est encore un anneau fortement de valuation discrète d'uniformisante π_b . D'après le lemme 3.3.6, il existe $v \in \mathbf{N}$ et $g \in \mathcal{O}_{V,y}$ tels que la restriction de g à $\pi_{l,k}^{-1}(x_k)$ ne soit pas nulle et $f = \pi_b^v g$ dans $\mathcal{O}_{V,y}$.

Puisque le morphisme $\pi_{b,x}^\sharp: \mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif, le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{\varphi(U),y} \simeq \mathcal{O}_{V,y}/\mathcal{I}_y$ l'est aussi. Par conséquent, l'image de π_b dans $\mathcal{O}_{V,y}$ n'appartient pas à $\mathcal{I}_y$. Puisque $\mathcal{I}_y$ est premier, on en déduit que $g \in \mathcal{I}_y$. On en déduit une contradiction, comme précédemment.

- Supposons que le morphisme $\pi_{b,x}^\sharp$ n'est pas injectif.

Ce cas ne peut se produire que lorsque $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète. Fixons une uniformisante π_b de $\mathcal{O}_{B,b}$. Notons V_b le fermé analytique de V défini par π_b . Rappelons que le morphisme $\mathcal{O}_{\varphi(U),y} \simeq \mathcal{O}_{V,y}/\mathcal{I}_y \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}$ induit par $\varphi^\#$ est injectif. Puisque $\pi_{b,x}^\# : \mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}$ n'est pas injectif, l'image de π_b dans $\mathcal{O}_{V,y}$ appartient à $\mathcal{I}_y$. Par conséquent, quitte à rétrécir U et V , on peut supposer que $\varphi(U)$ est un fermé analytique de V_b . Le morphisme φ se factorise donc par un morphisme $\varphi' : U \rightarrow V_b$. On peut alors appliquer à φ' le même raisonnement que précédemment, dans le cas des corps forts, pour montrer qu'il est ouvert en x . On conclut alors par la proposition 6.2.3. $\square$

Remarque 6.3.3. — Dans le cas classique des espaces sur un corps valué, on peut démontrer un résultat similaire à celui du théorème 6.3.2 sans condition sur l'espace X et construire un morphisme ouvert en x (qui sera donc ouvert au voisinage de x si X est irréductible, par exemple). Notre preuve fournit d'ailleurs ce résultat lorsque $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps.

En revanche, cet énoncé plus général tombe en défaut lorsque $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète, comme on le vérifie sur l'exemple du fermé analytique X de $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$, avec coordonnée T , défini par l'équation $2T = 0$ et du point x défini par $T(x) = 2(x) = 0$.

Remarque 6.3.4. — L'entier n présent dans l'énoncé du théorème 6.3.2 ne dépend que de x . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, dans tous les cas, on a un morphisme fini et ouvert $U \cap \pi^{-1}(b) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$. On est alors ramenés au cas classique des espaces sur un corps valué complet et on vérifie que l'entier n n'est autre que la dimension de $U \cap \pi^{-1}(b)$ en x .

6.4. Dimension locale d'un espace analytique

Le but de cette section est de définir la dimension d'un espace analytique en un point.

Commençons par démontrer un résultat utile d'ouverture des morphismes plats. Nous remercions Mattias Jonsson qui nous a suggéré de l'inclure.

Proposition 6.4.1. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\pi : X \rightarrow B$ le morphisme structural. Soit $x \in X$. Si le morphisme $\mathcal{O}_{B,\pi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit par $\pi^\#$ est plat, alors le morphisme π est ouvert au point x .*

Démonstration. — Supposons que le morphisme $\mathcal{O}_{B,\pi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit par $\pi^\sharp$ est plat. Soit U un voisinage ouvert de x dans X . Posons $b := \pi(x)$. Montrons que $\pi(U)$ est un voisinage de b .

D'après la proposition 6.1.8, quitte à rétrécir le voisinage U , on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme $U = \bigcup_{i=1}^s U_i$, où les U_i sont des fermés analytiques de U contenant x et intègres en x . Il suffit de montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que $\pi(U_i)$ soit un voisinage de b .

Montrons, tout d'abord, qu'il existe $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que le morphisme naturel $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i,x}$ soit injectif. Si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps, le résultat est évident. Supposons donc que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau fortement de valuation discrète. Soit ϖ_b une uniformisante de cet anneau. Il suffit de montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que l'image de ϖ_b dans $\mathcal{O}_{U_i,x}$ ne soit pas nulle. Supposons, par l'absurde, que tel ne soit pas le cas. Alors ϖ_b s'annule en tout point d'un voisinage de x dans U , donc son image dans $\mathcal{O}_{U,x}$ est nilpotente, d'après le corollaire 5.5.6. Ceci contredit la platitude du morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}$.

Soit $i_0 \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{U_{i_0},x}$ est injectif. Puisque U_{i_0} est intègre en x , le théorème 6.3.2 assure que, quitte à rétrécir U_{i_0} , il existe un morphisme fini ouvert $\varphi: U_{i_0} \rightarrow V$, où V est un ouvert d'un espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Or, d'après le corollaire 1.5.13, le morphisme de projection $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow B$ est ouvert. Le résultat s'en déduit. $\square$

Venons-en maintenant aux questions de dimension. Nous nous permettrons d'utiliser la théorie classique de la dimension des espaces analytiques sur un corps valué complet (cf. [Ber90, § 2.3] ou [Duc07b, § 1]).

Définition 6.4.2. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. Soit $x \in X$ tel que x soit intègre en X . On appelle *dimension relative de X en x* la quantité

$$\dim_x(X/B) := \dim_x(\pi^{-1}(\pi(x))).$$

Avant de définir la dimension locale d'un espace, introduisons encore une nouvelle notion.

Définition 6.4.3. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. On dit que l'espace X est *vertical en x* si $\pi^{-1}(\pi(x))$ est un voisinage de x dans X .

Notation 6.4.4. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$. On pose

$$v_x(X) := \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est vertical en } x ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 6.4.5. — Un point b de B est dit *isolable* s'il existe un voisinage ouvert V de b dans B et $h \in \mathcal{O}(V)$ tels que

$$\{c \in V : h(c) = 0\} = \{b\}.$$

Remarque 6.4.6. — Soit $b \in B$. Si b est isolé dans B , alors il est isolable. Si b n'est pas isolé dans B , alors il ne peut être isolable que si $\mathcal{O}_{B,b}$ n'est pas un corps, auquel cas c'est un anneau de valuation discrète.

Dans nos exemples standard 1.1.16 à 1.1.21, la réciproque de l'énoncé précédent vaut également. Ainsi, dans $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ (cf. exemple 1.1.17), les points isolables sont-ils exactement les points $a_p^{+\infty}$, avec p premier, chacun de ces points étant isolé par l'équation $p = 0$.

Notons cependant que, dans le cas général, il existe des points non isolables dont l'anneau local est de valuation discrète. L'anneau $\mathbf{C}_{\text{hyb}}\langle |T| \leq 1 \rangle$ fournit un exemple de cette situation. D'après la proposition 1.4.5, le spectre $\mathcal{M}(\mathbf{C}_{\text{hyb}}\langle |T| \leq 1 \rangle)$ s'identifie au disque unité fermé au-dessus de $\mathcal{M}(\mathbf{C}_{\text{hyb}})$. Le point 0 de $\mathcal{M}(\mathbf{C}_{\text{hyb}}\langle |T| \leq 1 \rangle)$ au-dessus de la valeur absolue triviale (ou de toute autre) n'est pas isolable, mais l'anneau local en ce point est un anneau de valuation discrète.

Lemme 6.4.7. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. Soit $x \in X$ tel que X soit irréductible en x et $b := \pi(x)$ soit isolable. Notons $\pi_{b,x}^\sharp: \mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ le morphisme induit par $\pi^\sharp$.

Si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps, alors X est vertical en x .

Si $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) X est vertical en x ;
- ii) le morphisme $\pi_{b,x}^\sharp$ n'est pas plat ;
- iii) le morphisme $\pi_{b,x}^\sharp$ n'est pas injectif ;
- iv) toute uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ est nilpotente dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Démonstration. — Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps. D'après la remarque 6.4.6, le point b est isolé, donc X est vertical en x .

Supposons que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète.

$i) \implies ii)$ Supposons, par l'absurde, que $\pi_{x,b}^\#$ est plat. Alors, d'après la proposition 6.4.1, $\pi(\pi^{-1}(b)) = \{b\}$ est un voisinage de b et on aboutit à une contradiction.

$ii) \implies iii)$ Soit ϖ_b une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$. Par hypothèse, il existe un entier $n \geq 1$ et un élément f de $\mathcal{O}_{X,x}$ non nul tels que $\varpi_b^n f = 0$. En d'autres termes, $\varpi_b^n f \in \mathcal{I}(X)_x$. Or $\mathcal{I}(X)_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$, donc $\varpi_b^n = 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$. On en déduit que $\pi_{b,x}^\#$ n'est pas injectif.

$iii) \implies iv)$ C'est immédiat.

$iv) \implies i)$ Soit ϖ_b une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$. Puisque b est isolable, il existe un voisinage ouvert V de b dans B et $h \in \mathcal{O}(V)$ tels que $\{c \in V : h(c) = 0\} = \{b\}$. Quitte à restreindre V , on peut écrire h sous la forme $h = \varpi_b^n g$ avec $n \geq 1$ et $g \in \mathcal{O}(V)$ inversible. On a donc

$$\{b\} = \{c \in V : h(c) = 0\} = \{c \in V : \varpi_b(c) = 0\}.$$

Puisque l'image de ϖ_b dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est nilpotente, le fermé analytique défini par ϖ_b dans $\pi^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X . Or, ce fermé n'est autre que $\pi^{-1}(b)$. $\square$

Définition 6.4.8. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soit $x \in X$ tel que x soit irréductible en X . On appelle *dimension de X en x* la quantité

$$\dim_x(X) := \dim_x(X/B) + v_x(X).$$

Soit $x \in X$. Décomposons X au voisinage de x sous la forme $X = \bigcup_{i=1}^s V_i$, où $V_1, \dots, V_s$ sont intègres en x comme dans la proposition 6.1.8. On appelle *dimension de X en x* la quantité

$$\dim_x(X) := \max_{1 \leq i \leq s} \dim_x(V_i).$$

6.5. D'un schéma à son analytifié : premières propriétés

Dans cette section, nous nous intéressons aux propriétés d'un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$ qui sont préservées lorsque l'on passe à son analytifié.

Rappelons qu'à tout schéma localement de présentation finie $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{A}$, on associe un espace $\mathcal{A}$ -analytique $\mathcal{X}^{\text{an}}$ et un morphisme d'espaces localement $\mathcal{A}$ -annelés $\rho_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ (cf. définition 4.1.5).

Lemme 6.5.1. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est compact.*

Démonstration. — Il suit de la construction de l'analytifié (cf. théorème 4.1.4) que $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ peut être construit à partir d'espaces affines $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ par la prodédure de recollement habituelle. On vérifie directement que $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est alors recouvert par les images des disques unités fermés de ces espaces affines. Le résultat s'ensuit, par la compacité des disques. $\square$

Lemme 6.5.2. — *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$ et $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas. Soit $y \in \mathcal{Y}^{\text{an}}$. Munissons $\varphi^{-1}(\rho_Y(y))$ de sa structure de schéma sur $\kappa(\rho_Y(y))$ canonique et $(\varphi^{\text{an}})^{-1}(y)$ de sa structure d'espace analytique sur $\mathcal{H}(y)$ canonique (cf. proposition 4.5.3). On a alors un isomorphisme canonique d'espaces $\mathcal{H}(y)$ -analytiques*

$$(\varphi^{-1}(\rho_Y(y)) \otimes_{\kappa(\rho_Y(y))} \mathcal{H}(y))^{\text{an}} \simeq (\varphi^{\text{an}})^{-1}(y).$$

En particulier, on a

$$\rho_Y(\varphi^{\text{an}}(\mathcal{X}^{\text{an}})) = \varphi(\mathcal{X}).$$

Démonstration. — On a

$$\varphi^{-1}(\rho_Y(y)) \simeq \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{Y}} \kappa(\rho_Y(y))$$

et

$$(\varphi^{\text{an}})^{-1}(y) \simeq (\mathcal{X}^{\text{an}} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)) \times_{\mathcal{Y}^{\text{an}} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(y)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)).$$

L'isomorphisme découle alors des propriétés universelles (cf. définitions 4.1.5 et 4.2.1).

En particulier, $\varphi^{-1}(\rho_Y(y))$ est vide si, et seulement si, $(\varphi^{\text{an}})^{-1}(y)$ l'est. L'égalité finale s'en déduit. $\square$

Proposition 6.5.3. — *Soit $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Si le morphisme φ est (1) une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte), (2) surjectif, (3) propre, (4) séparé, (5) fini, alors le morphisme φ^{an} possède la même propriété.*

Démonstration. — (1) Les trois propriétés découlent de la construction de l'analytifié (cf. théorème 4.1.4).

(2) Cette propriété découle du lemme 6.5.2.

(3) Supposons que φ est propre. D'après le lemme de Chow (cf. [EGAI, corollaire 5.6.2]), il existe un $\mathcal{Y}$ -schéma projectif $\mathcal{X}'$ et un morphisme de $\mathcal{Y}$ -schémas $\psi: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ projectif et surjectif. D'après (2), ψ^{an} est surjectif. D'après

le lemme 4.4.4, il suffit donc de montrer le résultat pour les morphismes projectifs.

Supposons que φ est projectif. Puisque la propriété est une notion locale au but, quitte à rétrécir $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, on peut supposer que φ s'écrit comme la composée d'une immersion fermée $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^n \times_{\mathcal{A}} \mathcal{Y}$ et de la projection sur le second facteur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^n \times_{\mathcal{A}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Remarquons qu'il découle immédiatement des propriétés universelles que l'analytification commute au produit. D'après (1), $\mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{A}^{\text{an}}}^n \times_{\mathcal{A}^{\text{an}}} \mathcal{Y}^{\text{an}}$ est une immersion fermée, donc un morphisme propre. D'après le lemme 6.5.1, $\mathbf{P}_{\mathcal{A}^{\text{an}}}^n$ est compact, donc la projection $\mathbf{P}_{\mathcal{A}^{\text{an}}}^n \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est propre. D'après la proposition 4.5.6, la projection $\mathbf{P}_{\mathcal{A}^{\text{an}}}^n \times_{\mathcal{A}^{\text{an}}} Y \rightarrow Y$ l'est encore. On conclut en utilisant le fait que la composée de deux morphismes propres est propre (cf. lemme 4.4.4).

(4) Cette propriété découle du point (1) et du lemme 4.3.12.

(5) Supposons que φ est un morphisme fini. Alors, d'après (3) et (4), φ^{an} est propre et séparé. Il suffit donc de montrer que les fibres de φ^{an} sont finies. Cela découle de l'isomorphisme qui figure au début de la preuve de (2). $\square$

Remarque 6.5.4. — Il est très plausible que les implications démontrées à la proposition 6.5.3 soient en fait des équivalences. Nous n'en dirons pas plus ici.

Nous allons maintenant démontrer des résultats sur les faisceaux.

Définition 6.5.5. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules $\mathcal{F}$, on appelle *analytification* ou *analytifié* de $\mathcal{F}$ le faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\text{an}}}$ -modules défini par

$$\mathcal{F}^{\text{an}} := (\rho_{\mathcal{X}})^* \mathcal{F}.$$

Lemme 6.5.6. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules. Si $\mathcal{F}$ est de type fini (resp. cohérent), alors $\mathcal{F}^{\text{an}}$ est de type fini (resp. cohérent).

Démonstration. — Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ est exact à droite, donc il préserve les faisceaux de type fini. D'après le théorème 1.6.34, le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\text{an}}}$ est cohérent, donc les faisceaux cohérents sont exactement ceux de présentation finie. On en déduit qu'il sont également préservés. $\square$

Proposition 6.5.7. — Soit $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme fini de schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules. Alors

le morphisme naturel

$$(\varphi_* \mathcal{F})^{an} \longrightarrow (\varphi^{an})_* \mathcal{F}^{an}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^{an} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{X}}} & \mathcal{X} \\ \downarrow \varphi^{an} & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{Y}^{an} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y}. \end{array}$$

Par le même raisonnement que dans la preuve du lemme 5.4.3, on vérifie qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant, que l'on appellera *énoncé local* : pour tout $u \in \mathcal{X}$ et tout $y \in \mathcal{Y}^{an}$ tels que $\varphi(u) = \rho_{\mathcal{Y}}(y)$, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},u} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\varphi(u)}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y} \longrightarrow \prod_{x \in \rho_{\mathcal{X}}^{-1}(u) \cap (\varphi^{an})^{-1}(y)} \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an},x}$$

est un isomorphisme.

La question étant locale sur $\mathcal{Y}$, on peut supposer que $\mathcal{Y}$ est affine. Puisque φ est fini, $\mathcal{X}$ est également affine. Il existe donc des $\mathcal{A}$ -algèbres A et B telles que $X = \text{Spec}(A)$ et $\mathcal{Y} = \text{Spec}(B)$. En outre, $\varphi^\sharp : B \rightarrow A$ munit A d'une structure de B -module de type fini. Soit $B[T_1, \dots, T_k] \rightarrow A$ un morphisme de B -algèbres surjectif. Montrons l'énoncé souhaité par récurrence sur k .

Supposons que $k = 0$. Alors φ est une immersion fermée et il va de même pour φ^{an} , d'après la proposition 6.5.3. Soient $y \in \mathcal{Y}^{an}$ et $u \in X$ tels que $\varphi(u) = \rho_{\mathcal{Y}}(y)$. D'après le lemme 6.5.2, on a $y \in \varphi^{an}(\mathcal{X}^{an})$. Notons $x \in \mathcal{X}^{an}$ l'unique point tel que $\varphi^{an}(x) = y$. On a alors $\rho_{\mathcal{X}}(x) = u$. Il découle de la construction de l'analytifié (cf. théorème 4.1.4) que si $\mathcal{X}$ est défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{Y}$, alors $\mathcal{X}^{an}$ est défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an}}$. On en déduit que

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},u} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho_{\mathcal{Y}}(y)}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an},x},$$

ce qui n'est autre que l'énoncé local souhaité.

Supposons que $k \geq 1$ et que l'énoncé est vrai pour $k-1$. Notons A_{k-1} l'image de $B[T_1, \dots, T_{k-1}]$ par la surjection $B[T_1, \dots, T_k] \rightarrow A$ et posons $\mathcal{X}_{k-1} := \text{Spec}(A_{k-1})$. L'inclusion $A_{k-1} \rightarrow A$ induit un morphisme de schémas $\psi : X \rightarrow X_{k-1}$ et le morphisme φ se factorise sous la forme $\varphi = \psi' \circ \psi$ avec $\psi' : X_{k-1} \rightarrow Y$. Par hypothèse de récurrence, ψ' satisfait l'énoncé local. Il suffit de démontrer que ψ le satisfait également.

Par construction, il existe une surjection $A_{k-1}[S] \rightarrow A$. Puisque A est un A_{k-1} -module de type fini, il existe un polynôme unitaire $P \in A_{k-1}[S]$ tel que cette surjection se factorise par $A_{k-1}[S]/(P) \rightarrow A$. Puisque B est une $\mathcal{A}$ -algèbre de présentation finie, il existe un morphisme de $\mathcal{A}$ -algèbres surjectif $\mathcal{A}[S_1, \dots, S_n] \rightarrow A_{k-1}$. On notera encore P un relèvement unitaire de P à $\mathcal{A}[S_1, \dots, S_n][S]$. Soit Z_P le sous-schéma fermé de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1, \text{an}}$ défini par P . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z_P \\ \downarrow \psi & & \downarrow \pi_{n+1, n} \\ X_{k-1} & \longrightarrow & \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}, \end{array}$$

où les morphismes $X \rightarrow Z_P$ et $X_k \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ sont des immersions fermées et le morphisme $\pi_{n+1, n}: Z_P \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ est la restriction à Z_P de la projection sur les n premiers facteurs. On vérifie qu'il suffit de démontrer l'énoncé local pour le morphisme $\pi_{n+1, n}$. Ce dernier découle du lemme 5.2.3. $\square$

6.6. D'un schéma à son analytifié : platitude et conséquences

Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. L'objet de cette section est de démontrer que le morphisme $\rho_{\mathcal{X}}: \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ est plat. Il s'agit d'un résultat essentiel pour les applications. En géométrie complexe, il est par exemple utilisé dans la preuve du théorème GAGA de J. P. Serre (cf. [Ser56]).

Nous aurons besoin d'imposer des propriétés supplémentaires sur l'anneau $\mathcal{A}$, permettant de relier ses localisés algébriques et analytiques. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle définition.

Définition 6.6.1. — On dit que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un *anneau de Dedekind analytique* s'il satisfait les propriétés suivantes :

- i) $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind ;
- ii) $\mathcal{A}$ est un anneau de base géométrique ;
- iii) le morphisme $\rho: \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ est surjectif ;
- iv) pour tout $a \in \text{Spec}(\mathcal{A})$,
 - α) si $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}), a}$ est un corps, alors pour tout $b \in \rho^{-1}(a)$, $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}), b}$ est un corps ;

$\beta)$ si $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),a}$ est un anneau de valuation discrète, alors $\rho^{-1}(a)$ contient un unique point, disons b , $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),b}$ est un anneau de valuation discrète et le morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),a} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),b}$ induit par $\rho^\sharp$ est le morphisme de complétion.

Remarque 6.6.2. — Supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Soit $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),b}$ soit un anneau de valuation discrète. Alors le point b est isolable. En effet, d'après iv), $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),\rho(b)}$ est un anneau de valuation discrète, et on peut donc isoler $\rho(b)$ dans $\text{Spec}(\mathcal{A})$ en utilisant une uniformisante ϖ de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),\rho(b)}$. D'après iv), $\rho^\sharp(\varpi)$ isole encore b dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Exemple 6.6.3. — Nos exemples usuels 1.1.16 à 1.1.21 : les corps valués, l'anneau $\mathbf{Z}$ et les anneaux d'entiers de corps de nombres, les corps hybrides, les anneaux de valuation discrète et les anneaux de Dedekind trivialement valués sont tous des anneaux de Dedekind analytiques.

Nous supposons désormais que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique.

Commençons par un cas particulier du résultat à démontrer.

Proposition 6.6.4. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n}(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, x}$ induit par $\rho_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n}^\sharp$ est plat.

Démonstration. — Posons $\rho := \rho_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}}$. Démontrons l'énoncé par récurrence sur n .

Supposons que $n = 0$. Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{A}_{\rho(x)}$ est un corps, alors le morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),\rho(x)} = \mathcal{A}_{\rho(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),x}$ est plat. Si $\mathcal{A}_{\rho(x)}$ est un anneau de valuation discrète, alors le morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),\rho(x)} = \mathcal{A}_{\rho(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),x}$ est le morphisme de complétion. Il est donc encore plat.

Supposons que $n \geq 1$ et que le résultat vaut pour $n - 1$. Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Notons $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de $\mathcal{A}$ correspondant à la projection de $\rho(x)$ sur $\text{Spec}(\mathcal{A})$. Le point $\rho(x)$ correspond alors à un idéal premier $\mathfrak{p}_x$ de $\text{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q})[T_1, \dots, T_n]$.

Si $\mathfrak{p}_x = (0)$ et $\mathfrak{q} = (0)$, alors $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(x)}$ est un corps, donc $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, x}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(x)}$.

Si $\mathfrak{p}_x = (0)$ et $\mathfrak{q} \neq (0)$, alors $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(x)}$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal engendré par $\mathfrak{q}$. D'après le corollaire 1.5.13, le morphisme de projection $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est ouvert, donc, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, l'image de $\mathfrak{q}^m$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, x}$ n'est pas nulle. On en déduit que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, x}$ est injectif. Or, d'après le théorème 1.6.28, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, x}$ est intègre. Par conséquent, il est sans $\mathfrak{q}$ -torsion, et donc plat sur $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(x)}$.

Supposons désormais que $\mathfrak{p}_x \neq (0)$. Notons $\mathfrak{p}'_x$ l'idéal de $\text{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q})[T_1, \dots, T_n]$ correspondant à $\rho(x)$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que

$$\mathfrak{p}'_x \cap \text{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q})[T_1, \dots, T_k] = \{0\}$$

et $\kappa(\rho(x))$ soit une extension finie de $\text{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q})(T_1, \dots, T_k)$.

Notons $x_{n-1} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$ la projection de x sur les $n-1$ premières coordonnées. Son image canonique $\rho(x_{n-1})$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1}$ est l'image de $\rho(x)$ par la projection sur les $n-1$ premières coordonnées. Par construction, le morphisme naturel $\kappa(\rho(x_{n-1}))[T_n] \rightarrow \kappa(\rho(x))$ n'est pas injectif. Notons $P \in \kappa(\rho(x_{n-1}))[T_n]$ un générateur unitaire de son noyau et d le degré de ce polynôme. Soient $\tilde{P}$ un relevé de P à $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1}, \rho(x_{n-1})}[T_n]$ unitaire de degré d . Soit $U = \text{Spec}(B)$ un voisinage affine de $\rho(x_{n-1})$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1}$ sur lequel tous les coefficients de $\tilde{P}$ sont définis.

Procédons comme dans la preuve du corollaire 3.2.5. Considérons le schéma $\mathbf{A}_B^2$ muni des coordonnées T_n et T . Notons $p_1: \mathbf{A}_B^2 \rightarrow \mathbf{A}_B^1$ (resp. $p_2: \mathbf{A}_B^2 \rightarrow \mathbf{A}_B^1$) le morphisme de projection sur $\mathbf{A}_B^1$ muni de la coordonnée T (resp. T_n). Notons $\varphi_{\tilde{P}}: \mathbf{A}_B^1 \rightarrow \mathbf{A}_B^1$ le morphisme induit par le morphisme naturel

$$B[T] \longrightarrow B[T, T_n]/(\tilde{P}(T_n) - T) \xrightarrow{\sim} B[T_n]$$

et σ la section de p_2 induite par le morphisme de B -algèbres

$$\begin{array}{ccc} B[T, T_n] & \longrightarrow & B[T_n] \\ T & \longmapsto & \tilde{P}(T_n) \\ T_n & \longmapsto & T_n \end{array} .$$

On a alors $p_1 \circ \sigma = p_2$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A}_B^2 & \\ & \swarrow p_1 \quad \searrow p_2 & \\ \mathbf{A}_B^1 & \xleftarrow{\varphi_{\tilde{P}}} & \mathbf{A}_B^1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sigma \\ \curvearrowright \end{array}$$

Notons Z le fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^2$ défini par $\tilde{P}(T_n) - T$. La projection p_2 induit un isomorphisme entre Z et $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^1$ dont l'inverse est la section σ .

Le morphisme

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{P}}: \quad \mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1}^d &\longrightarrow (p_1)_* \mathcal{O}_Z \\ (a_0(T), \dots, a_{d-1}(T)) &\longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i(T) T_n^i \end{aligned}$$

est un isomorphisme, dont l'inverse est le reste de la division euclidienne par $\tilde{P}(T_n) - T$. En composant par l'isomorphisme $(p_1)_* \mathcal{O}_Z \rightarrow (p_1)_* \sigma_* \mathcal{O}_Z = (\varphi_{\tilde{P}})_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1}$ induit par $\sigma^\sharp$, on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi': \quad \mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1}^d &\longrightarrow (\varphi_{\tilde{P}})_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1} \\ (a_0(T), \dots, a_{d-1}(T)) &\longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\tilde{P}(T_n)) T_n^i. \end{aligned}$$

Considérons $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ avec coordonnées $(T_1, \dots, T_{n-1}, S)$ et $\pi_{n,n-1}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$ la projection sur les $n-1$ premières coordonnées. Notons $0_{x_{n-1}} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ le point 0 de la fibre $\pi_{n,n-1}^{-1}(x_{n-1}) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x_{n-1})}^{1,\text{an}}$. Par construction, on a $\varphi_{\tilde{P}}^{-1}(\rho(0_{x_{n-1}})) = \{\rho(x)\}$ et le morphisme $\psi_{\tilde{P}}$ induit donc un isomorphisme entre de germes

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1, \rho(0_{x_{n-1}})}^d \rightarrow ((\varphi_{\tilde{P}})_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1})_{\rho(0_{x_{n-1}})} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1, \rho(x)}.$$

En analytifiant la construction, on obtient un morphisme de germes

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}, 0_{x_{n-1}}}^d \rightarrow ((\varphi_{\tilde{P}}^{\text{an}})_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}})_{0_{x_{n-1}}},$$

et le corollaire 3.2.5 assure que c'est un isomorphisme.

Or, x est un antécédent de $0_{x_{n-1}}$ par $\varphi_{\tilde{P}}^{\text{an}}$, donc, d'après la proposition 5.1.9, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}, x}$ est un facteur de $((\varphi_{\tilde{P}}^{\text{an}})_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}})_{0_{x_{n-1}}}$. Par conséquent, pour montrer que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1, \rho(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}, x}$ est plat, il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1, \rho(x)} \rightarrow ((\varphi_{\tilde{P}}^{\text{an}})_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}})_{0_{x_{n-1}}}$ l'est. Grâce aux isomorphismes obtenus précédemment, cela revient encore à montrer que le morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_B^1, \rho(0_{x_{n-1}})} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(0_{x_{n-1}})} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, 0_{x_{n-1}}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}} \times_{\mathcal{A}} U^{\text{an}}, 0_{x_{n-1}}}$$

est plat.

Pour ce faire, il suffit de montrer que le morphisme induit entre les complétés T_n -adiques est plat. Or, ces complétés sont respectivement isomorphes à $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho(x_{n-1})}[[T_n]]$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}, x_{n-1}}[[T_n]]$ (d'après la proposition 1.4.8 pour le second). L'hypothèse de récurrence permet de conclure. $\square$

Théorème 6.6.5. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{X}^{an}$, le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}}(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an}, x}$ induit par $\rho_{\mathcal{X}}$ est plat.

Démonstration. — Quitte à localiser au voisinage de $\rho(x)$, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est un sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n$. Par construction de l'analytifié (cf. théorème 4.1.4), on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{X, x} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}}(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho_{\mathcal{X}}(x)}} \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, an}, x}.$$

Or, d'après la proposition 6.6.4, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, an}, x}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n, \rho_{\mathcal{X}}(x)}$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Remarque 6.6.6. — Rappelons qu'un morphisme local d'anneaux locaux qui est plat est automatiquement fidèlement plat (cf. [Sta20, lemma 00HR] par exemple). Le morphisme du théorème 6.6.5 est donc fidèlement plat.

Corollaire 6.6.7. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Le foncteur qui à un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules $\mathcal{F}$ associe le faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an}}$ -modules $\mathcal{F}^{an}$ est exact et fidèle. $\square$

Corollaire 6.6.8. — Soit $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme entre schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Soit $x \in \mathcal{X}^{an}$. Si le morphisme φ^{an} est plat en x , alors le morphisme φ est plat en $\rho_{\mathcal{X}}(x)$.

Démonstration. — Le résultat découle du théorème 6.6.5 et de [Sta20, lemma 039V]. $\square$

Il est très vraisemblable que la réciproque du corollaire 6.6.8 soit vraie, mais nous ne savons pas la démontrer en général. Nous énonçons cependant maintenant quelques cas particuliers intéressants.

Proposition 6.6.9. — Soit $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme fini entre schémas localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$ et soit $y \in \mathcal{Y}^{an}$.

- i) Le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}}(y)}$ -module $(\varphi_* \mathcal{F})_{\rho_{\mathcal{Y}}(y)}$ est sans torsion si, et seulement si, le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an}, y}$ -module $(\varphi_*^{an} \mathcal{F}^{an})_y$ est sans torsion.
- ii) Soit $u \in \varphi^{-1}(\rho_{\mathcal{Y}}(y))$. Le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}}(y)}$ -module $\mathcal{F}_u$ est plat si, et seulement si, pour tout $x \in (\varphi^{an})^{-1}(y) \cap \rho_{\mathcal{X}}^{-1}(u)$, le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an}, y}$ -module $\mathcal{F}_x^{an}$ est plat.

Démonstration. — Pour alléger l'écriture, on notera indifféremment ρ les deux morphismes $\rho_{\mathcal{X}}$ et $\rho_{\mathcal{Y}}$.

i) D'après le théorème 6.6.5, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}$. Puisque φ est fini, $(\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}$ -module de présentation finie. D'après [Bou06a, I, §2, n° 10, proposition 11] et la proposition 6.5.7, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}}((\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)}, (\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y} \\ & \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}}((\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}, (\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}) \\ & \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}}((\varphi_*^{\text{an}}\mathcal{F}^{\text{an}})_y, (\varphi_*^{\text{an}}\mathcal{F}^{\text{an}})_y). \end{aligned}$$

Or, l'idéal de torsion de $(\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)}$ s'identifie au noyau du morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}}((\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)}, (\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)})$$

et de même pour $(\varphi_*^{\text{an}}\mathcal{F}^{\text{an}})_y$. Le résultat découle donc de la fidèle platitude de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}$.

ii) Quitte à restreindre $\mathcal{X}$, on peut supposer que $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = \{u\}$. Dans ce cas, on a $(\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)} \simeq \mathcal{F}_u$ et, d'après la proposition 5.1.9,

$$(\varphi_*^{\text{an}}\mathcal{F}^{\text{an}})_y \simeq \prod_{x \in (\varphi^{\text{an}})^{-1}(y)} \mathcal{F}_x^{\text{an}}.$$

En outre, d'après la proposition 6.5.7, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}} (\varphi_*\mathcal{F})_{\rho(y)} \simeq (\varphi_*^{\text{an}}\mathcal{F}^{\text{an}})_y.$$

Le résultat découle alors de la fidèle platitude de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^{an},y}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\rho(y)}$ par [Bou06a, I, §3, n° 3, proposition 6]. $\square$

Proposition 6.6.10. — *Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Notons $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ le morphisme structural. Soit $x \in \mathcal{X}^{an}$. Le morphisme π est plat en $\rho_{\mathcal{X}}(x)$ si, et seulement si, le morphisme π^{an} est plat en x .*

Démonstration. — Posons $\rho := \rho_{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),\pi(\rho(x))}$ est un corps, alors $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi^{an}(x)}$ l'est aussi et le résultat est immédiat.

Supposons que $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A}),\pi(\rho(x))}$ est un anneau de valuation discrète. Fixons-en une uniformisante ϖ . Par hypothèse, $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}),\pi^{an}(x)}$ est encore un anneau de valuation discrète d'uniformisante ϖ . Il suffit de montrer que ϖ divise 0 dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\rho(x)}$ si, et seulement si, ϖ divise 0 dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an},x}$, autrement dit, que la multiplication par ϖ est injective dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\rho(x)}$ si, et seulement si, elle l'est dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an},x}$. Ce résultat découle de la fidèle platitude du morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\rho(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{an},x}$ (cf. théorème 6.6.5). $\square$

Démontrons finalement un résultat sur la dimension. Commençons par un lemme préliminaire.

Lemme 6.6.11. — *Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme fini et ouvert d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Soit $x \in X$ et supposons que Y est intègre en $\varphi(x)$. Notons $U_1, \dots, U_s$ les composantes locales de X en x . Alors il existe $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, un voisinage ouvert U'_i de x dans U_i et un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ dans Y tels que le morphisme $U'_i \rightarrow V$ induit par φ soit fini et ouvert en x .*

Démonstration. — Par définition des composantes locales, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que les U_i soit des fermés analytiques de U dont la réunion recouvre U . Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, notons $\mathcal{J}_i$ l'idéal de U_i . D'après les lemmes 6.1.7 et 6.1.3, $\mathcal{J}_{i,x}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$. D'après le corollaire 5.5.6, on a $\sqrt{(0)} = \bigcap_{i=1}^s \mathcal{J}_{i,x}$.

Remarquons que le morphisme $\varphi_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit par $\varphi^\sharp$ est injectif. Puisque φ ouvert et que $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ est intègre, cela découle du corollaire 5.5.6. On en déduit que

$$(0) = (\varphi_x^\sharp)^{-1}(\sqrt{(0)}) = \bigcap_{i=1}^s (\varphi_x^\sharp)^{-1}(\mathcal{J}_{i,x}).$$

D'après la partie unicité du théorème 6.1.6, il existe $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que $(\varphi_x^\sharp)^{-1}(\mathcal{J}_{i,x}) = (0)$.

Par construction, le morphisme $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i,x}$ induit par $\varphi^\sharp$ est encore injectif. Quitte à restreindre U_i , on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ dans Y tel que le morphisme $\psi: U_i \rightarrow V$ induit par φ soit fini. Quitte à restreindre encore, on peut supposer que $\psi^{-1}(\psi(x)) = \{x\}$. On a alors un isomorphisme $(\psi_* \mathcal{O}_{U_i})_{\psi(x)} \simeq \mathcal{O}_{U_i,x}$ et la proposition 5.6.2 assure que ψ est ouvert en x . $\square$

Théorème 6.6.12. — *Supposons que $\dim(\mathcal{A}) = 1$. Soient $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$ et x un point de $\mathcal{X}^{an}$. On a $\dim_x(\mathcal{X}^{an}) = \dim_{\rho_{\mathcal{X}}(x)}(\mathcal{X})$.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer le résultat pour chaque composante irréductible de $\mathcal{X}$. On peut donc supposer que $\mathcal{X}$ est irréductible. Quitte à le réduire et à localiser au voisinage de $\rho_{\mathcal{X}}(x)$, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est intègre et affine. Il existe alors une $\mathcal{A}$ -algèbre intègre $\mathcal{A}'$ telle que $\mathcal{X} = \text{Spec}(\mathcal{A}')$. Notons $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ le morphisme structural. Distinguons deux cas.

- Supposons que le morphisme $\pi^\sharp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ n'est pas injectif.

Notons $\mathfrak{p}$ le noyau de $\pi^\sharp$. Par hypothèse, le fermé défini par $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un singleton. Puisque l'espace $\mathcal{X}$ et son analytifié se projettent sur ce singleton, on a $v_x(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}) = 0$ et on est ramenés à la théorie classique de la dimension sur un corps valué. Le résultat est alors bien connu.

- Supposons que le morphisme $\pi^\sharp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est injectif.

Alors le morphisme $\pi^\sharp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est plat, puisque $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind. En particulier, on a

$$\dim(\mathcal{A}') = \dim(\mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} K) + \dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} K) + 1,$$

où $K := \mathrm{Frac}(\mathcal{A})$.

Posons $n := \dim(\mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} K)$. Le lemme de normalisation de Noether assure qu'il existe un morphisme injectif $K[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} K$ qui fait de $\mathcal{A}'$ un $K[T_1, \dots, T_n]$ -module fini. On en déduit qu'il existe $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ et un morphisme injectif $\mathcal{A}_f[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_f$ qui fait de $\mathcal{A}'$ un $\mathcal{A}_f[T_1, \dots, T_n]$ -module fini. Le morphisme associé $\varphi: \mathrm{Spec}(\mathcal{A}') \times_{\mathcal{A}} \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_f) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^n \times_{\mathcal{A}} \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_f)$ est alors un morphisme fini sans torsion. Notons B_f l'ouvert de $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ défini par l'inégalité $f \neq 0$. D'après la proposition 6.6.9, le morphisme induit $\varphi^{\mathrm{an}}: \mathcal{X}_f^{\mathrm{an}} := \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{A}} B_f \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \mathrm{an}} \times_{\mathcal{A}} B_f$ est également fini et sans torsion. D'après la proposition 5.6.2, il est ouvert.

Notons $U_1, \dots, U_s$ les composantes locales de $\mathcal{X}_f^{\mathrm{an}}$ en x et $U := \bigcup_{i=1}^s U_i$. Quitte à restreindre U et les U_i , on peut supposer qu'il existe un ouvert V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \mathrm{an}} \times_{\mathcal{A}} B_f$ tel que le morphisme $\psi: U \rightarrow V$ induit par φ^{an} soit fini. La théorie de la dimension sur un corps valué assure que, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on a

$$\dim_x(U_i) = \dim_x(U_i/B) + v_x(U_i) \leq n + 1.$$

En outre, d'après le lemme 6.6.11, il existe $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que le morphisme $\psi_j: U_j \rightarrow V$ induit par ψ soit fini et ouvert en x . On en déduit que $v_x(U_j) = 1$ et que $\dim_x(U_j) = n$, donc que $\dim_x(U_j) = n + 1$. Ceci montre finalement que

$$\dim_x(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}) = \dim_x(U) = n + 1 = \dim(\mathcal{A}) = \dim_{\rho_{\mathcal{X}}(x)}(\mathcal{X}).$$

□

Remarque 6.6.13. — Si $\mathcal{A} = k$ est un corps valué, le résultat $\dim_x(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}) = \dim_{\rho_{\mathcal{X}}(x)}(\mathcal{X})$ vaut encore, par la théorie classique.

En revanche, il tombe en défaut lorsque $\mathcal{A} = \mathbf{C}^{\mathrm{hyb}}$ (cf. exemple 1.1.19). Dans ce cas, $\mathcal{X}$ est un schéma de présentation finie sur $\mathbf{C}$. Posons $B = \mathcal{M}(\mathbf{C}^{\mathrm{hyb}})$. Soit

$x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Notons b l'image de x par le morphisme structural $\pi^{\text{an}}: \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow B$. L'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ s'identifie au corps $\mathbf{C}$, donc le morphisme $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\text{an}},x}$ est plat et, d'après la proposition 6.4.1, le morphisme π^{an} est ouvert en x . On en déduit que $\mathcal{X}^{\text{an}}$ n'est pas vertical en x , et donc que $v_x(\mathcal{X}^{\text{an}}) = 1$. Par ailleurs, d'après le lemme 6.5.2, la fibre $(\pi^{\text{an}})^{-1}(b)$ s'identifie à l'analytifié de $\mathcal{X}$ sur le corps valué $\mathcal{H}(b)$ (qui n'est autre que le corps $\mathbf{C}$ muni d'une valeur absolue de la forme $|\cdot|_{\infty}^{\varepsilon}$ ou $|\cdot|_0$), et la théorie classique de la dimension assure que $\dim_x((\pi^{\text{an}})^{-1}(b)) = \dim_{\rho_{\mathcal{X}}(x)}(\mathcal{X})$. On obtient finalement l'égalité

$$\dim_x(\mathcal{X}^{\text{an}}) = \dim_{\rho_{\mathcal{X}}(x)}(\mathcal{X}) + 1.$$

CHAPITRE 7

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES ESPACES ANALYTIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions certaines propriétés topologiques des espaces analytiques.

La section 7.1 traite de topologie générale. Nous y introduisons la notion d'espace élastique, qui renforce celle d'espace connexe par arcs (*cf.* définition 7.1.2).

Dans la section 7.2, nous démontrons que les espaces analytiques sont localement connexes par arcs (*cf.* théorème 7.2.17). Comme on s'y attend, nous étudions d'abord les espaces affines analytiques, cas dans lequel nous pouvons exhiber des sections explicites de la projection (*cf.* lemme 7.2.4). Le cas général s'y réduit, par normalisation de Noether.

Pour finir, dans la section 7.3, nous calculons la dimension topologique, plus précisément la dimension de recouvrement, des espaces affines analytiques, ainsi que des disques (*cf.* théorème 7.3.7). Le calcul de la dimension des fibres est classique, mais, les espaces que nous considérons n'étant, en général, pas métrisables, le passage à l'espace total requiert quelques précautions.

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de base géométrique. Posons $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

7.1. Espaces élastiques

Dans cette section, nous regroupons quelques résultats de topologie générale qui vont nous être utiles pour montrer que les espaces affines, puis les espaces analytiques quelconques, sont localement connexes par arcs. Nous introduisons notamment la notion d'espace élastique.

Commençons par montrer un résultat de modération du nombre de composantes connexes.

Proposition 7.1.1. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application finie et ouverte entre espaces topologiques. Supposons que Y est connexe. Alors X possède un nombre fini de composantes connexes et la restriction de f à chacune d'elle est surjective.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Notons $\mathcal{OF}_x$ l'ensemble des parties ouvertes et fermées de X qui contiennent x et posons $OF_x := \bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} U$. Montrons que

$$\bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U) = f(OF_x).$$

L'inclusion $f(OF_x) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U)$ est évidente. Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U)$. Notons $x_1, \dots, x_n$ les éléments de $f^{-1}(y)$. Supposons, par l'absurde, que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $U_i \in \mathcal{OF}_x$ tel que $x_i \notin U_i$. On a alors $(\bigcap_{i=1}^n U_i) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$. Or, toute intersection finie de parties ouvertes et fermées est encore ouverte et fermée, donc $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{OF}_x$, ce qui est absurde car y appartient à $\bigcap_{U \in \mathcal{OF}_x} f(U)$. Par conséquent, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que x_i appartienne à tous les éléments de $\mathcal{OF}_x$ et donc à OF_x . On en déduit que y appartient à $f(OF_x)$.

Pour tout $U \in \mathcal{OF}_x$, $f(U)$ est ouvert, fermé et non vide, donc égal à Y , puisque Y est connexe. Ainsi, par ce qui précède, on en déduit que $f(OF_x) = Y$.

Montrons maintenant que les ensembles OF_x forment une partition de X . Soient $x, x' \in X$.

Supposons que $x' \notin OF_x$. Alors il existe un ouvert fermé U contenant x tel que x' n'appartienne pas à U . Dans ce cas $X \setminus U$ est un ouvert fermé qui contient x' et ne contient pas x . On en déduit que $OF_x \cap OF_{x'} = \emptyset$.

Supposons que $x' \in OF_x$. Alors tout ouvert fermé qui contient x contient x' donc $OF_{x'} \subset OF_x$. D'après ce qui précède, cela implique que $x \in OF_{x'}$, et finalement que $OF_x = OF_{x'}$. La propriété annoncée s'ensuit.

Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in X$, on a $f(OF_x) = Y$, donc il existe $z \in f^{-1}(y)$ tel que $z \in OF_x$, ce qui entraîne $OF_z = OF_x$. On en déduit l'égalité

$$X = \bigsqcup_{z \in f^{-1}(y)} OF_z.$$

Soit $z \in f^{-1}(y)$. L'ensemble OF_z est intersection de fermés, donc fermé. En écrivant OF_z comme le complémentaire de la réunion (finie) des $OF_{z'}$, pour $z' \in f^{-1}(y) \setminus \{z\}$, on montre que OF_z est ouvert.

Montrons que OF_z est connexe, ce qui permettra de conclure. Soient A et B des ouverts disjoints de OF_z de réunion égale à OF_z . On peut supposer que $z \in A$. Dans ce cas, on a $A \in \mathcal{OF}_z$, donc $OF_z \subset A$, et finalement $OF_z = A$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Nous souhaiterions disposer d'un résultat analogue au précédent mais concernant cette fois-ci la connexité par arcs. Pour l'obtenir, nous aurons besoin d'imposer une condition plus forte sur l'espace d'arrivée. Nous l'introduisons ici.

Définition 7.1.2. — Soit X un espace topologique.

Soient $x, y \in X$. On dit qu'une partie ℓ de X est un *chemin reliant* x à y s'il existe une application continue surjective $\varphi: [0, 1] \rightarrow \ell$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$.

Soit ℓ un chemin reliant x à y . Le chemin ℓ est dit *élastique en* y si, pour tout voisinage U de ℓ , il existe un voisinage V de y tel que, pour tout $y' \in V$, il existe un chemin de x à y' contenu dans U . Le chemin ℓ est dit *élastique* s'il est élastique en x et en y .

L'espace X est dit *connexe par arcs* (resp. *élastique*) si, pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin (resp. chemin élastique) reliant x à y .

Remarque 7.1.3. — i) Pour montrer qu'un espace X est élastique, il suffit de montrer qu'il est connexe par arcs et que, pour tout point x de X , il existe un chemin d'origine x qui est élastique en x . La preuve consiste en un simple argument basé sur la concaténation des chemins.

ii) Tout espace connexe et localement connexe par arcs est élastique. De même, tout espace contractile est élastique. La notion d'espace élastique est cependant plus générale. En effet, il existe des espaces connexes et localement connexes par arcs mais non contractiles (par exemple le cercle) ainsi que des espaces contractiles non localement connexes par arcs (par exemple la réunion des droites du plan réel de pente rationnelle passant par 0).

Exemple 7.1.4. — L'exemple qui suit montre que les notions d'espaces élastique et connexe par arcs sont distinctes.

Notons $G_{\sin(1/x)}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ constitué du graphe de $\sin(1/x)$ sur $]0, 1/\pi]$. Considérons l'espace topologique X formé de la réunion de l'adhérence $\overline{G_{\sin(1/x)}}$ de $G_{\sin(1/x)}$ dans $\mathbf{R}^2$ et d'un chemin ℓ_0 reliant le point y_0 de coordonnées $(0, -1)$ au point x_0 de coordonnées $(1/\pi, 0)$, de sorte que $\ell \cap \overline{G_{\sin(1/x)}} = \{x_0, y_0\}$ (cf. figure 7). Cet espace est connexe par arcs.

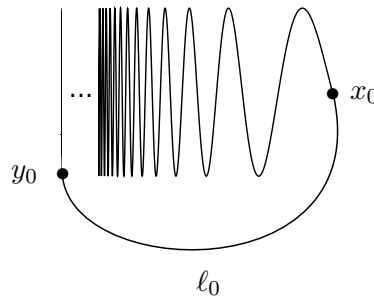


FIGURE 7. Un espace connexe par arcs non élastique.

Soit ℓ un chemin reliant x_0 à y_0 . Tout voisinage de y_0 contient un point de $G_{\sin(1/x)}$ avec une abscisse strictement positive très petite. Un tel point ne peut être relié à x_0 dans aucun voisinage assez petit du chemin ℓ (cf. figure 8).

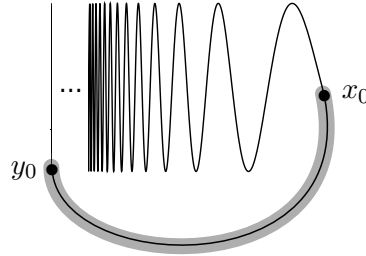


FIGURE 8. Un voisinage d'un chemin de x_0 à y_0 .

Par conséquent, le chemin ℓ n'est pas élastique en y_0 et l'espace topologique X n'est donc pas élastique.

Ajoutons que des exemples de ce type peuvent apparaître dans l'étude des espaces de Berkovich généraux. En effet, tout espace compact K peut être réalisé comme spectre d'anneau de Banach $\mathcal{A}$, par exemple en choisissant pour $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathcal{C}(K, \mathbf{C})$ des fonctions continues de K dans $\mathbf{C}$ munie de la

norme uniforme. (Le corps $\mathbf{C}$ est ici muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$.) Il est donc nécessaire d'imposer des restrictions sur les anneaux $\mathcal{A}$ considérés.

La proposition suivante reprend [Ber90, lemma 3.2.5]. Nous en rappelons la démonstration pour apporter quelques précisions.

Proposition 7.1.5. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application finie et ouverte entre espaces topologiques. Supposons que X et Y sont connexes, que X est séparé et que Y est élastique. Alors X est connexe par arcs.*

Démonstration. — Soit ℓ un chemin de Y . Soit $\mathcal{U}$ une base d'ouverts de ℓ qui engendre sa topologie. Nous pouvons supposer que $\mathcal{U}$ est dénombrable. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, l'application $f^{-1}(U) \rightarrow U$ induite par f est encore finie et ouverte. La proposition 7.1.1 assure alors que $f^{-1}(U)$ a un nombre fini de composantes connexes. Celles-ci sont donc ouvertes. Notons $\mathcal{C}_U$ l'ensemble des composantes connexes de $f^{-1}(U)$. L'ensemble $\mathcal{C} := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}_U$ est alors dénombrable et, d'après le lemme 5.1.3, il engendre la topologie de $f^{-1}(\ell)$.

D'après le lemme 4.4.5, $f^{-1}(\ell)$ est compact. D'après [Bou74, IX, §2, n° 9, proposition 16] il est donc métrisable. Puisque les éléments de $\mathcal{C}$ sont connexes, $f^{-1}(\ell)$ est localement connexe. D'après [Bou16, III, §2, n° 4, corollaire 2 de la proposition 11], $f^{-1}(\ell)$ est donc localement connexe par arcs. En particulier, les composantes connexes de $f^{-1}(\ell)$ sont compactes et connexes par arcs.

Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que les composantes connexes par arcs de X sont ouvertes. Soit $x \in X$. Posons $y := f(x)$. Soit $y_0 \in Y$. Soit ℓ un chemin reliant y_0 à y qui soit élastique en y . D'après le raisonnement précédent, $f^{-1}(\ell)$ possède un nombre fini de composantes connexes, qui sont compactes et connexes par arcs. Notons-les $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$. On peut supposer que $x \in \Sigma_1$.

Puisque X est séparé, on peut trouver des voisinages $W_1, \dots, W_n$ respectivement de $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ qui soient deux à deux disjoints. D'après le lemme 5.1.3, il existe un voisinage U de ℓ tel que $f^{-1}(U) \subset \bigsqcup_{i=1}^n W_i$.

Soit V un voisinage ouvert de y dans U tel que, pour tout $y' \in V$, il existe un chemin reliant y_0 à y' contenu dans U . Alors $f^{-1}(V) \cap W_1$ est inclus dans la composante connexe par arcs de x . En effet, soit $x' \in f^{-1}(V) \cap W_1$. Il existe un chemin ℓ' reliant y_0 à $y' := f(x')$ contenu dans U . Notons Σ' la composante connexe de $f^{-1}(\ell')$ contenant x' . Elle est connexe par arcs et contenue dans $f^{-1}(U)$, donc dans $\bigsqcup_{i=1}^n W_i$, donc dans W_1 puisqu'elle rencontre W_1 . On a

donc

$$\Sigma' \cap f^{-1}(y_0) \subset W_1 \cap f^{-1}(y_0) = \Sigma_1 \cap f^{-1}(y_0).$$

On en déduit que $\Sigma' \cup \Sigma_1$ est connexe par arcs. Il existe donc un chemin reliant x à x' . Le résultat s'en déduit. $\square$

Remarque 7.1.6. — Il existe un espace topologique connexe par arcs (mais non élastique) admettant un revêtement de degré 2 connexe mais non connexe par arcs. On peut, par exemple, considérer le revêtement de l'espace défini à l'exemple 7.1.4 représenté à la figure 9.

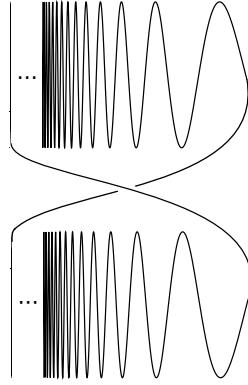


FIGURE 9. Revêtement de degré 2 connexe mais non connexe par arcs d'un espace connexe par arcs non élastique.

Cela permet de justifier l'introduction de la notion d'espace élastique.

Dans le cas où l'espace au but est seulement supposé connexe par arcs, on dispose cependant du résultat suivant.

Proposition 7.1.7. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application finie et ouverte entre espaces topologiques. Supposons que X et Y sont séparés et que Y est connexe par arcs. Alors X possède un nombre fini de composantes connexes par arcs et la restriction de f à chacune d'elles est surjective.*

Démonstration. — Soient $y_1, y_2 \in Y$. Par hypothèse, il existe un chemin ℓ reliant y_1 et y_2 . Puisque Y est séparé, d'après [Bou16, III, §2, n°9, proposition 18], on peut supposer que ℓ est homéomorphe au segment $[0, 1]$. D'après la remarque 7.1.3 ii), l'espace topologique ℓ est alors élastique. Le morphisme $\varphi^{-1}(\ell) \rightarrow \ell$ induit par φ est encore fini et ouvert. D'après la proposition 7.1.1 et la proposition 7.1.5, $\varphi^{-1}(\ell)$ a un nombre fini de composantes connexes et celles-ci se surjectent sur ℓ par φ et sont connexes par arcs.

On en déduit immédiatement que les composantes connexes par arcs de X se surjectent sur Y par f . Puisque les fibres de f sont finies, il ne peut y en avoir qu'un nombre fini. $\square$

Remarque 7.1.8. — L'exemple de la remarque 7.1.6 montre que les composantes connexes par arcs de X peuvent n'être ni fermées ni ouvertes.

Nous allons maintenant énoncer deux critères permettant de montrer l'élasticité de certains espaces topologiques.

Lemme 7.1.9. — Soient X un espace topologique et W un ouvert de X . Supposons que

- i) W et $F := X \setminus W$ sont élastiques ;
- ii) l'ensemble $\partial F := F \setminus \mathring{F}$ n'est pas vide ;
- iii) tout point x de ∂F admet une base de voisinages $\mathcal{U}_x$ dans X telle que pour tout $U \in \mathcal{U}_x$ et tout $y \in W \cap U$, il existe un chemin tracé sur U reliant y à un point de F .

Alors l'espace topologique X est élastique.

Démonstration. — Soit $x \in X$. D'après la remarque 7.1.3, il suffit de montrer qu'il existe un chemin d'origine x qui est élastique en x . Si $x \in W$, la propriété découle du fait que W est ouvert dans X et élastique. Il en va de même si $x \in \mathring{F}$. On peut donc supposer que $x \in \partial F$.

Choisissons un chemin ℓ de F d'origine x et élastique en x en tant que chemin de F . Notons $x_0 \in F$ son autre extrémité.

Soit V un voisinage de ℓ dans X . Le point x possède un voisinage U' dans V tel que, pour tout $x' \in U' \cap F$, il existe un chemin reliant x' à x_0 dans V . Soient U un voisinage de x dans U' appartenant à $\mathcal{U}_x$. Soit $y \in U$. Si $y \in F$, on a déjà vu qu'il existe un chemin reliant y à x_0 dans V . Si $y \in W$, alors il existe un chemin dans U reliant y à un point x' de $U \cap F$. Il existe alors un chemin reliant x' à x_0 dans V , et donc un chemin reliant y à x_0 dans V . Ceci montre que ℓ est élastique en x en tant que chemin de X . $\square$

Lemme 7.1.10. — Soient X un espace topologique et $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces topologiques tels que $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} \mathring{X}_i = X$. Si, pour tout $i \in \mathbf{N}$, l'espace X_i est élastique, alors l'espace X est lui aussi élastique. $\square$

7.2. Connexité par arcs locale

Dans cette section, nous nous intéressons à la connexité par arcs et la connexité par arcs locale des espaces analytiques. Nous commencerons par le cas des espaces affines.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $\pi: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ le morphisme de projection. Fixons des coordonnées $T_1, \dots, T_n$ sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Posons $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_n)$.

Notation 7.2.1. — Soit A un anneau. Pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et tout $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose

$$\mathbf{a}^{\mathbf{i}} := \prod_{m=1}^n a_m^{i_m},$$

avec la convention que $a^0 = 1$, pour tout $a \in A$.

Notation 7.2.2. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Notons $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_n)$ des coordonnées sur $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. On note $\eta_{\mathbf{r}}$ le point de $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ associé à la semi-norme multiplicative

$$\begin{aligned} k[\mathbf{T}] &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ \sum_{\mathbf{i} \geq 0} a_{\mathbf{i}} \mathbf{T}^{\mathbf{i}} &\longmapsto \max_{\mathbf{i} \geq 0} (|a_{\mathbf{i}}| \mathbf{r}^{\mathbf{i}}). \end{aligned}$$

Soit $b \in B_{\text{um}}$. On note $\eta_{b,\mathbf{r}} \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ le point $\eta_{\mathbf{r}}$ de la fibre $\pi^{-1}(b) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$

Rappelons que nous avons introduit une fonction $\varepsilon: B_{\text{arc}} \rightarrow]0, 1]$ (cf. notation 1.2.7).

Notation 7.2.3. — Soit $b \in B_{\text{arc}}$. D'après le théorème 1.2.6 et le lemme 1.2.14, la fibre $\pi^{-1}(b)$ s'identifie à $\mathbf{C}^n$ si $\mathcal{H}(b) = \mathbf{C}$ et à $\mathbf{C}^n / \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ si $\mathcal{H}(b) = \mathbf{R}$ et, dans tous les cas, on a un plongement canonique

$$\rho_b: \mathbf{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(b).$$

Lemme 7.2.4. — Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. L'application

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{r}}: B &\longrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \\ b &\longmapsto \begin{cases} \eta_{b,\mathbf{r}} & \text{si } b \in B_{\text{um}} ; \\ \rho_b(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}) & \text{si } b \in B_{\text{arc}}. \end{cases} \end{aligned}$$

est une section de la projection $\pi: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow B$. Sa restriction à B_{um} et sa restriction à B_{arc} sont continues.

Notons $S := \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : r_i \neq 0\}$. Soit $b_0 \in B$ tel que la famille $(r_i)_{i \in S}$ soit libre dans le $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $\mathbf{R}_{>0}/|\mathcal{H}(b_0)^{\times}|^{\mathbf{Q}}$. Alors $\sigma_{\mathbf{r}}$ est continue en b_0 .

Démonstration. — Il découle directement de la définition de $\sigma_{\mathbf{r}}$ que c'est une section de π .

Rappelons que, par définition de la topologie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, pour montrer que la restriction de $\sigma_{\mathbf{r}}$ à une partie U de B est continue, il suffit de montrer que, pour tout $P \in \mathcal{A}[\mathbf{T}]$, l'application

$$b \in U \mapsto |P(\sigma_{\mathbf{r}}(b))| \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

est continue. Soit $P = \sum_{i \geq 0} a_i \mathbf{T}^i \in \mathcal{A}[\mathbf{T}]$.

Commençons par traiter le cas de la restriction à B_{um} . Pour tout $b \in B_{\text{um}}$, on a

$$|P(\sigma_{\mathbf{r}}(b))| = \max_{i \geq 0} (|a_i(b)| \mathbf{r}^i).$$

Le résultat découle donc de la continuité des fonctions $|a_i|$ (qui sont en nombre fini).

Étudions maintenant la restriction à B_{arc} . Rappelons que B_{arc} est un ouvert de B , d'après la remarque 1.2.5. Soit $b \in B_{\text{arc}}$. Pour tout $b' \in B$, on a

$$\begin{aligned} & \left| |P(\sigma_{\mathbf{r}}(b'))| - |P(\sigma_{\mathbf{r}}(b))| \right| \\ &= \left| |P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b')}))| - |P(\rho_b(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))| \right| \\ &\leq \left| |P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b')}))| - |P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))| \right| + \left| |P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))| - |P(\rho_b(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))| \right|. \end{aligned}$$

Étudions d'abord le second terme de la somme. Rappelons que, d'après la remarque 1.2.15, on a une injection canonique $\gamma_{\mathbf{R}}: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{O}(B_{\text{arc}})$. Pour tout $b' \in B$, on a

$$\left| |P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b')}))| - |P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))| \right| = \left| |P(\gamma_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))(b')| - |P(\gamma_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))(b)| \right|$$

et cette quantité tend donc vers 0 quand b' tend vers b , d'après le lemme 1.2.16.

Étudions maintenant le premier terme de la somme. Il existe un voisinage V de b dans B_{arc} et une constante $M \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall i \geq 0, \forall b' \in V, |a_i(b')| \leq M.$$

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. D'après le lemme 1.2.8, la fonction ε est continue. Quitte à restreindre V , on peut donc supposer que

$$\forall b' \in V, |\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b')} - \mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}| \leq \frac{\alpha}{M}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} ||P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b')})) - P(\rho_{b'}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}))|| &\leq \left| \sum_{i \geq 0} a_i(b')(\mathbf{r}^{1/\varepsilon(b')} - \mathbf{r}^{1/\varepsilon(b)}) \right| \\ &\leq dM \frac{\alpha}{M} \leq d\alpha, \end{aligned}$$

où d est le nombre de coefficients non nuls de P .

On en déduit que $|P(\sigma_{\mathbf{r}}(\cdot))|$ est continue en b , puis que $\sigma_{\mathbf{r}}$ est continue sur B_{arc} .

Démontrons maintenant la dernière partie du résultat. L'hypothèse de liberté entraîne que l'on a

$$\{x \in \pi^{-1}(b_0) : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| = r_i\} = \{\sigma_{\mathbf{r}}(b_0)\}.$$

Soit U un voisinage de $\sigma_{\mathbf{r}}(b_0)$. D'après l'égalité précédente (cf. [Poi10a, lemme 2.4.1] pour les détails), il existe un voisinage V de b_0 dans B et $s_1, t_1, \dots, s_n, t_n \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_i \prec r_i < t_i$, tels que

$$\{x \in \pi^{-1}(V) : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \prec |T_i(x)| < t_i\} \subset U.$$

Or, par définition, pour tout $b \in B$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|T_i(\sigma_{\mathbf{r}}(b))| = r_i$. Par conséquent, $\sigma_{\mathbf{r}}^{-1}(U)$ contient V . On en déduit que $\sigma_{\mathbf{r}}$ est continue en b_0 . $\square$

Introduisons une définition qui nous permettra de tirer profit du lemme 7.2.4.
Définition 7.2.5. — Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow B$ une application continue. Le chemin correspondant à φ est dit *pur* si $\varphi(]0, 1[)$ est entièrement contenu soit dans U_{um} soit dans U_{arc} .

Une partie U de $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite *peu mixte* si

- i) pour tout $b \in \partial U_{\text{um}} = \partial U_{\text{arc}}$, le $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $|\mathcal{H}(b)|^{\times} |^{\mathbf{Q}}$ est de codimension infinie dans $\mathbf{R}_{>0}$;
- ii) pour tous x, y dans la même composante connexe par arcs de U , il existe un chemin reliant x à y qui est concaténation d'un nombre fini de chemins purs.

Remarque 7.2.6. — Le point ii) de la définition de partie peu mixte est satisfait dès que $\partial U_{\text{um}} = \partial U_{\text{arc}}$ est discret.

Exemple 7.2.7. — Si l'anneau de Banach $\mathcal{A}$ est l'un de nos exemples habituels (corps valué, $\mathbf{Z}$ ou anneau d'entiers de corps de nombres, corps hybride, anneau de valuation discrète, anneau de Dedekind trivialement valué, cf. exemples 1.1.16 à 1.1.21), alors toute partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est peu mixte.

Passons maintenant aux résultats de connexité. Nous allons, dans un premier temps, montrer que les polycouronnes relatives dont la base est connexe par arcs sont connexes par arcs. Nous utiliserons ensuite ce résultat pour montrer que ces polycouronnes sont même élastiques. Finalement, nous en déduirons que tout point d'un espace affine analytique admet une base de voisinages connexes par arcs.

Introduisons une notation pour les polycouronnes relatives.

Notation 7.2.8. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Considérons l'espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, avec coordonnées $T_1, \dots, T_n$, et posons $\mathbf{A}_X^{n,\text{an}} := X \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Notons $\pi: \mathbf{A}_X^{n,\text{an}} \rightarrow X$ la première projection. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note encore T_i le tiré en arrière de T_i sur $\mathbf{A}_X^{n,\text{an}}$ par la seconde projection.

Soit U une partie de X . On pose

$$\mathbf{A}_U^{n,\text{an}} := \pi^{-1}(U).$$

Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose

$$\begin{aligned} D_U(\mathbf{t}) &:= \{x \in \mathbf{A}_U^{n,\text{an}} : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| < t_i\} ; \\ \overline{D}_U(\mathbf{t}) &:= \{x \in \mathbf{A}_U^{n,\text{an}} : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| \leq t_i\} ; \\ C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) &:= \{x \in \mathbf{A}_U^{n,\text{an}} : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i < |T_i(x)| < t_i\} ; \\ \overline{C}_U(\mathbf{s}, \mathbf{t}) &:= \{x \in \mathbf{A}_U^{n,\text{an}} : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}. \end{aligned}$$

Lemme 7.2.9. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors $C_{\mathcal{M}(k)}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est connexe par arcs. *Démonstration.* — Nous allons distinguer trois cas, selon le type du corps k considéré.

- Supposons que $k = \mathbf{C}$.

Alors, d'après le lemme 1.2.14, $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ est isomorphe à $\mathbf{C}^n$. Par conséquent, $C_{\mathcal{M}(k)}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est une polycouronne complexe. Elle est donc connexe par arcs.

- Supposons que $k = \mathbf{R}$.

Alors, d'après le lemme 1.2.14, $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ est homéomorphe à $\mathbf{C}^n / \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. Par conséquent, $C_{\mathcal{M}(k)}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est l'image d'une polycouronne complexe par une application continue. Elle est donc également connexe par arcs.

- Supposons que k est ultramétrique.

On renvoie à [Ber90, corollary 3.2.3]. Dans cette référence, V. Berkovich démontre la connexité par arcs du polydisque unité, mais le même raisonnement fonctionne pour une polycouronne fermée quelconque. Le cas d'une polycouronne ouverte s'en déduit en l'écrivant comme union croissante de polycouronnes fermées. $\square$

Proposition 7.2.10. — *Soit U une partie connexe par arcs de B . Supposons que U est peu mixte. Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est connexe par arcs.*

En particulier, $\pi^{-1}(U)$ est connexe par arcs.

Démonstration. — On peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $s_i < t_i$ et $t_i > 0$. En effet, si tel n'est pas le cas, $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est vide et le résultat est immédiat.

Soient $x, y \in C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Puisque U est connexe par arcs, il existe un chemin dans U reliant $\pi(x)$ à $\pi(y)$. Puisque U est peu mixte, on peut trouver un tel chemin ℓ qui s'écrit comme concaténation d'un nombre fini de chemins purs $\ell_1, \dots, \ell_m$.

Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Soit $\varphi_j : [0, 1] \rightarrow U$ l'application continue correspondant au chemin ℓ_j . Posons $a_j := \varphi_j(0)$ et $b_j := \varphi_j(1)$. Montrons que la fibre $\pi^{-1}(a_j)$ peut-être reliée par un chemin à toute fibre au-dessus d'un point de $\varphi_j([0, 1])$. Distinguons trois cas.

- Supposons que $\varphi_j([0, 1]) \subset U_{\text{um}}$.

Alors $a_j \in U_{\text{um}}$. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}_{>0}^n$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $s_i < r_i < t_i$. D'après le lemme 7.2.4, la restriction de la section $\sigma_{\mathbf{r}}$ à $\varphi_j([0, 1])$ est continue. Le résultat s'ensuit.

- Supposons que $\varphi_j([0, 1]) \subset U_{\text{arc}}$ et que $a_j \in U_{\text{arc}}$.

On conclut par le même raisonnement que dans le cas précédent.

- Supposons que $\varphi_j([0, 1]) \subset U_{\text{arc}}$ et que $a_j \in U_{\text{um}}$.

Alors $a_j \in \partial U_{\text{arc}}$. Par hypothèse, il existe $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}_{>0}^n$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $s_i < r_i < t_i$, et $\mathbf{r}$ soit une famille libre de $\mathbf{R}_{>0}/|\mathcal{H}(a_j)^\times|^\mathbf{Q}$. D'après le lemme 7.2.4, la restriction de la section $\sigma_{\mathbf{r}}$ à $\varphi_j([0, 1])$ est encore continue. Le résultat s'ensuit.

On a montré que la fibre $\pi^{-1}(a_j)$ peut-être reliée par un chemin à toute fibre au-dessus d'un point de $\varphi_j([0, 1])$. Le même raisonnement s'applique en remplaçant a_j par b_j et il en découle que les fibres $\pi^{-1}(a_j)$ et $\pi^{-1}(b_j)$ peuvent

être reliées par un chemin. On en déduit que fibres $\pi^{-1}(\pi(x))$ et $\pi^{-1}(\pi(y))$ peuvent être reliées par un chemin.

Pour démontrer le résultat, il suffit maintenant de démontrer que les fibres de π en les points de U sont connexes par arcs. Or, pour tout $b \in U$, on a un homéomorphisme $\pi^{-1}(b) \simeq \mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$, et le résultat découle donc du lemme 7.2.9.

Démontrons maintenant la dernière partie de l'énoncé. Posons $\mathbf{s} := (-1, \dots, -1)$. On obtient le résultat en écrivant $\pi^{-1}(U)$ comme union croissante de polydisques ouverts $D_U(\mathbf{t}) = C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ et en utilisant la première partie. $\square$

Nous allons maintenant déduire du résultat précédent la connexité locale de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$.

Proposition 7.2.11. — *Supposons que B est localement connexe par arcs. Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Le point x admet une base de voisinages ouverts $\mathcal{V}$ telle que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un ouvert connexe par arcs U de B , $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ et un morphisme fini et plat $\varphi: V \rightarrow C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$.*

Démonstration. — Nous allons démontrer l'énoncé par récurrence sur n . Si $n = 0$, le résultat découle directement de la connexité par arcs locale de B .

Soit $n \geq 1$ et supposons avoir démontré le résultat pour $n - 1$. Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Notons $\pi_{n-1}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$ la projection sur les $n - 1$ premières coordonnées et posons $x_{n-1} := \pi_{n-1}(x_n)$. Soit $\mathcal{V}_{n-1}$ une base de voisinages ouverts de x_{n-1} dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. Notons T la dernière coordonnée de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$.

Soit W un voisinage de x . D'après les propositions 1.5.11 et 1.5.12, il existe $V \in \mathcal{V}_{n-1}$, $s, t \in \mathbf{R}$ et $P \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1,\text{an}}}(V)[T]$ tels que $C_V(P, s, t) \subset W$. Puisque $V \in \mathcal{V}_{n-1}$, il existe un ouvert connexe par arcs U de B , $\mathbf{s}' = (s_1, \dots, s_{n-1})$, $\mathbf{t}' = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ et un morphisme fini et plat $\varphi_{n-1}: V \rightarrow C_U(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. D'après le lemme 4.3.1 et la proposition 4.3.3, $\pi_{n-1}^{-1}(V)$ et $\pi_{n-1}^{-1}(C_U(\mathbf{s}', \mathbf{t}'))$ s'identifient respectivement aux produits $V \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ et $C_U(\mathbf{s}', \mathbf{t}') \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$. La proposition 5.6.4 assure donc que le morphisme

$$\varphi_n: \pi_{n-1}^{-1}(V) \longrightarrow \pi_{n-1}^{-1}(C_U(\mathbf{s}', \mathbf{t}'))$$

déduit de φ_{n-1} par changement de base est fini et plat. Posons $\mathbf{s} := (\mathbf{s}', s)$ et $\mathbf{t} := (\mathbf{t}', t)$. Les propriétés de finitude et de platitude étant locales au but, le morphisme $\varphi'_n: C_V(s, t) \rightarrow C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ induit par φ_n est encore fini et plat.

D'après la proposition 5.6.5, le morphisme $\varphi_P: \pi_{n-1}^{-1}(V) \rightarrow \pi_{n-1}^{-1}(V)$ induit par P est fini et plat. Sa restriction $\varphi'_P: C_V(P, s, t) \rightarrow C_V(s, t)$ l'est donc également. Ceci montre que le morphisme $\varphi := \varphi'_n \circ \varphi'_P$ satisfait les conditions de l'énoncé. $\square$

En combinant les propositions 7.2.11 et 7.2.10, le corollaire 5.6.5 et la proposition 7.1.1, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 7.2.12. — *Supposons que B est localement connexe par arcs et peu mixte. Alors, l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ est localement connexe.* $\square$

Nous allons maintenant montrer que l'ensemble $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.

Proposition 7.2.13. — *Supposons que B_{um} est localement connexe par arcs. Soit U un ouvert connexe de B_{um} . Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors, la polycouronne $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.*

Démonstration. — Montrons, par récurrence sur n , que, pour tout ouvert connexe U de B_{um} , et tous $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$, la polycouronne $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.

Pour $n = 0$, le résultat est vrai car tout ouvert connexe de B_{um} est connexe par arcs et localement connexe par arcs, donc élastique, d'après la remarque 7.1.3.

Soit $n \geq 1$ et supposons que le résultat est vrai pour $n - 1$. Soit U un ouvert connexe de B_{um} . Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Posons $\mathbf{s}' := (s_1, \dots, s_{n-1}), \mathbf{t}' := (t_1, \dots, t_{n-1})$ et $U' := C_U(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. On peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $s_i < t_i$ et $t_i > 0$. D'après le lemme 7.1.10, il suffit de montrer que, pour tous $s'_n, t'_n \in \mathbf{R}$ avec $s_n < s'_n < t'_n < t_n$ et $t'_n > 0$, l'espace $\overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n)$ est élastique.

Soient $s'_n, t'_n \in \mathbf{R}$ avec $s_n < s'_n < t'_n < t_n$ et $t'_n > 0$. Soit $x \in \overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n)$. Notons y sa projection sur U' . Montrons qu'il existe un chemin reliant x à η_{y, t'_n} dans $\overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n)$ qui est élastique en x . Cela suffira pour conclure, d'après la remarque 7.1.3.

Fixons une coordonnée T sur $\overline{D}_U(s'_n, t'_n)$. Elle induit une coordonnée sur $\overline{D}_y(s'_n, t'_n)$ que l'on note identiquement. Définissons un ordre partiel $\leq$ sur $\overline{D}_y(s'_n, t'_n)$ de la façon suivante : pour tous $z_1, z_2 \in \overline{D}_y(s'_n, t'_n)$, on a $z_1 \leq z_2$ si

$$\forall P \in \mathcal{H}(y)[T], |P(z_1)| \leq |P(z_2)|.$$

Puisque $\mathcal{O}_{U', y}$ est dense dans $\mathcal{H}(y)$, on peut remplacer $\mathcal{H}(y)$ par $\mathcal{O}_{U', y}$ dans cette définition. Le point η_{y, t'_n} est le plus grand point de $\overline{D}_y(s'_n, t'_n)$ pour l'ordre

partiel $\leq$. En outre, l'ensemble

$$\{z \in \overline{D}_y(s'_n, t'_n) : z \geq x\}$$

est homéomorphe à un intervalle fermé dont les extrémités s'envoient sur x et η_{y, t'_n} . Identifions-le à un chemin ℓ reliant η_{y, t'_n} à x et montrons qu'il est élastique en x .

Soit U'' un voisinage compact de y dans U' . Pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, tout voisinage W de y dans U'' et tout $P \in \mathcal{O}(W)[T]$, posons

$$L_{\varepsilon, W, P} := \{z \in \overline{D}_W(s'_n, t'_n) : |P(z)| \geq |P(x)| - \varepsilon\}.$$

C'est un voisinage de ℓ_x dans $\overline{D}_{U''}(s'_n, t'_n)$, compact si W est compact. Remarquons que l'on a

$$\ell = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{W \ni y} \bigcap_{P \in \mathcal{O}(W)[T]} L_{\varepsilon, W, P},$$

où W décrit l'ensemble des voisinages compacts de y dans U' .

Soit V un voisinage ouvert de ℓ dans $\overline{D}_{U''}(s'_n, t'_n)$. Alors $\overline{D}_{U''}(s'_n, t'_n) \setminus \ell$ est compact et on en déduit qu'il existe un ensemble fini I et, pour chaque $i \in I$, un nombre réel $\varepsilon_i > 0$, un voisinage compact W_i de y dans U'' et un polynôme $P_i \in \mathcal{O}(W_i)[T]$ tels que

$$\bigcap_{i \in I} L_{\varepsilon_i, W_i, P_i} \subset V.$$

En utilisant la proposition 7.2.11, le corollaire 5.6.5, l'hypothèse de récurrence et la proposition 7.1.5, on montre que $\bigcap_{i \in I} W_i$ contient un voisinage connexe par arcs W_0 de y . On a encore

$$L := \bigcap_{i \in I} L_{\varepsilon_i, W_0, P_i} \subset V.$$

Montrons que tout point x' de L peut-être relié à η_{y, t'_n} par un chemin contenu dans V . Soit $x' \in L$. Notons y' sa projection sur U' . L'ensemble

$$\ell_{x'} := \{z \in \overline{D}_{y'}(s'_n, t'_n) : z \geq x'\}$$

s'identifie à un chemin reliant x' à η_{y', t'_n} et ce chemin est contenu dans L . Puisque W_0 est connexe par arcs, il existe un chemin $\ell_{y'}$ dans W_0 reliant y' à y . Son image $\sigma_{t'_n}(\ell_{y'})$ est un chemin reliant η_{y', t'_n} à η_{y, t'_n} et contenu dans L . Le résultat s'ensuit. $\square$

Proposition 7.2.14. — *Supposons que B_{arc} est localement connexe par arcs. Soit U un ouvert connexe de B_{arc} . Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors, la polycouronne $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.*

Démonstration. — Nous suivrons une stratégie similaire à celle de la preuve de la proposition 7.2.13. Montrons, par récurrence sur n , que, pour tout ouvert connexe U de B_{arc} , et tous $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$, la polycouronne $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique.

Pour $n = 0$, le résultat est vrai car tout ouvert connexe de B est élastique.

Soit $n \geq 1$ et supposons que le résultat est vrai pour $n - 1$. Soit U un ouvert connexe de B_{arc} . Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. On peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $s_i < t_i$ et $t_i > 0$. Posons $\mathbf{s}' := (s_1, \dots, s_{n-1}), \mathbf{t}' := (t_1, \dots, t_{n-1})$ et $U' := C_U(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. D'après le lemme 7.1.10, il suffit de montrer que, pour tous $s'_n, t'_n \in \mathbf{R}$ avec $s_n < s'_n < t'_n < t_n$ et $t'_n > 0$, l'espace $\overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n)$ est élastique.

Soient $s'_n, t'_n \in \mathbf{R}$ avec $s_n < s'_n < t'_n < t_n$ et $t'_n > 0$. Notons $\pi: \overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n) \rightarrow U'$ le morphisme de projection. Rappelons que, pour tout $r \in [s'_n, t'_n] \cap \mathbf{R}_{\geq 0}$, nous en avons défini une section continue σ_r au lemme 7.2.4.

Fixons une coordonnée T sur $\overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n)$. Soit $x \in \overline{D}_{U'}(s'_n, t'_n)$. Posons $y := \pi(x)$. L'ensemble

$$\{z \in \pi^{-1}(y) : |T(z)| = |T(x)|\}$$

est homéomorphe à un cercle si $\mathcal{H}(y) = \mathbf{C}$ et à un demi-cercle si $\mathcal{H}(y) = \mathbf{R}$. C'est l'ensemble sous-jacent à un chemin ℓ_x reliant x à $\sigma_{|T(x)|}(y)$.

Soit U'' un voisinage compact de y dans U' . Pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ et tout voisinage W de y dans U' , posons

$$L_{\varepsilon, W} := \{z \in \overline{D}_W(s'_n, t'_n) : ||T(z)| - |T(x)|| \leq \varepsilon\}.$$

C'est un voisinage de ℓ_x dans $\overline{D}_{U''}(s'_n, t'_n)$, compact si W est compact.

Soit V un voisinage ouvert de ℓ_x dans $\overline{D}_{U''}(s'_n, t'_n)$. Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 7.2.13, on montre qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et un voisinage connexe par arcs W de y dans U'' tels que

$$L_{\varepsilon, W} \subset V.$$

Montrons que tout point x' de $L_{\varepsilon, W}$ peut-être relié à $\sigma_{|T(x)|}(y)$ par un chemin contenu dans V . Soit $x' \in L$. Notons y' sa projection sur W . Puisque l'ensemble

$$\{z \in \pi^{-1}(y') : |T(z)| = |T(x')|\}$$

est contenu dans $L_{\varepsilon, W}$, il existe un chemin reliant x' à $\sigma_{|T(x')|}(y')$ contenu dans $L_{\varepsilon, W}$. On peut également relier $\sigma_{|T(x')|}(y')$ à $\sigma_{|T(x)|}(y')$ dans $L_{\varepsilon, W}$, puis $\sigma_{|T(x)|}(y')$ à $\sigma_{|T(x)|}(y)$, toujours dans $L_{\varepsilon, W}$, grâce à la continuité de la section $\sigma_{|T(x)|}$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Proposition 7.2.15. — *Supposons que B et B_{um} sont localement connexes par arcs et que B est peu mixte. Soit U un ouvert connexe de B . Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors la polycouronne $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ est élastique. Démonstration.* — D'après les propositions 7.2.13 et 7.2.14, les polycouronnes $C_{U_{\text{arc}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ et $C_{U_{\text{um}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ sont élastiques. D'après le lemme 7.1.9 appliqué avec $W = C_{U_{\text{arc}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ et $F = C_{U_{\text{um}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, il suffit de montrer que tout point x de $\partial C_{U_{\text{um}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ admet une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ dans $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ telle que, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$ et tout $y \in V \cap C_{U_{\text{arc}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, il existe un chemin dans V reliant y à un point de $C_{U_{\text{um}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Soit $x \in \partial C_{U_{\text{um}}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. D'après la proposition 7.2.11, x admet une base de voisinages dans $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ formée d'ouverts V pour lesquels il existe un ouvert connexe U' de U , $\mathbf{s}' = (s'_1, \dots, s'_n), \mathbf{t}' = (t'_1, \dots, t'_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ avec $s'_i < t'_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un morphisme fini et plat $\varphi: V \rightarrow C_{U'}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. D'après le corollaire 5.6.5, φ est ouvert.

Montrons qu'un tel V satisfait la propriété requise. D'après la proposition 7.2.10, $C_{U'}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$ est connexe par arcs donc, d'après la proposition 7.1.7, chaque composante connexe par arcs de V se surjecte sur $C_{U'}(\mathbf{s}', \mathbf{t}')$. En particulier, tout point de V peut-être relié à un point de V_{um} . $\square$

Théorème 7.2.16. — *Supposons que B et B_{um} sont localement connexes par arcs et que B est peu mixte. Alors, l'espace analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ est localement connexe par arcs.*

Démonstration. — Soient $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et W un voisinage de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. D'après la proposition 7.2.11, il existe un voisinage V de x dans W pour lequel il existe un ouvert connexe U de B , $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ avec $s_i < t_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un morphisme fini et plat $\varphi: V \rightarrow C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. D'après le corollaire 5.6.5, φ est ouvert. Il suit des propositions 7.2.10 et 7.1.1 que la composante connexe V_x de V contenant x est ouverte et se surjecte sur $C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ par φ . D'après les propositions 7.2.15 et 7.1.5, V_x est connexe par arcs. Le résultat s'ensuit. $\square$

Nous généralisons finalement le résultat de connexité par arcs locale à des espaces analytiques quelconques.

Théorème 7.2.17. — *Supposons que B et B_{um} sont localement connexes par arcs et que B est peu mixte. Alors tout espace $\mathcal{A}$ -analytique est localement connexe par arcs.*

Démonstration. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et soit $x \in X$. La proposition 6.1.8 assure qu'il existe un voisinage ouvert V de x dans X et des fermés analytiques $V_1, \dots, V_s$ de V contenant x et intègres en x tels que $V = \bigcup_{i=1}^s V_i$. Il suffit de montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, x admet une base de voisinages connexes par arcs chacun des V_i . Il suffit donc de traiter le cas d'un espace intègre en x . Par conséquent, on supposera désormais que X est intègre en x .

Soit U un voisinage ouvert de x dans X . On peut supposer qu'il est séparé. Le théorème 6.3.2 assure que, quitte à rétrécir U , on peut supposer qu'il existe un morphisme fini ouvert $\varphi: U \rightarrow V$, où V est un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ ou de $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$ pour un certain $b \in B$. D'après le théorème 7.2.16, $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(b)}^{n,\text{an}}$ sont localement connexes par arcs. Quitte à rétrécir V (et U en conséquence), on peut donc supposer que V est connexe par arcs et localement connexe par arcs. La remarque 7.1.3 assure que V est également élastique.

D'après les propositions 7.1.1 et 7.1.5, U possède un nombre fini de composantes connexes et celles-ci sont connexes par arcs. On en déduit le résultat souhaité. $\square$

7.3. Dimension topologique

Dans cette section, nous calculons la dimension topologique des espaces affines et des disques sur des bases convenables.

Rappelons tout d'abord la définition de dimension de recouvrement. On rappelle qu'un espace topologique T est dit *normal* si deux fermés disjoints de T sont toujours contenus dans deux ouverts disjoints. Par exemple, un espace paracompact (séparé) est normal.

Un espace $\mathcal{A}$ -analytique peut ne pas être normal (ni même séparé). En revanche, d'après la remarque 2.1.20, il est toujours localement compact (séparé), donc localement normal.

Définition 7.3.1 ([Eng95, définitions 1.6.6, 1.6.7])

Soient T un espace topologique normal non vide.

- i) Soit $\mathcal{U}$ un ensemble non vide de parties de T . On appelle *ordre de $\mathcal{U}$* la borne supérieure de l'ensemble des entiers n tel qu'il existe $n + 1$ éléments distincts de $\mathcal{U}$ d'intersection non vide.
- ii) On appelle *dimension de recouvrement de T* la borne supérieure de l'ensemble des entiers n tel que tout recouvrement fini ouvert de T admette un raffinement fini d'ordre inférieur ou égal à n . On la note $\dim_r(X) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Dans la suite du texte, la dimension d'un espace sera toujours à prendre au sens de la dimension de recouvrement, même si nous omettrons parfois cette précision.

Remarque 7.3.2. — La notion de dimension se comporte bien dans le cas des espaces métrisables et séparables (au sens où ils possèdent un sous-ensemble dénombrable dense). Les espaces que nous considérons ne jouissent malheureusement pas tous de ces propriétés. Par exemple, la droite analytique sur le corps $\mathbf{C}$ muni de la valuation triviale n'est ni métrisable, ni séparable. Nous devons donc manipuler la notion de dimension avec précaution.

Signalons cependant que, si $\mathcal{A}$ possède un sous-ensemble dénombrable dense (par exemple, si $\mathcal{A}$ est $\mathbf{Z}$ ou un anneau d'entiers de corps de nombres), alors tout espace affine analytique sur $\mathcal{A}$ est métrisable et séparable (cf. [Poi10a, théorème 3.5.1] et sa preuve).

Ajoutons finalement que, même lorsqu'ils ne sont pas métrisables, les espaces de Berkovich sur un corps valué ultramétrique sont toujours angéliques (cf. [Poi13b]). Ils se comportent donc comme des espaces métriques à bien des égards. Par exemple, les caractérisations séquentielles usuelles de la fermeture ou de la compacité sont valables. Nous ignorons si ce résultat d'angélité persiste pour tous les espaces analytiques globaux.

Rappelons quelques propriétés de la notion de dimension de recouvrement sur les espaces topologiques normaux.

Théorème 7.3.3 ([Eng95, theorem 3.1.3]). — *Soient T un espace topologique normal et F une partie fermée de T . Alors, on a*

$$\dim_r(F) \leq \dim_r(T).$$

□

Théorème 7.3.4 ([Eng95, theorem 3.1.8]). — *Soient T un espace topologique normal et $(F_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de parties fermées de T telle*

que $T = \bigcup_{i \in I} F_i$. Alors, on a

$$\dim_r(T) \leq \sup_{i \in I} (\dim_r(F_i)).$$

□

Théorème 7.3.5 ([Eng95, theorem 3.2.13]). — Soient T et S des espaces topologiques compacts non vides. Alors, on a

$$\dim_r(T \times S) \leq \dim_r(T) + \dim_r(S).$$

□

Rappelons le résultat suivant pour les espaces analytiques sur un corps valué complet.

Théorème 7.3.6. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{>0}^n$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \dim_r(\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}) &= \dim_r(\overline{D}_k(\mathbf{r})) = \dim_r(D_k(\mathbf{r})) \\ &= \begin{cases} 2n & \text{si } (k, |\cdot|) \text{ est archimédien ;} \\ n & \text{si } (k, |\cdot|) \text{ est ultramétrique.} \end{cases} \end{aligned}$$

En outre, chacun des espaces $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$, $\overline{D}_k(\mathbf{r})$ et $D_k(\mathbf{r})$ contient un pavé compact de même dimension.

Démonstration. — Si $(k, |\cdot|)$ est archimédien, alors, d'après le théorème 1.2.6 et le lemme 1.2.14, $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ est homéomorphe à $\mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{C}^n / \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. Le résultat s'en déduit.

Supposons que $(k, |\cdot|)$ est ultramétrique. D'après [Ber90, corollary 3.2.8], on a $\dim_r(\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}) = n$.

D'après le théorème 7.3.3, on a donc $\dim_r(\overline{D}_k(\mathbf{r})) \leq n$. Notons $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$. Pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}_{>0}^n$, notons $\eta_{t_1, \dots, t_n}$ l'unique point du bord de Shilov du disque $\overline{D}_k(t_1, \dots, t_n)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soient $s_i \in]0, r_i[$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \prod_{i=1}^n [s_i, r_i] &\longrightarrow \overline{D}_k(r_1, \dots, r_n) \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \eta_{t_1, \dots, t_n} \end{aligned}$$

réalise un homéomorphisme du pavé compact $\prod_{i=1}^n [s_i, r_i]$ sur un fermé de $\overline{D}_k(r_1, \dots, r_n)$. D'après le théorème 7.3.3, on a donc

$$\dim_r(\overline{D}_k(\mathbf{r})) \geq \dim_r\left(\prod_{i=1}^n [s_i, r_i]\right) = n.$$

Le résultat s'ensuit.

Puisque le polydisque ouvert $D_k(\mathbf{r})$ contient un polydisque fermé et peut s'écrire comme union dénombrable de polydisques fermés, le résultat précédent, joint aux théorèmes 7.3.3 et 7.3.4, entraîne que $\dim_r(D_k(\mathbf{r})) = n$. $\square$

En nous basant sur ce résultat, nous allons pouvoir calculer la dimension de recouvrement d'espaces affines sur des bases plus générales. Nous utiliserons les notions de partie linéaire et de partie d'Ostrowski introduites précédemment (cf. définitions 1.1.23 et 1.1.25).

Théorème 7.3.7. — *Soit V une partie linéaire ou d'Ostrowski de B . Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{>0}^n$. Notons $\pi: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow B$ la projection canonique. Alors, on a*

$$\begin{aligned} \dim_r(\pi^{-1}(V)) &= \dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) = \dim_r(D_V(\mathbf{r})) \\ &= \begin{cases} 2n+1 & \text{si } V \cap B^{\text{arc}} \neq \emptyset ; \\ n+1 & \text{si } V \subset B^{\text{um}}. \end{cases} \end{aligned}$$

En outre, chacun des espaces $\pi^{-1}(V)$, $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ et $D_V(\mathbf{r})$ contient un pavé compact de même dimension.

Démonstration. — Remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat pour les polydisques fermés. Ceci découle des théorèmes 7.3.3 et 7.3.4 puisque les espaces affines et les polydisques ouverts contiennent et sont union dénombrables de tels disques.

Posons

$$d = \begin{cases} 2n & \text{si } V \cap B^{\text{arc}} \neq \emptyset ; \\ n & \text{si } V \subset B^{\text{um}}. \end{cases}$$

- Supposons que V est linéaire.

Par définition, il existe une partie V^∂ de V , un point b de V et un intervalle $I \subset I_b$ non réduit à un point satisfaisant les propriétés suivantes :

- V^∂ est contenue dans le bord de V et $\#V^\partial \leq 2$;
- l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & V \setminus V^\partial \\ \varepsilon & \longmapsto & b^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Supposons que I est un segment et que $V^\partial = \emptyset$. Alors, d'après le lemme 1.2.21, l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi: & \pi^{-1}(b) \times I & \longrightarrow \pi^{-1}(V) \\ & (x, \varepsilon) & \longmapsto x^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Soit $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{R}_{>0}^n$. On a alors

$$\Phi(\overline{D}_b(\mathbf{s}) \times I) = \bigcup_{\varepsilon \in I} \overline{D}_{b^\varepsilon}(s_1^\varepsilon, \dots, s_n^\varepsilon).$$

On peut choisir $\mathbf{s}$ de façon que $\Phi(\overline{D}_b(\mathbf{s}) \times I) \subset \overline{D}_V(\mathbf{r})$. D'après le théorème 7.3.6, $\overline{D}_b(\mathbf{s})$ contient un pavé compact de dimension d , donc $\overline{D}_b(\mathbf{s}) \times I$ contient un pavé compact de dimension $d + 1$. D'après le théorème 7.3.3, on en déduit que $\dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \geq d + 1$.

On peut choisir également choisir $\mathbf{s}$ de façon que $\overline{D}_V(\mathbf{r}) \subset \Phi(\overline{D}_b(\mathbf{s}) \times I)$. D'après les théorèmes 7.3.6, 7.3.5 et 7.3.3, on a alors $\dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \leq d + 1$. Le résultat s'ensuit.

Traitons maintenant le cas général. Posons $F := \bigsqcup_{c \in V^\partial} \overline{D}_c(\mathbf{r})$. D'après le théorème 7.3.6, F est soit vide, soit de dimension d .

Écrivons l'intervalle I comme une réunion dénombrable $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$, où les I_n sont des segments non réduits à un point. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $V_n := \{b^\varepsilon : \varepsilon \in I_n\}$, $\overline{D}_n := F \cup \overline{D}_{V_n}(\mathbf{r})$. D'après le cas précédent, $\overline{D}_n$ est de dimension $d + 1$ et contient un pavé de dimension $d + 1$. On en déduit que $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ contient un pavé de dimension $d + 1$ et que $\dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \geq d + 1$, d'après le théorème 7.3.3.

Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $\overline{D}'_n := F \sqcup \overline{D}_n$. On a $\dim_r(\overline{D}'_n) = d + 1$. Puisque, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\overline{D}'_n$ est fermé dans $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ et que $\overline{D}_V(\mathbf{r}) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{D}'_n$, le théorème 7.3.4 assure que $\dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \leq d + 1$. Le résultat s'ensuit.

• Supposons que V est d'Ostrowski.

Par hypothèse, il existe un point a_0 de V , un ensemble dénombrable non vide Σ et une famille $(V_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ de parties disjointes de $V \setminus \{a_0\}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) $V = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma \cup \{a_0\}$;
- ii) pour tout $\sigma \in \Sigma$, V_σ et $V_\sigma \cup \{a_0\}$ sont des parties linéaires de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$;
- iii) l'ensemble des parties de la forme

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} V'_\sigma \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'} V_\sigma,$$

où Σ' est un sous-ensemble fini de Σ et, pour tout $\sigma \in \Sigma'$, V'_σ est un voisinage de a_0 dans $V_\sigma \cup \{a_0\}$, est une base de voisinages de a_0 dans V .

Soit $\sigma \in \Sigma$. Si $V \cap B^{\text{arc}} \neq \emptyset$, on peut supposer que $V_\sigma \cap B^{\text{arc}} \neq \emptyset$. La première partie de la preuve assure que $\overline{D}_{V_\sigma}(\mathbf{r})$ contient un pavé compact de dimension $d + 1$. Il en va donc de même pour $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. En particulier, d'après le théorème 7.3.3, on a $\dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \geq d + 1$.

Démontrons l'inégalité réciproque. Nous supposons que Σ est infini et l'identifierons à $\mathbf{N}$. Le cas fini se traite de façon similaire.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, V_n est linéaire, donc il existe une partie V_n^∂ de V , un point b_n de V et un intervalle $I_n \subset I_{b_n}$ non réduit à un point satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) V_n^∂ est contenue dans le bord de V_n et $\#V_n^\partial \leq 2$;
- ii) l'application

$$\begin{array}{ccc} p_n: & I_n & \longrightarrow & V_n \setminus V_n^\partial \\ & \varepsilon & \longmapsto & b_n^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Écrivons I_n comme une réunion dénombrable $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} I_{n,m}$, où les $I_{n,m}$ sont des segments non réduits à un point.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$W_n := \{a_0\} \sqcup \bigsqcup_{m=0}^n (p_m(I_{m,n}) \sqcup V_m^\partial).$$

C'est une partie fermée de V qui est union disjointe finie de points et de parties linéaires. D'après le théorème 7.3.6 et la première partie de la preuve, on a $\dim_r(\overline{D}_{W_n}(\mathbf{r})) \leq d + 1$. Or on a $\overline{D}_V(\mathbf{r}) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{D}_{W_n}(\mathbf{r})$, donc, d'après le théorème 7.3.4, $\dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \leq d + 1$. Ceci conclut la preuve. $\square$

CHAPITRE 8

ESPACES DE STEIN

Le but de ce chapitre est d'initier la théorie des espaces de Stein sur un anneau de Banach en dimension supérieure (le cas de la dimension 1 ayant déjà fait l'objet de [Poi10a, chapitre 6]). Plus précisément, nous exhibons une famille d'espaces satisfaisant les conclusions des théorèmes A et B de Cartan : la famille des polydisques fermés (et de leurs fermés analytiques). Rappelons que le théorème A stipule que tout faisceau cohérent est engendré par ses sections globales et le théorème B que la cohomologie de tout faisceau cohérent est nulle en degré strictement positif.

Dans la section 8.1, nous définissons les notions de systèmes de Cousin et de Runge (*cf.* définitions 8.1.3 et 8.1.8). Deux compacts étant donnés, il s'agit d'imposer des conditions reliant les fonctions sur l'intersection à des fonctions sur chacun des compacts. Dans ce cadre, nous démontrons que si un faisceau est globalement engendré sur chacun des compacts, il l'est encore sur leur réunion (*cf.* corollaire 8.1.18). Nous introduisons ensuite la notion, assez lourde, d'arbre de Cousin-Runge (*cf.* définition 8.1.22). Il s'agit d'un outil technique permettant de construire des systèmes de Cousin-Runge dans un disque relatif à partir de systèmes de Cousin-Runge sur la base. Il nous permettra d'effectuer des raisonnements par récurrence sur la dimension.

Dans la section 8.2, nous démontrons les théorèmes A et B sur les polydisques fermés relatifs (*cf.* corollaires 8.2.15 et 8.2.16). Pour ce faire, nous nous plaçons sur une base que nous appelons de Stein (*cf.* définition 8.2.8). Les spectres de nos anneaux de Banach habituels (corps valués, anneaux d'entiers de corps de

nombres, corps hybrides, anneaux de valuation discrète, anneaux de Dedekind trivialement valués) en sont des exemples.

Dans la section 8.3, nous définissons les espaces affinoïdes surconvergents (*cf.* définition 8.3.1), par analogie avec la géométrie analytique rigide. De nombreuses propriétés restent valable dans notre cadre. Les exemples classiques, domaines de Weierstraß, domaines de Laurent et domaines rationnels s'adaptent sans peine (*cf.* définition 8.3.4 et proposition 8.3.6). Nous démontrons également des analogues du théorème d'acyclicité de Tate et du théorème de Kiehl (*cf.* théorèmes 8.3.8 et 8.3.9). Il s'agit de conséquences assez directes de nos théorèmes A et B sur des polydisques qu'il nous semble utile d'énoncer explicitement pour renforcer le parallèle avec la théorie ultramétrique classique.

Dans la courte section 8.4, nous utilisons les théorèmes A et B pour raffiner quelques résultats antérieurs, en particulier celui ayant trait à la fermeture des idéaux (*cf.* corollaire 8.4.8).

Dans la section 8.5, nous démontrons que les polydisques ouverts relatifs, et certains espaces de nature similaire, satisfont le théorème B (*cf.* corollaire 8.5.15). Nous suivons une stratégie classique : exhaustion par des polydisques fermés relatifs et passage à la limite. Le résultat de fermeture des idéaux de la section précédente y joue un rôle essentiel.

Dans la section finale 8.6, nous appliquons le résultat d'annulation cohomologique sur les polydisques fermés à l'étude des séries arithmétiques convergentes, c'est-à-dire de séries à coefficients entiers qui convergent sur un polydisque complexe. Dans [Har84], D. Harbater a démontré que certains anneaux naturels de séries arithmétiques convergentes en une variable sont noethériens. Nous étendons son résultat à des séries en un nombre quelconque de variables (*cf.* corollaire 8.6.12).

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de base géométrique. On pose $B := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Précisons que l'hypothèse sur l'anneau ne sera peu utilisée. Toute la section 8.1 reste, par exemple, valable pour un anneau de Banach arbitraire. Dans les sections 8.2 et 8.3, l'hypothèse interviendra lorsque nous aurons besoin de la cohérence du faisceau structural, et uniquement pour cette raison. Dans les sections 8.4 et 8.5, en revanche, elle jouera un rôle important lorsqu'interviendra la fermeture des idéaux du faisceau structural, et il faudra même la compléter par une hypothèse supplémentaire (*cf.* définition 8.4.5). Nous avons choisi de

supposer dès le début que l'anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est anneau de base géométrique afin de ne pas alourdir la rédaction.

Dans ce chapitre, nous travaillerons souvent avec des parties compactes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Elles seront munies du faisceau structural surconvergent (*cf.* notation 1.4.2), sans que nous le précisions désormais.

8.1. Systèmes de Cousin-Runge

8.1.1. Généralités. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Soient K^- et K^+ deux parties compactes de X . Posons $L := K^- \cap K^+$ et $M := K^- \cup K^+$. Dans cette section, nous introduisons différentes notions permettant de relier les sections globales d'un faisceau cohérent sur K^- et K^+ à celles sur M . Elles sont inspirées de celles introduites dans [Poi10a, §6.2.1], tout en étant parfois différentes, de façon à prendre en compte le cadre plus général étudié ici.

Sous nos conventions, les anneaux $\mathcal{O}(K^+)$, $\mathcal{O}(K^-)$ et $\mathcal{O}(L)$ sont des anneaux de sections surconvergentes (*cf.* notation 1.4.2). En général, ce ne sont pas des anneaux de Banach, mais on peut chercher à les écrire comme limites de suites de tels anneaux. On peut par exemple écrire les sections sur un disque à l'aide des complétés des sections sur des disques de rayons strictement plus grands, dans l'esprit de la proposition 1.4.8. La notion de système de Banach vient formaliser cette idée, en imposant de plus une condition de compatibilité entre les suites.

Nous travaillerons ici, sans plus le préciser, avec la catégorie des anneaux de Banach dont les objets sont les anneaux de Banach et les morphismes sont les morphismes bornés.

Définition 8.1.1. — Un *système de Banach* associé à (K^-, K^+) dans X est la donnée de systèmes inductifs d'anneaux de Banach

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^- &= ((\mathcal{B}_m^-, \|\cdot\|_m^-)_{m \in \mathbb{N}}, (\varphi_{m',m}^-)_{m' \geq m \in \mathbb{N}}), \\ \mathcal{B}^+ &= ((\mathcal{B}_m^+, \|\cdot\|_m^+)_{m \in \mathbb{N}}, (\varphi_{m',m}^+)_{m' \geq m \in \mathbb{N}}), \\ \mathcal{C} &= ((\mathcal{C}_m, \|\cdot\|_m)_{m \in \mathbb{N}}, (\varphi_{m',m})_{m' \geq m \in \mathbb{N}})\end{aligned}$$

et de morphismes

$$(\psi_m^-)_{m \in \mathbb{N}}: \mathcal{B}^- \rightarrow \mathcal{C}, \quad (\psi_m^+)_{m \in \mathbb{N}}: \mathcal{B}^+ \rightarrow \mathcal{C}$$

et

$$(\rho_m^-)_{m \in \mathbf{N}} : \mathcal{B}^- \rightarrow \mathcal{O}(K^-), (\rho_m^+)_{m \in \mathbf{N}} : \mathcal{B}^+ \rightarrow \mathcal{O}(K^+), (\rho_m)_{m \in \mathbf{N}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}(L)$$

tels que le morphisme

$$\operatorname{colim}_{m \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_m \longrightarrow \mathcal{O}(L)$$

induit par les ρ_m soit un isomorphisme d'anneaux.

On dit que le système de Banach est *fort* si, de plus, pour tout voisinage compact V de L , il existe $m_V \in \mathbf{N}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $m \geq m_V$, il existe $C_m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{O}(V)$, il existe $g \in \mathcal{C}_m$ vérifiant

$$\begin{cases} f = \rho_m(g) \text{ dans } \mathcal{O}(L) ; \\ \|g\|_m \leq C_m \|f\|_V. \end{cases}$$

Dans la suite, nous nous permettrons d'utiliser implicitement les morphismes $\psi_m^-, \psi_m^+, \rho_m^-, \rho_m^+, \rho_m$, sans que cela ne soit source de confusions. Nous sous-entendrons également souvent l'espace X ambiant.

Remarque 8.1.2. — La définition de système de Banach reprend [Poi10a, définition 6.2.1]. La définition de système de Banach fort est nouvelle.

Introduisons la notion de système de Cousin. L'idée sous-jacente consiste à écrire une section sur l'intersection L comme somme de sections sur les parties K^- et K^+ , avec un contrôle sur les normes.

Définition 8.1.3. — Un *système de Cousin* associé à (K^-, K^+) est un système de Banach associé à (K^-, K^+) pour lequel il existe $D \in \mathbf{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tous $m \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathcal{C}_m$, il existe $f^- \in \mathcal{B}_m^-$ et $f^+ \in \mathcal{B}_m^+$ tels que

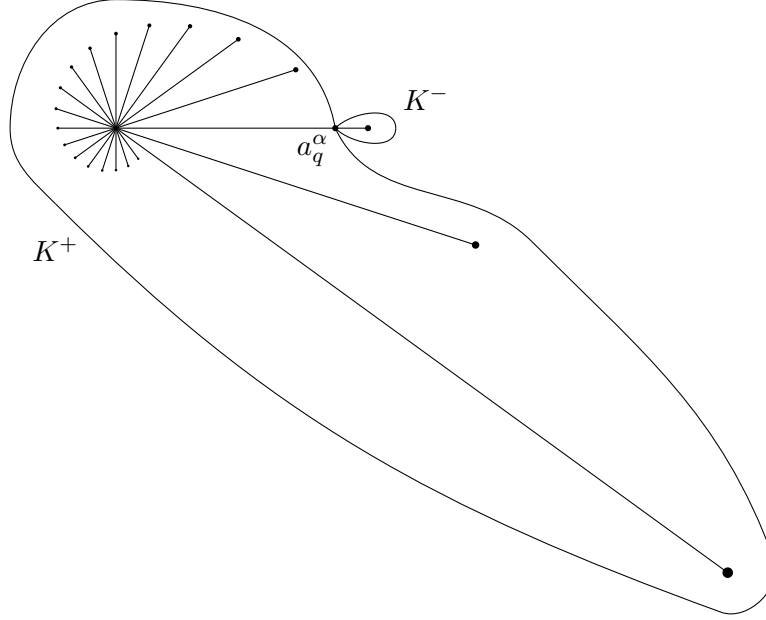
- i) $f = f^- + f^+$ dans $\mathcal{C}_m$;
- ii) $\|f^-\|_m^- \leq D \|f\|_m$;
- iii) $\|f^+\|_m^+ \leq D \|f\|_m$.

Remarque 8.1.4. — La définition de système de Cousin reprend [Poi10a, définition 6.2.2].

Donnons quelques exemples simples pour illustrer la définition.

Exemple 8.1.5. — Considérons le cas où $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$ et $X = \mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Reprenons les notations de l'exemple 1.1.17.

Soit q un nombre premier et soit $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. Posons $K^- := [a_q^\alpha, a_q^{+\infty}]$ et $K^+ := \mathcal{M}(\mathbf{Z}) \setminus]a_q^\alpha, a_q^{+\infty}]$. On a $K^- \cap K^+ = \{a_q^\alpha\}$ et $K^- \cup K^+ = \mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Cette situation est représentée à la figure 10.

FIGURE 10. Un système de Cousin de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, posons

$$\begin{cases} (\mathcal{B}_m^-, \|\cdot\|_m^-) := (\mathcal{B}(K^-), \|\cdot\|_{K^-}) = (\mathbf{Z}_q, |\cdot|_q^\alpha) ; \\ (\mathcal{B}_m^+, \|\cdot\|_m^+) := (\mathcal{B}(K^+), \|\cdot\|_{K^+}) = (\mathbf{Z}[\frac{1}{q}], \max(|\cdot|_q^\alpha, |\cdot|_\infty)) ; \\ (\mathcal{C}_m, \|\cdot\|_m) := (\mathcal{H}(a_q^\alpha), |\cdot|_{a_q^\alpha}) = (\mathbf{Q}_q, |\cdot|_q^\alpha). \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{H}(a_q^\alpha) = \mathbf{Q}_q$. Supposons que $f \neq 0$ et écrivons-le sous la forme $f = \sum_{i \geq i_0} a_i q^i$ avec $i_0 \in \mathbf{Z}$, $a_{i_0} \neq 0$ et, pour tout $i \geq i_0$, $a_i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$.

Si $i_0 \geq 0$, on pose

$$f^- := f \text{ et } f^+ := 0.$$

On a alors $f = f^- + f^+$, $\|f^-\|_{K^-} = |f|_q^\alpha$ et $\|f\|_{K^+} = 0$.

Si $i_0 < 0$, on a $|f|_q^\alpha > 1$ et on pose

$$f^- := \sum_{i \geq 0} a_i q^i \text{ et } f^+ := \sum_{i_0 \leq i < 0} a_i q^i.$$

On a alors $f = f^- + f^+$, $\|f^-\|_{K^-} \leq 1$ et $\|f\|_{K^+} \leq \sum_{i < 0} (q-1) q^{-i} = 1$.

On a donc bien défini un système de Cousin associé à (K^-, K^+) .

Exemple 8.1.6. — Considérons le cas où $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$ et $X = \mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Reprenons les notations de l'exemple 1.1.17.

Soit $\beta \in]0, 1[$. Posons $K^- := [a_\infty^\beta, a_\infty]$ et $K^+ := \mathcal{M}(\mathbf{Z}) \setminus]a_\infty^\beta, a_\infty]$. On a $K^- \cap K^+ = \{a_\infty^\beta\}$ et $K^- \cup K^+ = \mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, posons

$$\begin{cases} (\mathcal{B}_m^-, \|\cdot\|_m^-) := (\mathcal{B}(K^-), \|\cdot\|_{K^-}) = (\mathbf{R}, \max(|\cdot|_\infty^\beta, |\cdot|_\infty)) ; \\ (\mathcal{B}_m^+, \|\cdot\|_m^+) := (\mathcal{B}(K^+), \|\cdot\|_{K^+}) = (\mathbf{Z}, |\cdot|_\infty^\beta) ; \\ (\mathcal{C}_m, \|\cdot\|_m) := (\mathcal{H}(a_\infty^\beta), |\cdot|_{a_\infty^\beta}) = (\mathbf{R}, |\cdot|_\infty^\beta). \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{H}(a_\infty^\beta) = \mathbf{R}$.

Si $|f|_\infty \leq 1$, on pose

$$f^- := f \text{ et } f^+ := 0.$$

On a alors $f = f^- + f^+$, $\|f^-\|_{K^-} = |f|_\infty^\beta$ et $\|f\|_{K^+} = 0$.

Si $|f|_\infty > 1$, il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $|n|_\infty \leq |f|_\infty$ et $|f - n|_\infty < 1$ et on pose

$$f^- := f - n \text{ et } f^+ := n.$$

On a alors $f = f^- + f^+$, $\|f^-\|_{K^-} \leq 1$ et $\|f\|_{K^+} = |n|_\infty^\beta \leq |f|_\infty^\beta$.

On a donc bien défini un système de Cousin associé à (K^-, K^+) .

Les exemples précédents se généralisent.

Exemple 8.1.7. — Soit $\mathcal{A}$ l'un de nos anneaux de Banach usuels : corps valué, anneau d'entiers de corps de nombres, corps hybride, anneau de valuation discrète, anneau de Dedekind trivialement valué (cf. exemples 1.1.16 à 1.1.21). Posons $X := \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Soit a un point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ non associé à la valuation triviale sur $\mathcal{A}$. Dans ce cas, il existe deux compacts K^- et K^+ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tels que $K^- \cap K^+ = \{a\}$ et $K^- \cup K^+ = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. (Si $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \setminus \{a\}$ possède deux composantes connexes, ce qui est le cas général, K^- et K^+ sont les adhérences de ces composantes connexes.)

On obtient alors un système de Cousin fort associé à (K^-, K^+) en posant, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $(\mathcal{B}_m^-, \|\cdot\|_m^-) := (\mathcal{B}(K^-), \|\cdot\|_{K^-})$, $(\mathcal{B}_m^+, \|\cdot\|_m^+) := (\mathcal{B}(K^+), \|\cdot\|_{K^+})$ et $(\mathcal{C}_m, \|\cdot\|_m) := (\mathcal{H}(a), |\cdot|_a)$. Le seul cas qui n'est pas immédiat est celui des anneaux d'entiers de corps de nombres. On peut le déduire du théorème des unités de Dirichlet (cf. [Poi10a, lemme 6.3.2]).

Introduisons la notion de système de Runge. L'idée sous-jacente consiste à écrire les sections sur l'intersection à partir de sections globales, et plus précisément d'approcher une section sur l'intersection L par une section sur une

partie (K^- ou K^+), après multiplication éventuelle par une section inversible sur l'autre (K^+ ou K^-).

Définition 8.1.8. — Un *système de Runge* associé à (K^-, K^+) est un système de Banach associé à (K^-, K^+) tel que, pour tous $m \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbf{N}^*$, $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{C}_m$, les propriétés suivantes soient vérifiées : pour tout $\sigma \in \{-, +\}$, il existe $f \in \mathcal{B}_m^\sigma$ inversible et $s'_1, \dots, s'_p \in \mathcal{B}_m^{-\sigma}$ tels que

- i) $\lim_{m' \rightarrow +\infty} \|f\|_{m'} \|f^{-1}\|_{m'} = 1$;
- ii) pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait

$$\|fs_i - s'_i\|_m < \varepsilon \|f\|_m.$$

Remarque 8.1.9. — Dans le cadre de la définition précédente, pour m assez grand (dépendant de f), on a

$$\|fs_i - s'_i\|_m \|f^{-1}\|_m < \varepsilon.$$

Nous utiliserons souvent des combinaisons des définitions précédentes dont le sens est clair : système de Cousin fort, système de Cousin-Runge, système de Cousin-Runge fort, etc.

Remarque 8.1.10. — Dans [Poi10a] figure uniquement la définition de système de Cousin-Runge (cf. [Poi10a, définition 6.2.8]). Elle est proche de celle que nous proposons ici, mais plus compliquée.

Reprenons les exemples de systèmes de Banach vus plus haut.

Exemple 8.1.11. — Reprenons l'exemple 8.1.5. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ et soient $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{H}(a_q^\alpha) = \mathbf{Q}_q$.

Considérons le cas $\sigma = -$. Puisque $\mathbf{Z}[1/q]$ est dense dans $\mathbf{Q}_q$, il existe $s'_1, \dots, s'_p \in \mathbf{Z}[1/q]$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait $|s_i - s'_i| < \varepsilon$. Le résultat vaut donc avec $f = 1$.

Considérons le cas $\sigma = +$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait $q^N s_i \in \mathbf{Z}_q$. Le résultat vaut donc avec $f = q^N$ (qui est inversible dans $\mathbf{Z}[1/q]$) et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $s'_i = q^N s_i$.

On en déduit que le système de l'exemple 8.1.5 est de Runge.

Exemple 8.1.12. — Reprenons l'exemple 8.1.6. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ et soient $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{H}(a_\infty^\beta) = \mathbf{R}$.

Considérons le cas $\sigma = +$. Les anneaux sous-jacents à $\mathcal{H}(a_\infty^\beta)$ et $\mathcal{B}(K^-)$ coïncident et le résultat vaut donc avec $f = 1$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $s'_i = s_i$.

Considérons le cas $\sigma = -$. Il existe $M \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ tel que $\varepsilon \geq 1/M^\beta$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $s'_i \in \mathbf{Z}$ tel que $|Ms_i - s'_i|_\infty < 1$. Le résultat vaut alors avec $f = M$ (qui est inversible dans $\mathbf{R}$).

On en déduit que le système de l'exemple 8.1.6 est de Runge.

Exemple 8.1.13. — Les systèmes de Cousin de l'exemple 8.1.7 sont des systèmes de Cousin-Runge forts. Comme précédemment, le seul cas difficile est celui des anneaux d'entiers de corps de nombres. On peut le déduire du théorème d'approximation fort (cf. [Poi10a, lemme 6.3.3]).

Rappelons la notation 7.2.8 pour les disques relatifs.

Lemme 8.1.14. — Soient $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Soient K^- et K^+ des parties compactes de X . S'il existe un système de Banach (resp. de Banach fort, resp. de Cousin, resp. de Runge) associé à (K^-, K^+) , alors il existe un système de Banach (resp. de Banach fort, de Cousin, resp. de Runge) associé à $(\overline{D}_{K^-}(r_1, \dots, r_n), \overline{D}_{K^+}(r_1, \dots, r_n))$ dans $\mathbf{A}_X^{n, \text{an}}$.

Démonstration. — Une récurrence immédiate montre qu'il suffit de traiter le cas $n = 1$. Posons $r = r_1$.

Supposons tout d'abord qu'il existe un système de Banach Ω associé au couple (K^-, K^+) . Soit $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $]r, +\infty]$ de limite r . Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $\bar{\mathcal{B}}_n^- = \mathcal{B}_n^- \langle |T| \leq R_n \rangle$, $\bar{\mathcal{B}}_n^+ = \mathcal{B}_n^+ \langle |T| \leq R_n \rangle$, $\bar{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_n \langle |T| \leq R_n \rangle$. Avec les morphismes évidents, on obtient un système de Banach $\bar{\Omega}$ associé au couple $(\overline{D}_{K^-}(r), \overline{D}_{K^+}(r))$. En effet, les autres propriétés étant immédiates, il suffit de vérifier que le morphisme

$$\operatorname{colim}_{m \in \mathbf{N}} \bar{\mathcal{C}}_m \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{D}_L(r))$$

est un isomorphisme, ce qui découle de la proposition 1.4.8.

Supposons, maintenant, que Ω est un système de Banach fort. Soit V un voisinage compact de $\overline{D}_L(r)$ dans $\mathbf{A}_X^{1, \text{an}}$. On peut supposer qu'il est de la forme $\overline{D}_W(s)$, où W est un voisinage compact de L et s un nombre réel strictement supérieur à r . Soit m_W un entier vérifiant les propriétés de la définition de système de Banach fort pour le voisinage compact W de L . Soit $m_V \geq m_W$ tel que $R_{m_V} < s$. Soient $m \geq m_V$ et $f \in \mathcal{O}(\overline{D}_W(s))$. D'après la proposition 1.4.8, on peut écrire f sous la forme

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathcal{O}(W)[[T]],$$

où la série $\sum_{n \geq 0} \|a_n\|_W s^n$ converge. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $b_n \in \mathcal{C}_m$ tel que

$$\begin{cases} a_n = b_n \text{ dans } \mathcal{O}(L) ; \\ \|b_n\|_m \leq C_m \|a_n\|_W. \end{cases}$$

Considérons la série

$$g = \sum_{n \geq 0} b_n T^n \in \mathcal{C}_m[[T]].$$

Elle appartient à $\mathcal{C}_m\langle |T| \leq s \rangle$, donc à $\mathcal{C}_m\langle |T| \leq R_m \rangle$, et son image dans $\mathcal{O}(\overline{D}_L(r))$ coïncide avec celle de f . D'après la proposition 1.4.7, on a

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{C}_m\langle |T| \leq R_m \rangle} &= \sum_{n \geq 0} \|b_n\|_m R_m^n \\ &\leq C_m \sum_{n \geq 0} \|b_n\|_W R_m^n \\ &\leq C_m \frac{s}{s - R_m} \|f\|_{\overline{D}_W(s)}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\bar{\Omega}$ est un système de Banach fort.

Supposons, maintenant, que Ω est un système de Cousin. Par hypothèse, il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que, pour tous $m \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathcal{C}_m$, il existe $a^- \in \mathcal{B}_m^-$ et $a^+ \in \mathcal{B}_m^+$ tels que

$$\begin{cases} a = a^- + a^+ \text{ dans } \mathcal{C}_m ; \\ \|a^-\|_m^- \leq D \|a\|_m ; \\ \|a^+\|_m^+ \leq D \|a\|_m. \end{cases}$$

Soient $m \in \mathbf{N}$ et $f \in \bar{\mathcal{C}}_m = \mathcal{C}_m\langle |T| \leq R_m \rangle$. On peut l'écrire sous la forme

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n.$$

Les séries

$$f^- := \sum_{n \geq 0} a_n^- T^n \text{ et } f^+ := \sum_{n \geq 0} a_n^+ T^n$$

définissent alors respectivement des éléments de $\bar{\mathcal{B}}_m^-$ et $\bar{\mathcal{B}}_m^+$ tels que

$$\begin{cases} f = f^- + f^+ \text{ dans } \bar{\mathcal{C}}_m ; \\ \|f^-\|_m^- \leq D \|f\|_m ; \\ \|f^+\|_m^+ \leq D \|f\|_m. \end{cases}$$

Ceci montre que $\bar{\Omega}$ est un système de Cousin.

Supposons, finalement, que Ω est un système de Runge. Soient $m \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ et $\sigma \in \{-, +\}$. Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $s_1, \dots, s_p \in \bar{\mathcal{C}}_m$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe

$$s'_i = \sum_{n=0}^{d_i} a'_{i,n} T^n \in \mathcal{C}_m[T]$$

tel que $\|s'_i - s_i\|_m < \varepsilon/2$. On peut supposer que les d_i sont tous égaux. Notons d leur valeur commune. Posons $C = \sum_{n=0}^d R_m^n$. D'après la propriété de Runge pour $\mathcal{C}_m$, il existe $f \in \mathcal{B}_m^\sigma$ inversible et, pour tout $(i, n) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 0, d \rrbracket$, $a''_{i,n} \in \mathcal{B}_m^{-\sigma}$ tels que

- i) $\lim_{m' \rightarrow +\infty} \|f\|_{m'} \|f^{-1}\|_{m'} = 1$;
- ii) pour tout $(i, n) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 0, d \rrbracket$, on ait

$$\|f a'_{i,n} - a''_{i,n}\|_m < \varepsilon/(2C) \|f\|_m.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, posons

$$s''_i = \sum_{n=0}^{d_i} a''_{i,n} T^n \in \mathcal{C}_m[T].$$

On a alors

$$\|f s_i - s''_i\|_{\bar{\mathcal{C}}_m} \leq \|f(s_i - s'_i)\|_{\bar{\mathcal{C}}_m} + \|f s'_i - s''_i\|_{\bar{\mathcal{C}}_m} \leq \varepsilon \|f\|_{\bar{\mathcal{C}}_m}.$$

De plus, pour tout $m' \geq m$ et tout élément g de $\mathcal{C}_m$, on a $\|g\|_{\bar{\mathcal{C}}_{m'}} = \|g\|_{m'}$. On en déduit que

$$\lim_{m' \rightarrow +\infty} \|f\|_{\bar{\mathcal{C}}_{m'}} \|f^{-1}\|_{\bar{\mathcal{C}}_{m'}} = 1.$$

Ceci montre que $\bar{\Omega}$ est un système de Runge. □

Rappelons que, dans le cadre des systèmes de Cousin, on dispose de l'analogue du lemme de Cartan.

Théorème 8.1.15 ([Poi10a, théorème 6.2.7]). — Soit $\Omega = (\mathcal{B}_m^-, \mathcal{B}_m^+, \mathcal{C}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ un système de Cousin. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}^*$ et $A \in M_q(\mathcal{C}_m)$ vérifiant $\|A - I\|_m < \varepsilon$, il existe $C^- \in GL_q(\mathcal{B}_m^-)$ et $C^+ \in GL_q(\mathcal{B}_m^+)$ telles que

$$\begin{cases} A = C^- C^+ \text{ dans } GL_q(\mathcal{C}_m) ; \\ \|C^- - I\|_m^- \leq 4D \|A - I\|_m ; \\ \|C^+ - I\|_m^+ \leq 4D \|A - I\|_m, \end{cases}$$

où D est la constante apparaissant dans la définition de système de Cousin. □

Nous souhaitons maintenant démontrer que, pour un faisceau cohérent sur $M = K^- \cup K^+$, la propriété d'être globalement engendré passe de K^- et K^+ à M . Le lemme qui suit est une version légèrement modifiée de [Poi10a, lemme 6.2.9], dont la preuve reste essentiellement inchangée.

Lemme 8.1.16. — Soit $\Omega = (\mathcal{B}_m^-, \mathcal{B}_m^+, \mathcal{C}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ un système de Cousin associé à (K^-, K^+) . Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_M$ -modules, $p, q \in \mathbf{N}^*$, $T^- \in \mathcal{F}(K^-)^p$, $T^+ \in \mathcal{F}(K^+)^q$, $U \in M_{p,q}(\mathcal{O}(\mathcal{C}_m))$ et $V \in M_{q,p}(\mathcal{O}(\mathcal{C}_m))$ tels que qu'on ait

$$\begin{cases} T^- = U T^+ & \text{dans } \mathcal{F}(L)^p ; \\ T^+ = V T^- & \text{dans } \mathcal{F}(L)^q. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$ satisfaisant la conclusion du théorème 8.1.15. Supposons qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ et $\bar{U} \in M_{p,q}(\mathcal{B}_m^+)$ tels que

$$\|\bar{U} - U\|_m \|V\|_m < \varepsilon.$$

Alors, il existe $S^- \in \mathcal{F}(M)^p$ et $A^- \in GL_p(\mathcal{O}(K^-))$ tels que

$$S^- = A^- T^- \text{ dans } \mathcal{F}(K^-)^p.$$

Démonstration. — Posons $A = I + (\bar{U} - U)V \in M_p(\mathcal{C}_m)$. Nous avons alors $AT^- = \bar{U}T^+$ dans $\mathcal{F}(L)^p$.

Nous avons également $\|A - I\|_m < \varepsilon$, donc, par hypothèse, il existe $C^- \in GL_q(\mathcal{B}_m^-)$ et $C^+ \in GL_q(\mathcal{B}_m^+)$ telles que $A = C^+ C^-$ dans $GL_p(\mathcal{C}_m)$. On a alors

$$C^- T^- = (C^+)^{-1} A T^- = (C^+)^{-1} \bar{U} T^+.$$

On peut donc définir un élément S^- de $\mathcal{F}(M)^p$ par

$$\begin{cases} S^- = C^- T^- & \text{sur } K^- ; \\ S^- = (C^+)^{-1} \bar{U} T^+ & \text{sur } K^+. \end{cases}$$

Il vérifie la propriété requise avec la matrice A^- qui est l'image de C^- dans $GL_p(\mathcal{O}(K^-))$. $\square$

Nous en déduisons un analogue de [Poi10a, théorème 6.2.10].

Théorème 8.1.17. — Soit $\Omega = (\mathcal{B}_m^-, \mathcal{B}_m^+, \mathcal{C}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ un système de Cousin-Runge associé à (K^-, K^+) . Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_M$ -modules. Supposons qu'il existe deux entiers p et q , une famille $(t_1^-, \dots, t_p^-)$ d'éléments de $\mathcal{F}(K^-)$ et une famille $(t_1^+, \dots, t_q^+)$ d'éléments de $\mathcal{F}(K^+)$ dont les restrictions à L engendrent le même sous- $\mathcal{O}(L)$ -module de $\mathcal{F}(L)$. Alors, il existe $s_1^-, \dots, s_p^-, s_1^+, \dots, s_q^+ \in$

$\mathcal{F}(M)$, $A^- \in GL_p(\mathcal{O}(K^-))$ et $A^+ \in GL_q(\mathcal{O}(K^+))$ tels que

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = A^- \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{F}(K^-)^p$$

et

$$\begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = A^+ \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{F}(K^+)^q.$$

En outre, on peut choisir $s_1^-, \dots, s_p^-, s_1^+, \dots, s_q^+$ de façon que, pour tout compact K^0 contenu dans K^- (resp. K^+) tel que $(t_1^-, \dots, t_p^-)_{|K^0}$ engendre le $\mathcal{O}(K^0)$ -module $\mathcal{F}(K^0)$ (resp. $(t_1^+, \dots, t_q^+)_{|K^0}$ engendre le $\mathcal{O}(K^0)$ -module $\mathcal{F}(K^0)$), la famille $(s_1^-, \dots, s_p^-, s_1^+, \dots, s_q^+)_{|K^0}$ engendre encore le $\mathcal{O}(K^0)$ -module $\mathcal{F}(K^0)$.

Démonstration. — Posons

$$T^- = \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ et } T^+ = \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, il existe $m \in \mathbf{N}$, $U = (u_{a,i}) \in M_{p,q}(\mathcal{C}_m)$ et $V = (v_{b,j}) \in M_{q,p}(\mathcal{C}_m)$ tels que l'on ait

$$\begin{cases} T^- = U T^+ \text{ dans } \mathcal{F}(L)^p ; \\ T^+ = V T^- \text{ dans } \mathcal{F}(L)^q. \end{cases}$$

Considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$ satisfaisant la conclusion du théorème 8.1.15. D'après la remarque 8.1.9, il existe un entier $m' \geq m$, un élément inversible f de $\mathcal{B}_{m'}^-$ et des éléments $\bar{u}_{a,i}$ de $\mathcal{B}_{m'}^+$, pour $(a,i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, tels que, pour tous $(a,i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ et $(b,j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait

$$\|f u_{a,i} - \bar{u}_{a,i}\|_{m'} \|f^{-1} v_{b,j}\|_{m'} \leq \|f u_{a,i} - \bar{u}_{a,i}\|_{m'} \|f^{-1}\|_{m'} \|v_{b,j}\|_{m'} < \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{cases} f T^- = (f U) T^+ \text{ dans } \mathcal{F}(L)^p ; \\ T^+ = (f^{-1} V) (f T^-) \text{ dans } \mathcal{F}(L)^q \end{cases}$$

et, en posant $\bar{U} = (\bar{u}_{a,i}) \in M_{p,q}(\mathcal{B}_{m'}^+)$,

$$\|\bar{U} - f U\| \|f^{-1} V\| < \varepsilon.$$

On se trouve donc sous les hypothèses du lemme 8.1.16. On en déduit qu'il existe $S^- \in \mathcal{F}(M)^p$ et $A^- \in GL_p(\mathcal{O}(K^-))$ tels que

$$S^- = A^- f T^- \text{ dans } \mathcal{F}(K^-)^p.$$

Le premier résultat s'en déduit en utilisant le fait que f est inversible sur K^- . Le résultat pour K^+ se démontre identiquement.

La remarque finale découle de la construction et de l'inversibilité des matrices A^- et A^+ . $\square$

Nous en déduisons finalement un analogue raffiné et corrigé de [Poi10a, corollaire 6.2.11]. (L'hypothèse de surjectivité sur L a malencontreusement été omise dans l'énoncé original.)

Corollaire 8.1.18. — *Supposons qu'il existe un système de Cousin-Runge fort associé à (K^-, K^+) . Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_M$ -modules. Supposons qu'il existe des morphismes surjectifs $\varphi^-: \mathcal{O}_{K^-}^p \rightarrow \mathcal{F}|_{K^-}$ et $\varphi^+: \mathcal{O}_{K^+}^q \rightarrow \mathcal{F}|_{K^+}$ tels que les morphismes induits $\mathcal{O}^p(L) \rightarrow \mathcal{F}(L)$ et $\mathcal{O}^q(L) \rightarrow \mathcal{F}(L)$ soient surjectifs. Alors, $\mathcal{F}$ est globalement engendré sur M .*

Plus précisément, il existe un morphisme surjectif $\varphi: \mathcal{O}^{p+q} \rightarrow \mathcal{F}$ tel que, pour tout compact K^0 contenu dans K^- (resp. K^+) tel que le morphisme induit $\mathcal{O}^p(K^0) \rightarrow \mathcal{F}(K^0)$ (resp. $\mathcal{O}^q(K^0) \rightarrow \mathcal{F}(K^0)$) soit surjectif, le morphisme induit $\mathcal{O}^{p+q}(K^0) \rightarrow \mathcal{F}(K^0)$ soit surjectif. $\square$

8.1.2. Algèbres de domaines polynomiaux. — Nous présentons ici l'exemple principal de système de Cousin-Runge fort que nous utiliserons dans la suite de ce texte.

Posons $X := \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ et notons $\pi: X \rightarrow B$ le morphisme structural. Pour toute partie V de B , on note $X_V := \pi^{-1}(V)$.

Proposition 8.1.19. — *Soit V une partie compacte et décente de B_{um} . Soit $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ unitaire non constant. Soient $r, s \in \mathbf{R}$ tels que $0 < r \leq s$. Soient K^- et K^+ deux parties compactes de X_V telles que*

$$\begin{cases} K^- \subset \{x \in X_V : |P(x)| \leq s\} ; \\ K^+ \subset \{x \in X_V : |P(x)| \geq r\} ; \\ K^- \cap K^+ = \{x \in X_V : r \leq |P(x)| \leq s\}. \end{cases}$$

Alors, il existe un système de Cousin associé à (K^-, K^+) . Si $r = s$, alors il existe un système de Cousin-Runge associé à (K^-, K^+) .

Supposons, en outre, qu'il existe une suite décroissante $(W_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de B sur lesquels les coefficients de P sont définis et formant une base de voisinages de V , une suite $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $]0, r[$ strictement croissante de limite r et une suite $(v_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $]s, +\infty[$ strictement décroissante de limite s telles que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, le compact $\overline{C}_{W_m}(u_m, v_m)$ satisfasse la condition $(\mathcal{O}_{N_{P(S)-T}})$. Alors, il existe un système de Banach fort (et donc de Cousin fort, et même de Cousin-Runge fort si $s = r$) associé à (K^-, K^+) .

Démonstration. — Puisque K^+ est compact, il existe un nombre réel $t > s$ qui majore la fonction $|P|$ sur K^+ . Nous pouvons supposer que $K^+ = \overline{C}_V(P; r, t)$ et $K^- = \overline{C}_V(P; s)$. Posons $L =: K^- \cap K^+ = \overline{C}_V(P; r, s)$.

Soient $(W_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de parties compactes de B sur lesquels les coefficients de P sont définis et formant une base de voisinages de V , $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]0, r[$ strictement croissante de limite r et $(v_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]s, +\infty[$ strictement décroissante de limite s .

D'après la proposition 3.1.3 appliquée avec $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{O}(W_0)}\langle |T| \leq t \rangle$, il existe $w \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que, pour tout entier m , la semi-norme résiduelle $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle |T| \leq v_m \rangle, w, \text{rés}}$ définie sur $\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle |T| \leq v_m \rangle[S]/(P(S) - T)$ soit une norme pour laquelle cet espace est complet. On notera $(\mathcal{B}_m^-, \|\cdot\|_m^-)$ cet anneau de Banach. Les mêmes propriétés valent pour $\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle u_m \leq |T| \leq t \rangle[S]/(P(S) - T)$, que l'on notera $(\mathcal{B}_m^+, \|\cdot\|_m^+)$, et $\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle[S]/(P(S) - T)$, que l'on notera $(\mathcal{C}_m, \|\cdot\|_m)$. On peut supposer que le même nombre réel w convient pour tous ces anneaux.

Avec les morphismes évidents, on vient de définir un système de Banach Ω associé à (K^-, K^+) . Le seul point délicat à vérifier est le fait que le morphisme

$$\text{colim}_{m \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_m \longrightarrow \mathcal{O}(L)$$

soit un isomorphisme. C'est l'objet du corollaire 1.6.10.

Démontrons maintenant que Ω est un système de Cousin. Soient $m \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathcal{C}_m$. On peut supposer que $f \neq 0$. Il existe alors un entier $d \in \mathbf{N}$ et un élément $F = \sum_{i=0}^d a_i S^i$ de $\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle[S]$ tel que $\|F\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle, w} \leq 2\|f\|_m$. En utilisant la description explicite de $\overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle$ comme anneau de séries de Laurent, on montre que, pour tout $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, il existe $a_i^- \in \overline{\mathcal{O}(W_m)}\langle |T| \leq v_m \rangle$ et

$a_i^+ \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq t \rangle$ tels que

$$\begin{cases} a_i = a_i^- + a_i^+ \text{ dans } \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle ; \\ \|a_i^-\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle |T| \leq v_m \rangle} \leq \|a_i\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle} ; \\ \|a_i^+\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq t \rangle} \leq \|a_i\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle}. \end{cases}$$

En posant $F^- = \sum_{i=0}^d a_i^- S^i \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle |T| \leq v_m \rangle [S]$ et $F^+ = \sum_{i=0}^d a_i^+ S^i \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq t \rangle [S]$ et en notant f^- et f^+ les classes résiduelles respectives modulo $P(S) - T$, on obtient le résultat désiré avec la constante $D = 2$ (indépendante de m).

Supposons que $r = s$ et démontrons que Ω est un système de Runge. Soient $m \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$. Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{C}_m$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, choisissons un élément $S_i = \sum_{k=0}^d A_{i,k} S^k$ de $\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle [S]$ qui relève s_i . Remarquons qu'il est loisible de supposer l'entier d indépendant de i .

Commençons par traiter le cas $\sigma = -$. Pour tous $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, il existe $A'_{i,k} \in \overline{\mathcal{O}(W_m)}[T, T^{-1}]$ tel que

$$\|A_{i,k} - A'_{i,k}\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle} w^k < \varepsilon / (d + 1).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $S'_i = \sum_{k=0}^d A'_{i,k} S^k$ et on a alors

$$\|S_i - S'_i\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle, w} < \varepsilon.$$

Tout élément S'_i se prolonge en un élément de $\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq t \rangle [S]$ et définit donc un élément s'_i de $\mathcal{B}_m^+$ par passage au quotient. La propriété d'approximation de l'énoncé est alors vérifiée avec $f = 1$. La condition

$$\lim_{m' \rightarrow \infty} \|f\|_m \|f^{-1}\|_m = 1$$

est évidemment vérifiée aussi.

Traitons maintenant le cas $\sigma = +$. Pour tous $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, notons

$$A_{i,k} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_{i,k}^l T^l \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle.$$

Il existe un entier $l_0 \leq 0$ tel que, pour tous $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on ait

$$\sum_{l \leq l_0 - 1} \|a_{i,k}^l\|_{W_m} \max(u_m^l, v_m^l) < \frac{\varepsilon}{(d + 1)w^k}.$$

Posons $F = T^{-l_0} \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq t \rangle [S]$. C'est un élément inversible. Notons f son image dans $\mathcal{B}_m^+$.

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, posons

$$A'_{i,k} = \sum_{l \geq l_0} a_{i,k}^l T^l.$$

On a

$$FA'_{i,k} = \sum_{l \geq 0} a_{i,k}^{l+l_0} T^l \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle |T| \leq v_m \rangle.$$

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, posons

$$S'_i = \sum_{k=0}^d FA'_{i,k} S^k \in \overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle |T| \leq v_m \rangle [S]$$

et notons s'_i son image dans $\mathcal{B}_m^-$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \|fs_i - s'_i\|_m &\leq \|f\|_m \|s_i - f^{-1}s'_i\|_m \\ &\leq \|f\|_m \left\| \sum_{k=0}^d (A_{i,k} - A'_{i,k}) S^k \right\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle, w} \\ &< \varepsilon \|f\|_m. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $m' \geq m$, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{m'} \|f^{-1}\|_{m'} &\leq \|T^{-l_0}\|_{\overline{\mathcal{O}(W_{m'})} \langle u_{m'} \leq |T| \leq v_{m'} \rangle} \|T^{l_0}\|_{\overline{\mathcal{O}(W_{m'})} \langle u_{m'} \leq |T| \leq v_{m'} \rangle} \\ &\leq \left(\frac{v'_m}{u_{m'}} \right)^{|l_0|}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers $s/r = 1$ lorsque m' tend vers l'infini (et c'est le seul endroit où l'égalité $s = r$ est utilisée).

Finalement, supposons que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, le compact $\overline{C}_{W_m}(u_m, v_m)$ satisfait la condition $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$ et démontrons que Ω est un système de Banach fort.

Soit U un voisinage compact de L . Il contient un voisinage de la forme $\overline{C}_{W_{m_0}}(P; u_{m_0}, v_{m_0})$. D'après la condition $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $h \in \mathcal{O}(\overline{C}_{W_{m_0}}(u_{m_0}, v_{m_0}))[S]/(P(S) - T)$, on ait

$$\|h\|_{\mathcal{O}(\overline{C}_{W_{m_0}}(u_{m_0}, v_{m_0})), w, \text{rés}} \leq A \|h\|_{\overline{C}_{W_{m_0}}(P; u_{m_0}, v_{m_0})} \leq A \|h\|_U.$$

Soit $m \geq m_0 + 1$. Alors, d'après la proposition 1.4.7, pour tout $k \in \overline{\mathcal{O}(W_{m_0})} \langle u_{m_0} \leq |T| \leq v_{m_0} \rangle$, on a

$$\|k\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle} \leq \left(\frac{u_{m_0}}{u_m - u_{m_0}} + \frac{v_{m_0}}{v_{m_0} - v_m} \right) \|k\|_{\mathcal{O}(\overline{C}_{W_{m_0}}(u_{m_0}, v_{m_0}))}.$$

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. D'après le corollaire 1.6.8, il existe un élément g de $\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle [S] / (P(S) - T)$ dont l'image dans $\mathcal{O}(L)$ coïncide avec celle de f . Les égalités précédentes montrent par ailleurs que l'on a

$$\begin{aligned} \|g\|_{\overline{\mathcal{O}(W_m)} \langle u_m \leq |T| \leq v_m \rangle, w, \text{rés}} &\leq \left(\frac{u_{m_0}}{u_m - u_{m_0}} + \frac{v_{m_0}}{v_{m_0} - v_m} \right) \|g\|_{\mathcal{O}(\overline{C}_{W_{m_0}}(u_{m_0}, v_{m_0})), w, \text{rés}} \\ &\leq A \left(\frac{u_{m_0}}{u_m - u_{m_0}} + \frac{v_{m_0}}{v_{m_0} - v_m} \right) \|f\|_U. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit. $\square$

Dans la proposition 8.1.19, la difficulté réside, bien sûr, dans la vérification de la condition supplémentaire finale portant sur la propriété $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$. Remarquons que le corollaire 3.1.25 fournit un moyen d'y parvenir dans le cas où tous les points du compact V sont ultramétriques très typiques.

Mentionnons également le résultat suivant, particulièrement adapté au voisinage de points dont le corps résiduel est de caractéristique nulle ou de valuation non triviale.

Lemme 8.1.20. — *Soient V une partie compacte de B_{um} et $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ unitaire non constant. Soient $r, s \in \mathbf{R}$ tels que $0 < r \leq s$. Supposons que le polynôme $R(T) = \text{Rés}_S(P(S) - T, P'(S))$ ne s'annule ni sur $\overline{C}_V(r, r)$, ni sur $\overline{C}_V(s, s)$.*

Alors, il existe un voisinage U de V sur lequel les coefficients de P sont définis et des nombres réels $r_0 \in]0, r[$ et $s_0 \in]s, +\infty[$ tels que, pour toute partie compacte W de U contenant V , tout $u \in [r_0, r]$ et tout $v \in [s, s_0]$, le compact $\overline{C}_W(u, v)$ satisfasse la condition $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$.

En particulier, la condition finale de la proposition 8.1.19 est satisfaite.

Démonstration. — Soit U un voisinage de V sur lequel les coefficients de P sont définis. Considérons le polynôme $R(T) = \text{Rés}_S(P(S) - T, P'(S)) \in \mathcal{O}(U)[T]$. Par hypothèse, il ne s'annule ni sur $\overline{C}_V(r, r)$, ni sur $\overline{C}_V(s, s)$. Quitte à restreindre U , on peut supposer qu'il ne s'annule pas non plus sur $\overline{C}_U(r, r)$ et $\overline{C}_U(s, s)$, et même sur $\overline{C}_U(u, u)$ et $\overline{C}_U(v, v)$, pour tous $u \in [r_0, r]$ et $v \in [s, s_0]$ avec $r_0 < r$ et $s_0 > s$ bien choisis. Le résultat découle alors de la proposition 3.1.27. $\square$

8.1.3. Arbres de Cousin-Runge. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Nous introduisons maintenant une nouvelle notion qui sera utile pour effectuer des récurrences sur la dimension.

Définition 8.1.21. — On appelle *arbre binaire* un arbre fini $\mathcal{T}$ avec une racine r dont tout nœud v qui n'est pas une feuille possède exactement deux fils v^- et v^+ . Dans la représentation graphique de $\mathcal{T}$, nous placerons v^- et v^+ respectivement à gauche et à droite de v .

On appelle *nœud interne* de $\mathcal{T}$ tout nœud qui n'est pas une feuille. On note $\mathcal{I}(\mathcal{T})$ l'ensemble de ces nœuds.

Définition 8.1.22. — Soit V une partie compacte de X . On appelle *arbre binaire de compacts* sur V un arbre binaire $\mathcal{T}$ dont chaque nœud v est étiqueté par une partie compacte $K(v)$ de V et qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) la racine r de $\mathcal{T}$ est étiquetée par $K(r) = V$;
- ii) pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}$, on a

$$K(v) = K(v^-) \cup K(v^+).$$

En particulier, la famille $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ des compacts associés aux feuilles de $\mathcal{T}$ est un recouvrement de V . Étant donné un recouvrement $\mathcal{U}$ de V , on dit que l'*arbre* $\mathcal{T}$ est *adapté* à $\mathcal{U}$ si $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ est plus fin que $\mathcal{U}$.

On appelle *arbre de Cousin* (resp. Cousin-Runge, etc.) sur V tout arbre binaire de compacts sur V qui vérifie la propriété suivante :

- iii) pour tout nœud interne v , il existe un système de Cousin (resp. Cousin-Runge, etc.) associé à $(K(v^-), K(v^+))$.

Un arbre binaire de compacts $\mathcal{T}$ sur V est dit à *intersections simples* si, pour tout nœud v de $\mathcal{T}$ qui n'est pas une feuille, il existe une feuille $f(v^-)$ du sous-arbre issu de v^- et une feuille $f(v^+)$ du sous-arbre issu de v^+ telles que

$$K(v^-) \cap K(v^+) = K(f(v^-)) \cap K(f(v^+)).$$

On dit que le compact V de X possède *assez d'arbres* de Cousin (resp. Cousin-Runge, etc.) si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de V , il existe un arbre de Cousin (resp. Cousin-Runge, etc.) sur V adapté à $\mathcal{U}$.

Proposition 8.1.23. — Soit V une partie compacte de X . Soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\overline{D}_V(\mathbf{r})}$ -modules de type fini. Supposons qu'il existe un arbre de Cousin-Runge fort à intersections simples $\mathcal{T}$ sur V et, pour toute feuille f de $\mathcal{T}$, un morphisme surjectif $\varphi_f: \mathcal{O}_{\overline{D}_{K(f)}(\mathbf{r})}^{n_f} \rightarrow \mathcal{F}_{|\overline{D}_{K(f)}(\mathbf{r})}$ vérifiant la propriété suivante : pour toute feuille g de $\mathcal{T}$, le morphisme $\mathcal{O}^{n_f}(\overline{D}_{K(f) \cap K(g)}(\mathbf{r})) \rightarrow \mathcal{F}(\overline{D}_{K(f) \cap K(g)}(\mathbf{r}))$ induit par φ_f est surjectif.

Alors, le faisceau $\mathcal{F}$ est globalement engendré sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$.

Démonstration. — Modifions l'arbre binaire de compacts $\mathcal{T}$ en remplaçant chaque étiquette K par $\overline{D}_K(\mathbf{r})$. On obtient un arbre binaire de compacts $\mathcal{T}'$ sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Il est encore à intersections simples, et également de Cousin-Runge fort, d'après le lemme 8.1.14. Pour tout nœud v' de $\mathcal{T}'$, notons $K'(v')$ son étiquette.

On souhaite, à présent, démontrer que, pour tout nœud v' de $\mathcal{T}'$, il existe un entier $n_{v'}$ et un morphisme surjectif $\varphi_{v'} : \mathcal{O}_{K'(v')}^{n_{v'}} \rightarrow \mathcal{F}_{|K'(v')}$ qui induit un morphisme surjectif $\mathcal{O}^{n_{v'}}(K'(f') \cap K'(g')) \rightarrow \mathcal{F}(K'(f') \cap K'(g'))$, pour toute feuille f' de $\mathcal{T}'$ issue de v' et toute feuille g' de $\mathcal{T}'$. Il suffit, pour ce faire, d'appliquer le corollaire 8.1.18 de façon répétée en remontant dans l'arbre, l'hypothèse de surjectivité globale sur les intersections étant assurée par la condition d'intersections simples sur $\mathcal{T}'$.

En particulier, lorsque v' est la racine de $\mathcal{T}'$, d'étiquette $\overline{D}_V(\mathbf{r})$, on obtient le résultat souhaité. $\square$

8.1.4. Au-dessus d'un corps ultramétrique. — Dans cette section, nous fixons un corps valué ultramétrique complet $(k, |\cdot|)$. Nous allons construire des arbres de Cousin-Runge sur certaines parties de la droite analytique $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$.

Définition 8.1.24. — Soient $x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ un point de type 2 ou 3. On dit qu'un ouvert U de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ est un *voisinage élémentaire* de x dans $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$, un ensemble fini F de composantes connexes relativement compactes de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$ et, pour tout élément C de F , un point rigide x_C de C tels que

$$U = C(P_F, |P_F(x)| - \varepsilon, |P_F(x)| + \varepsilon),$$

où $P_F := \prod_{C \in F} \mu_{x_C}$.

Soient $x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ un point de type 1 ou 4. On dit qu'un ouvert U de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ est un *voisinage élémentaire* de x dans $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et un polynôme irréductible $P \in k[T]$ tels que

$$U = D(P, |P(x)| + \varepsilon).$$

On dit qu'un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ est un *recouvrement élémentaire* si tout élément U de $\mathcal{U}$ est voisinage élémentaire de l'un de ses points.

Remarque 8.1.25. — Les lemmes 1.5.6 et 1.5.7 assurent que tout point de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ possède une base de voisinages élémentaires, et donc que tout recouvrement de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ peut être raffiné en un recouvrement élémentaire.

Définition 8.1.26. — Soient X un espace analytique et V une partie compacte de X . Soient $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ et $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.

Soit $\mathcal{T}$ un arbre binaire. Pour tout nœud v de $\mathcal{T}$, notons G_v (resp. D_v) l'ensemble des nœuds $w \neq v$ situés entre la racine et v et tels que v soit à gauche (resp. à droite) de w , c'est-à-dire dans le sous-arbre issu du fils gauche (resp. droit), cf. figure 11.

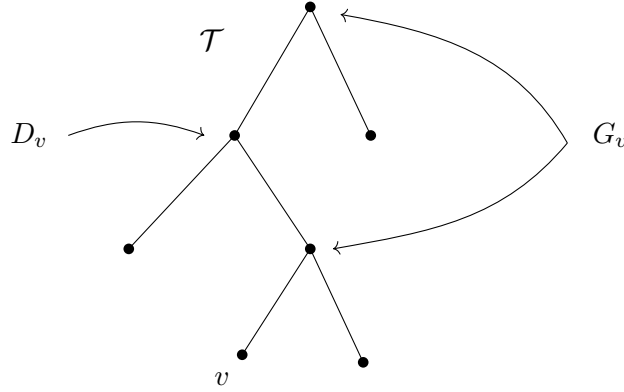


FIGURE 11. Sous-ensembles G_v et D_v .

Soit $\mathcal{E} = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T})}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}(V)[T] \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ ou $\mathcal{B}(V)[T] \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ indexée par l'ensemble $\mathcal{I}(\mathcal{T})$ des nœuds internes de $\mathcal{T}$. On définit alors un *arbre binaire de compacts* $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ sur $\overline{D}_V(P; a)$ dit *élémentaire* en étiquetant tout nœud v de $\mathcal{T}$ par

$$K(v) = \overline{D}_V(P; a) \cap \bigcap_{w \in G_v} \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_w(x)| \leq s_w\} \\ \cap \bigcap_{w \in D_v} \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_w(x)| \geq s_w\}.$$

On dit que l'arbre $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est *bien découpé* si, pour tout nœuds internes $v \neq v'$, on a

$$\{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_v(x)| = s_v\} \cap \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_{v'}(x)| = s_{v'}\} = \emptyset.$$

Remarque 8.1.27. — Pour tout nœud interne v , on a

$$\begin{cases} K(v^-) = K(v) \cap \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_v(x)| \leq s_v\} ; \\ K(v^+) = K(v) \cap \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_v(x)| \geq s_v\}. \end{cases}$$

En particulier, si $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est bien découpé, on a

$$\begin{cases} K(v^-) = \{x \in \mathbf{A}_V^{1,\text{an}} : |P_v(x)| \leq s_v\} ; \\ K(v^-) \cap K(v^+) = \{x \in \mathbf{A}_V^{1,\text{an}} : |P_v(x)| = s_v\}. \end{cases}$$

Nous retrouvons ainsi une partie des hypothèses de la proposition 8.1.19.

Remarquons encore que, si $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est bien découpé, alors, pour tout nœud interne v , on a

$$\{x \in \mathbf{A}_V^{1,\text{an}} : |P_v(x)| = s_v\} = K(f^d(v^-)) \cap K(f^d(v^+)),$$

où $f^d(v^-)$ (resp. $f^d(v^+)$) désigne la feuille la plus à droite du sous-arbre issu de v^- (resp. v^+). En particulier, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est à intersections simples. On peut également vérifier que, pour toutes feuilles $f \neq g$ de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, l'intersection $K(f) \cap K(g)$ est soit vide, soit de la forme $\{x \in \mathbf{A}_V^{1,\text{an}} : |P_v(x)| = s_v\}$ pour un certain nœud interne v .

Définition 8.1.28. — On dit qu'une partie E de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ est une *étoile* s'il existe un polynôme irréductible $P \in k[T]$, un nombre réel $a \geq 0$ et une famille finie $\mathcal{C}$ de composantes connexes de $\overline{D}(P, a) \setminus \{\eta\}$, où η désigne l'unique point du bord de $\overline{D}(P, a)$, tels que

$$E = \overline{D}(P, a) \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Exemple 8.1.29. — Les disques et les couronnes, et plus généralement les parties de la forme $\overline{D}(P, s)$ et $\overline{C}(P; s, s)$, avec $P \in k[T]$ irréductible et $s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, sont des étoiles.

Proposition 8.1.30. — Soit $E \subset \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ une étoile. Alors, pour toute famille d'ouverts $\mathcal{U}$ de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ recouvrant E , il existe un arbre binaire $\mathcal{T}$ et une famille $\mathcal{E} = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T})}$ d'éléments de $k[T] \times \mathbf{R}_{>0}$, les polynômes P_v étant irréductibles, indexée par l'ensemble des nœuds internes de $\mathcal{T}$ tels que l'arbre binaire de compacts élémentaire $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ sur E soit bien découpé, adapté à $\mathcal{U}$ et de Cousin-Runge fort.

En outre, si k est parfait ou de valuation non triviale, on peut supposer que, pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}$, le polynôme $R_v(T) = \text{Rés}_S(P_v(S) - T, P'_v(S))$ ne s'annule pas sur $\overline{C}(s_v, s_v)$.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un polynôme irréductible $P \in k[T]$, un nombre réel $a \geq 0$ et une famille finie $\mathcal{C}$ de composantes connexes de

$\overline{D}(P, a) \setminus \{\eta\}$, où η désigne l'unique point du bord de $\overline{D}(P, a)$, tels que

$$E = \overline{D}(P, a) \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Soit $\mathcal{U}$ une famille d'ouverts de $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ recouvrant E . D'après les lemmes 1.5.6 et 1.5.7, on peut supposer que tout élément de $\mathcal{U}$ est voisinage élémentaire de d'un point de E . En outre, par compacité de E , on peut supposer que $\mathcal{U}$ est fini, de cardinal $n \geq 1$. Démontrons le résultat pour de tels recouvrements par récurrence sur n .

Traisons tout d'abord le cas où $n = 1$. Notons $\mathcal{T}$ l'arbre binaire réduit à sa racine. En considérant la famille vide $\mathcal{E}$, on obtient un arbre binaire de compacts $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ sur E réduit à sa racine, étiquetée par E . Les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

Supposons désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est démontré pour les recouvrements élémentaires de cardinal inférieur à $n - 1$. Soit un élément U de $\mathcal{U}$ contenant η . C'est un voisinage élémentaire d'un point x de E .

Si x est de type 1 ou 4, alors tout voisinage élémentaire de x contenant η contient E tout entier, et nous sommes donc ramenés au cas $n = 1$ déjà traité.

Nous pouvons donc supposer que x est de type 2 ou 3. Il existe alors un ensemble $F = \{C_1, \dots, C_p\}$ de composantes connexes bornées de $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}} \setminus \{x\}$, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, un polynôme irréductible P_i s'annulant en un point de C_i et deux nombres réels r, s avec $r < |P_F(x)| < s$ tels que $U = \mathring{D}(P_F; r, s)$, où $P_F = \prod_{1 \leq i \leq p} P_i$. Remarquons que, puisque U contient η , on a

$$U \cap E = \{y \in \mathbf{A}_k^{1, \text{an}} : r < |P_F(y)| \leq |P_F(\eta)|\} \cap E.$$

Si $r < 0$, alors $\mathring{D}(P_F; r, s) = \mathring{D}(P_F, s)$ contient E , et nous sommes de nouveau ramenés au cas $n = 1$. Nous pouvons donc supposer que $r \geq 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Le compact $C_i \setminus U$ est de la forme $\overline{D}(P_i; a_i)$ et il est recouvert par $\mathcal{U} \setminus \{U\}$. Il existe $c_i > a_i$ tel que $\overline{D}(P_i; c_i)$ soit encore contenu dans C_i et recouvert par $\mathcal{U} \setminus \{U\}$.

Si k est parfait, le polynôme P_i est séparable. Si k est de valuation non triviale, on peut perturber légèrement les coefficients de P_i de façon à le rendre séparable sans changer les disques $\overline{D}(P_i; b_i)$ pour $b_i \in [a_i, c_i]$. Alors, le polynôme $R_i(T) = \text{Rés}_S(P_i(S) - T, P'_i(S))$ n'est pas nul. Quitte à diminuer c_i , on peut supposer qu'il ne s'annule pas sur $\overline{C}(b_i, b_i)$, pour tout $b_i \in]a_i, c_i[$.

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $\overline{D}(P_i, a_i)$, il existe un arbre binaire $\mathcal{T}_i$ et une famille $\mathcal{E}_i = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T}_i)}$ d'éléments de $k[T] \times \mathbf{R}_{>0}$ tels que l'arbre binaire de compacts $\mathcal{T}_i(\mathcal{E}_i)$ sur $\overline{D}(P_i, a_i)$ satisfasse les propriétés de l'énoncé (y compris la propriété finale si k est parfait ou de valuation non triviale). Quitte à diminuer c_i , on peut supposer que, pour tout $b_i \in [a_i, c_i]$, l'arbre binaire de compacts $\mathcal{T}_i(\mathcal{E}_i)$ sur $\overline{D}(P_i, b_i)$ satisfait encore ces propriétés. Remarquons que, pour tout $b_i \in]a_i, c_i]$ et tout nœud interne de $\mathcal{T}_i$, on a

$$(a) \quad \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_v(x)| = s_v\} \cap \{x \in \mathbf{A}_V^{1, \text{an}} : |P_i(x)| = b_i\} = \emptyset.$$

Rappelons que $U = \mathring{D}(P_F; r, s)$. Il existe donc $r' \in]r, |P_F(x)|[$ tel que, en posant

$$V := \{y \in \mathbf{A}_k^{1, \text{an}} : r' \leq |P_F(y)| \leq |P_F(z)|\} \cap E \subset U,$$

on ait, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $C_i \setminus V \subset \mathring{D}(P_i; c_i)$.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Il existe $b_i \in]a_i, c_i[$ tel que l'on ait

$$(b) \quad \overline{D}(P_i; b_i) \cap V = \{y \in \mathbf{A}_k^{1, \text{an}} : |P_i(y)| = b_i\}.$$

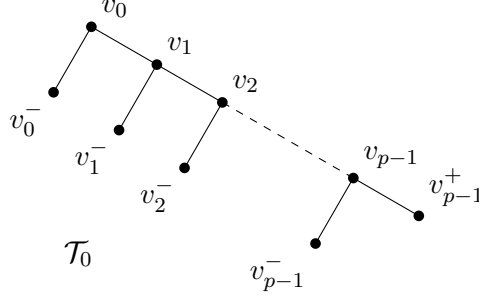
On a alors

$$(c) \quad V = E \cap \bigcap_{1 \leq i \leq p} \{y \in \mathbf{A}_k^{1, \text{an}} : |P_i(y)| \geq b_i\}.$$

Définissons maintenant un arbre binaire de compacts sur E . Commençons par considérer l'arbre « peigne » à $2p + 1$ nœuds avec les dents à gauche, cf. figure 12. Pour l'obtenir, on part d'un arbre réduit à sa racine et on effectue p fois l'opération qui consiste à ajouter un fils gauche et un fils droit à la feuille la plus à droite. Notons $\mathcal{T}_0$ cet arbre. Ses nœuds internes forment un ensemble totalement ordonné $v_0 \geq \dots \geq v_{p-1}$, où v_0 désigne la racine et v_{p-1} le père des feuilles les plus basses.

Considérons maintenant la famille $\mathcal{E}_0 = (P_i, b_i)_{1 \leq i \leq p}$ et l'arbre binaire de compacts élémentaire $\mathcal{T}_0(\mathcal{E}_0)$ sur E qui lui est associé. Ses feuilles sont v_0^- (étiquetée par $\overline{D}(P_1, b_1)$), $\dots$, v_{p-1}^- (étiquetée par $\overline{D}(P_p, b_p)$) et v_{p-1}^+ (étiquetée par V , d'après (c)). Puisque, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\overline{D}(P_i, b_i)$ est contenu dans C_i , $\mathcal{T}_0(\mathcal{E}_0)$ est bien découpé.

D'après (b), toutes les intersections $K(v^-) \cap K(v^+)$ sont de la forme $\overline{C}(P_i; b_i, b_i)$, avec $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On déduit alors de la proposition 8.1.19 que $\mathcal{T}_0(\mathcal{E}_0)$ est un arbre de Cousin-Runge fort sur E .

FIGURE 12. Un arbre peigne à $2p + 1$ nœuds.

Construisons maintenant un autre arbre binaire de compacts $\mathcal{T}$ sur E à partir de $\mathcal{T}_0(\mathcal{E}_0)$ en remplaçant, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la feuille v_{i-1}^- , étiquetée par $\overline{D}(P_i, b_i)$, par l'arbre $\mathcal{T}_i(\mathcal{E}_i)$. L'arbre $\mathcal{T}$ est encore un arbre de Cousin-Runge fort sur E . On vérifie aisément que c'est un arbre élémentaire, associé à la famille obtenue en réunissant $\mathcal{E}_0$ et les $\mathcal{E}_i$, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

L'arbre $\mathcal{T}$ est adapté à $\mathcal{U}$ car chacune de ses feuilles est soit une feuille de l'un des $\mathcal{T}_i(\mathcal{E}_i)$, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit V . Le fait qu'il soit bien découpé découle du fait que $\mathcal{T}_0(\mathcal{E}_0)$ est bien découpé et de (a). $\square$

8.1.5. Au-dessus d'une base ultramétrique. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Nous souhaitons montrer que la propriété de posséder assez d'arbres de Cousin-Runge se transfère d'une partie de l'espace X à un disque fermé relatif au-dessus de cette partie.

Corollaire 8.1.31. — Soit x un point décent (resp. très décent) de X_{um} . Posons $\mathbf{A}_X^1 := X \times_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$ et notons $\pi: \mathbf{A}_X^1 \rightarrow X$ le morphisme de projection. Soit E une étoile de $\pi^{-1}(x)$. Alors, pour toute famille d'ouverts $\mathcal{U}$ de $\mathbf{A}_X^1$ recouvrant E , il existe un arbre binaire $\mathcal{T}$ et une famille $\mathcal{E} = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T})}$ d'éléments de $\mathcal{O}_x[T] \times \mathbf{R}_{>0}$ indexée par l'ensemble des nœuds internes de $\mathcal{T}$ tels que l'arbre binaire de compacts élémentaire $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ sur E soit bien découpé, adapté à $\mathcal{U}$ et de Cousin-Runge (resp. de Cousin-Runge fort). De plus, si $f \neq g$ sont des feuilles de $\mathcal{T}$, alors $K(f) \cap K(g)$ est une étoile de $\pi^{-1}(x)$.

En outre, si $\mathcal{H}(x)$ est parfait ou de valuation non triviale, on peut supposer que, pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}$, le polynôme $R_v(T) = \text{Rés}_S(P_v(S) - T, P'_v(S))$ ne s'annule pas sur $\overline{C}(s_v, s_v)$.

Démonstration. — D'après la proposition 8.1.30 appliquée à E , il existe un arbre binaire $\mathcal{T}$ et une famille $\mathcal{E} = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T})}$ d'éléments de $\mathcal{H}(x)[T] \times \mathbf{R}_{>0}$, les P_v étant irréductibles, tels que l'arbre binaire de compacts élémentaire $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ sur E soit bien découpé et adapté à $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{H}(x)$ est parfait ou de valuation non triviale, on peut supposer que, pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}$, le polynôme $R_v(T) = \text{Rés}_S(P_v(S) - T, P'_v(S))$ ne s'annule pas sur $\overline{C}(s_v, s_v)$.

L'image de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{H}(x)$ étant dense, on peut modifier les polynômes P_v , où v est un nœud interne de $\mathcal{T}_x$, de façon que leurs coefficients appartiennent à $\mathcal{O}_{X,x}$ sans modifier les ensembles $\{x \in \mathbf{A}_{\mathcal{H}(x)}^{1,\text{an}} : |P_v(x)| \bowtie s_v\}$, avec $\bowtie \in \{\leq, \geq, =\}$. Les propriétés de l'arbre $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_x)$ sont alors préservées. Puisque les étiquettes n'ont pas été modifiées, les intersections des étiquettes de feuilles distinctes sont encore soit vides, soit des étoiles (cf. remarque 8.1.27). Si $\mathcal{H}(x)$ est parfait ou de valuation non triviale, on peut également supposer que la condition de non annulation du résultant énoncée ci-dessus reste satisfaite.

Pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_x)$, la proposition 8.1.19 assure qu'il existe un système de Cousin-Runge associé à $(K(v^-), K(v^+))$. Si x est très décent, il s'agit même d'un système de Cousin-Runge fort, d'après le corollaire 3.1.25 si x est très typique et le lemme 8.1.20 sinon. $\square$

Corollaire 8.1.32. — *Soit V une partie compacte et décente de X_{um} et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Si V possède assez d'arbres de Cousin (resp. de Cousin-Runge), alors il en va de même pour $\overline{D}_V(\mathbf{r})$.*

Démonstration. — En raisonnant par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où $n = 1$. Notons $r = r_1$. Supposons que V possède assez d'arbres de Cousin (resp. de Cousin-Runge). Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $\overline{D}_V(r)$.

Soit x un point de X . D'après le corollaire 8.1.31 appliqué à $\overline{D}_x(r)$, il existe un arbre binaire $\mathcal{T}_x$ et une famille $\mathcal{E}_x = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T}_x)}$ d'éléments de $\mathcal{O}_x[T] \times \mathbf{R}_{>0}$ tels que l'arbre binaire de compacts élémentaire $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_x)$ sur $\overline{D}_x(r)$ soit bien découpé et adapté à $\mathcal{U}$.

Considérons un voisinage ouvert V_x de x dans V sur lequel les coefficients des polynômes P_v sont définis. Soit W un voisinage compact de x dans V_x . Pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}_x$, on notera encore P_v un représentant de P_v dans $\mathcal{O}(W)[T]$. Considérons la famille $\mathcal{E}_W = (P_v, s_v)_{v \in \mathcal{I}(\mathcal{T}_x)}$ de $\mathcal{O}(W)[T] \times \mathbf{R}_{>0}$ et l'arbre de compacts élémentaire $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_W)$ associé sur $\overline{D}_W(r)$. Puisque $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_x)$

est bien découpé et adapté à $\mathcal{U}$, quitte à restreindre V_x , on peut également supposer que $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_W)$ est bien découpé et adapté à $\mathcal{U}$.

En outre, pour tout nœud interne v de $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_W)$, d'après la remarque 8.1.27 et la proposition 8.1.19, il existe un système de Cousin (resp. Cousin-Runge) associé à $(K(v^-), K(v^+))$.

La famille $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$ forme un recouvrement ouvert de V . Puisque V possède assez d'arbres de Cousin (resp. Cousin-Runge), il existe un arbre de Cousin (resp. Cousin-Runge) $\mathcal{T}$ sur V adapté à $\mathcal{V}$. Considérons l'arbre binaire de compacts $\mathcal{T}'$ obtenu en remplaçant dans $\mathcal{T}$ chaque étiquette K par l'étiquette $\overline{D}_K(r)$. D'après le lemme 8.1.14, $\mathcal{T}'$ est encore un arbre de Cousin (resp. de Cousin-Runge).

Finalement, pour toute feuille f de $\mathcal{T}$, considérons un point x_f de V tel que $K(f) \subset V_{x_f}$ et remplaçons la feuille correspondante de $\mathcal{T}'$ par l'arbre $\mathcal{T}_{x_f}(\mathcal{E}_{K(f)})$. Le résultat est un arbre de Cousin (resp. de Cousin-Runge) sur $\overline{D}_X(r)$ adapté à $\mathcal{U}$. $\square$

Corollaire 8.1.33. — *Soit V une partie compacte de X_{um} et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- i) tous les points de V sont ultramétriques très typiques ;*
- ii) en tout point b de V , le corps résiduel complété $\mathcal{H}(b)$ est de caractéristique nulle ou de valuation non triviale.*

Si V possède assez d'arbres de Cousin forts (resp. de Cousin-Runge forts), alors il en va de même pour $\overline{D}_V(\mathbf{r})$.

Démonstration. — Reprenons le début de la démonstration du corollaire 8.1.32 pour construire des arbres binaires de compacts $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_x)$ et $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_W)$.

Soit v un nœud interne de $\mathcal{T}_x(\mathcal{E}_W)$. Pour poursuivre, on a besoin d'un système de Cousin fort ou Cousin-Runge fort associé à $(K(v^-), K(v^+))$. Dans le cas i), son existence découle de la remarque 8.1.27, la proposition 8.1.19 et le corollaire 3.1.25.

Dans le cas ii), remarquons tout d'abord que l'assertion finale du corollaire 8.1.31 permet de supposer que le polynôme $R_v(T) = \text{Rés}_S(P_v(S) - T, P'_v(S))$ ne s'annule pas sur $\overline{C}_x(s_v, s_v)$. Quitte à restreindre V_x , on peut supposer qu'ils ne s'annule pas non plus sur $\overline{C}_W(s_v, s_v)$. L'existence d'un système de Cousin fort ou de Cousin-Runge fort découle alors de la remarque 8.1.27, de la proposition 8.1.19 et du lemme 8.1.20.

On peut alors conclure en reprenant la fin de la démonstration du corollaire 8.1.32. $\square$

8.2. Théorèmes A et B sur les polydisques fermés relatifs

Dans cette section, nous démontrons que les polydisques fermés relatifs sur des bases convenables satisfont les théorèmes A et B. Nous commencerons par traiter le cas où la base est un point, archimédien d'abord, ultramétrique ensuite, avant de traiter le cas d'une base plus grande.

Rappelons que, suivant nos conventions, les différents disques et polydisques relatifs que nous rencontrons dans cette section sont munis de la structure surconvergente induite par leur plongement dans l'espace affine relatif. En particulier, la structure d'espace localement annelé d'un disque relatif au-dessus d'un point n'est pas, en général, celle du disque sur un corps valué qui lui est sous-jacent.

8.2.1. Fibres archimédiennes. — Commençons par établir les théorèmes A et B pour les fibres archimédiennes de disques de Berkovich. Ils découlent assez directement de résultats classiques dans le cadre des espaces analytiques complexes.

Proposition 8.2.1. — *Munissons le corps $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^\varepsilon$, avec $\varepsilon \in]0, 1]$. Soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$. Alors, $\mathcal{F}$ est globalement engendré et, pour tout $q \geq 1$, on a $H^q(\overline{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. — Le fait que la valeur absolue puisse être une puissance différente de la valeur absolue usuelle n'influe pas sur le résultat et on peut supposer que $\varepsilon = 1$, ce qui nous ramène au cas des espaces analytiques complexes usuels. Il est alors bien connu que les disques fermés sont des espaces de Stein et qu'ils satisfont les propriétés de l'énoncé. $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser aux espaces analytiques sur $\mathbf{R}$ (muni de la valeur absolue $|\cdot|^\varepsilon$, avec $\varepsilon \in]0, 1]$) au sens de V. Berkovich. Rappelons que l'extension des scalaires $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ permet d'associer à tout espace de Berkovich Y sur $\mathbf{R}$ un espace analytique complexe $Y_{\mathbf{C}}$ et un morphisme $\pi: Y_{\mathbf{C}} \rightarrow Y$, qui n'est autre que le quotient par la conjugaison complexe (cf. lemme 1.2.14). En particulier, pour tout point y de Y , la fibre $\pi^{-1}(y)$ contient un point si $\mathcal{H}(y) \simeq \mathbf{R}$ et deux points conjugués si $\mathcal{H}(y) \simeq \mathbf{C}$.

L'ingrédient clé pour passer de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$ est le résultat suivant, dû à Q. Liu (cf. [Liu88, proposition 2]) et énoncé sous cette forme dans [Poi10a, théorème 6.11] (à une hypothèse manquante près).

Lemme 8.2.2. — *Soit $\varphi: Z \rightarrow Y$ un morphisme surjectif d'espaces analytiques. Supposons que l'espace Z et les fermés de Zariski de Y de support différent de Y satisfont le théorème B. Supposons également qu'il existe un point y tel que $\{y\}$ soit l'espace topologique sous-jacent à un fermé analytique de Y et que la fibre $(\varphi_*\mathcal{O}_Z)_y$ soit un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module libre de rang fini. Alors, l'espace Y satisfait le théorème B.* $\square$

Proposition 8.2.3. — *Considérons le corps $\mathbf{R}$ muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty^\varepsilon$, avec $\varepsilon \in]0, 1]$. Soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$. Alors, $\mathcal{F}$ est globalement engendré et, pour tout $q \geq 1$, on a $H^q(\overline{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. — Munissons $\overline{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ et $\overline{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$ de la topologie dont les fermés sont les fermés analytiques. D'après [Fri67, proposition I,7], l'espace topologique $\overline{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$ est noethérien et il en va donc de même de l'espace $\overline{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ sur lequel il se surjecte continûment.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un fermé analytique de $\overline{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ ne satisfaisant pas le théorème B. Par noethérianité, il en existe un qui soit minimal pour cette propriété ; notons-le Y . L'espace $Y_{\mathbf{C}}$ est nécessairement de dimension strictement positive et l'espace Y contient donc un point y donc le corps résiduel est isomorphe à $\mathbf{C}$. Le morphisme $\pi: Y_{\mathbf{C}} \rightarrow Y$ définit alors un isomorphisme d'un voisinage de chacun des deux antécédents de y vers un voisinage de y . Par conséquent, la fibre $(\pi_*\mathcal{O}_{Y_{\mathbf{C}}})_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module libre de rang deux. D'après le lemme 8.2.2, Y satisfait le théorème B et nous aboutissons à une contradiction.

Il est par ailleurs classique que, sur un espace qui satisfait le théorème B et dont tout point est l'espace topologique sous-jacent à un fermé analytique, tout faisceau cohérent est globalement engendré (cf. [GR04, IV, §1, theorem 2] ou [Poi10a, théorème 6.1.9] – là encore, il manque une hypothèse). $\square$

Soit K le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\text{hyb}} = \max(|\cdot|_0, |\cdot|_\infty)$, où $|\cdot|_0$ désigne la valeur absolue triviale et $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle. Rappelons que le spectre $\mathcal{M}(K)$ est constitué des points associés aux valeurs absolues $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ pour $\varepsilon \in [0, 1]$ (en identifiant $|\cdot|_\infty^0$ à $|\cdot|_0$), cf. exemple 1.1.19.

Proposition 8.2.4. — Soit K le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\text{hyb}}$. Posons $X = \mathcal{M}(K)$. Soit b un point de X associé à une valeur absolue archimédienne (c'est-à-dire $|\cdot|_{\infty}^{\varepsilon}$, avec $\varepsilon \in]0, 1]$). Soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_b(\mathbf{r})$. Alors, $\mathcal{F}$ est globalement engendré et, pour tout $q \geq 1$, on a $H^q(\overline{D}_b(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. — D'après [Poi10a, proposition 3.4.6], l'inclusion

$$j_b: \overline{D}_b(\mathbf{r}) \hookrightarrow \overline{D}_X(\mathbf{r})$$

de la fibre dans l'espace total induit un isomorphisme d'espaces annelés

$$(\overline{D}_b(\mathbf{r}), j_b^{-1}\mathcal{O}_{\overline{D}_X(\mathbf{r})}) \xrightarrow{\sim} (\overline{D}_b(\mathbf{r}), \mathcal{O}_{\overline{D}_b(\mathbf{r})}).$$

Il suffit donc de démontrer les résultats sur l'espace de gauche, qui est un espace analytique sur un corps valué. Les propositions 8.2.1 et 8.2.3 permettent alors de conclure. $\square$

8.2.2. Fibres ultramétriques. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Proposition 8.2.5. — Soit V une partie compacte de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$.

Supposons que V possède assez d'arbres de Cousin et que, pour tout point x de V , on a $H^1(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0$. Alors, on a $H^1(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0$.

En particulier, si V possède assez d'arbres de Cousin, on a $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$.

Démonstration. — Rappelons que la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$, comme sur tout site, possède assez d'injectifs (cf. [Sta20, Theorem 01DP]). Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{I}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d} \dots$$

une résolution injective du faisceau $\mathcal{O}$ sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Soit $\alpha \in \mathcal{I}_1(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$ tel que $d\alpha = 0$.

Soit x un point de V . Par hypothèse, on a $H^1(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0$, donc il existe un élément $\beta_x \in \mathcal{I}_0(\overline{D}_x(\mathbf{r}))$ tel que $d\beta_x = \alpha|_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}$. Par définition, il existe un voisinage U_x de $\overline{D}_x(\mathbf{r})$ et un élément γ_x de $\mathcal{I}_0(U_x)$ dont la restriction à $\overline{D}_x(\mathbf{r})$ est égale à β_x . En outre, $d\gamma_x$ est égale à α sur un voisinage de $\overline{D}_x(\mathbf{r})$, que l'on peut supposer être égal à U_x . En d'autres termes, l'image de α dans $H^1(U_x, \mathcal{O})$ est nulle. Puisque π est propre, on peut supposer que U_x est de la forme $\overline{D}_{V_x}(\mathbf{r})$, où V_x est un voisinage ouvert de x dans X .

Considérons le recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in V}$ de V . Par hypothèse, il existe un arbre de Cousin $\mathcal{T}$ sur V adapté à $\mathcal{U}$. Par construction, pour toute feuille f de $\mathcal{T}$, l'image de α dans $H^1(\overline{D}_{K(f)}(\mathbf{r}), \mathcal{O})$ est nulle.

En remontant pas à pas dans l'arbre, on démontre plus généralement que, pour tout nœud v de $\mathcal{T}$, l'image de α dans $H^1(\overline{D}_{K(v)}(\mathbf{r}), \mathcal{O})$ est nulle. En effet, supposons le résultat démontré pour les deux fils v^- et v^+ d'un nœud v de $\mathcal{T}$. Par hypothèse, il existe un système de Cousin associé à $(K(v^-), K(v^+))$. En particulier, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(K(v^-)) \times \mathcal{O}(K(v^+)) & \longrightarrow & \mathcal{O}(K(v^-) \cap K(v^+)) \\ (f^-, f^+) & \longmapsto & f^- - f^+ \end{array}$$

est surjectif et il en va donc de même du morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\overline{D}_{K(v^-)}(\mathbf{r})) \times \mathcal{O}(\overline{D}_{K(v^+)}(\mathbf{r})) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\overline{D}_{K(v^-)}(\mathbf{r}) \cap \overline{D}_{K(v^+)}(\mathbf{r})) \\ (f^-, f^+) & \longmapsto & f^- - f^+ \end{array},$$

d'après le lemme 8.1.14. Le résultat découle alors de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow H^0(\overline{D}_{K(v^-)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}) \oplus H^0(\overline{D}_{K(v^+)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}) \longrightarrow \\ \searrow \hspace{10em} \nearrow \\ \longrightarrow H^0(\overline{D}_{K(v^-)}(\mathbf{r}) \cap \overline{D}_{K(v^+)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\overline{D}_{K(v)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}) \longrightarrow \\ \searrow \hspace{10em} \nearrow \\ \longrightarrow H^1(\overline{D}_{K(v^-)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}) \oplus H^1(\overline{D}_{K(v^+)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Puisque la racine de $\mathcal{T}$ est étiquetée par le compact V , ceci démontre que l'image de α dans $H^1(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{O})$ est nulle.

La partie finale du résultat découle du cas $n = 0$ en remarquant que, pour tout point x de V , on a $H^1(\{x\}, \mathcal{O}) = 0$. $\square$

Lemme 8.2.6. — Soit V une partie compacte de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Soit $q \geq 1$.

Supposons que V est de dimension de recouvrement 1 et que, pour tout point x de V , on a $H^q(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = H^{q+1}(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0$. Alors, on a $H^{q+1}(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. — Considérons le morphisme de projection $\pi: \mathbf{A}_X^{n, \text{an}} \rightarrow X$. Il induit un morphisme d'espaces localement annelés $\pi_{V, \mathbf{r}}: \overline{D}_V(\mathbf{r}) \rightarrow V$, où

$\overline{D}_V(\mathbf{r})$ et V sont munis des structures surconvergentes induites respectivement par $\mathbf{A}_X^{n,\text{an}}$ et X . Considérons la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,p'} = H^p(V, R^{p'}(\pi_{V,\mathbf{r}})_*\mathcal{F}) \implies H^{p+p'}(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{F}).$$

Puisque V est de dimension 1, pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{G}$ sur V et tout $p' \geq 2$, on a $H^{p'}(V, \mathcal{G}) = 0$. En particulier, seules les deux premières colonnes de la deuxième page de la suite spectrale peuvent contenir des termes non nuls. En outre, par hypothèse, on a $R^q(\pi_{V,\mathbf{r}})_*\mathcal{F} = R^{q+1}(\pi_{V,\mathbf{r}})_*\mathcal{F} = 0$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Corollaire 8.2.7. — Soit x un point décent de X_{um} . Alors, pour tout $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ et tout $q \geq 1$, on a

$$H^q(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0.$$

Démonstration. — Démontrons le résultat par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on a bien $H^q(\{x\}, \mathcal{O}) = 0$ pour tout $q \geq 1$.

Supposons que le résultat est vrai pour les disques de dimension n et démontrons-le pour la dimension $n + 1$. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{n+1}) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^{n+1}$.

D'après le corollaire 8.1.32, le disque relatif $\overline{D}_x(\mathbf{r})$ possède assez d'arbres de Cousin. D'après la proposition 8.2.5, on a donc $H^1(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0$.

Considérons le morphisme de projection sur la dernière coordonnée $\pi: \overline{D}_x(\mathbf{r}) \rightarrow \overline{D}_x(r_{n+1})$. Posons $\mathbf{r}' := (r_1, \dots, r_n)$. Par hypothèse de récurrence, pour tout point y de $\overline{D}_x(r_{n+1})$ et tout $q \geq 1$, on a $H^q(\overline{D}_y(\mathbf{r}'), \mathcal{O}) = 0$. Le lemme 8.2.6 assure alors que, pour tout $q \geq 2$, on a $H^q(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0$. $\square$

8.2.3. Cas général. — Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique.

Nous souhaitons montrer que les polydisques fermés relatifs au-dessus de certaines parties de X d'un type particulier satisfont les théorèmes A et B. Introduisons-les maintenant.

Définition 8.2.8. — Une *base de Stein* de X est une partie compacte V de X qui satisfait les conditions suivantes :

- i) V est de dimension de recouvrement inférieure à 1 ;
- ii) tout point ultramétrique de V est décent ;
- iii) tout point archimédien de V est isolé ou possède un voisinage linéaire dans V ;
- iv) tout polydisque fermé relatif sur V est de dimension de recouvrement finie ;

v) pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de V , il existe un arbre de Cousin-Runge fort à intersections simples $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ sur V adapté à $\mathcal{U}$ tel que, pour toutes feuilles $f \neq g$ de $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, le compact $K(f) \cap K(g)$ possède assez d'arbres de Cousin.

Exemple 8.2.9. — Soit $\mathcal{A}$ l'un de nos anneaux de Banach usuels : corps valués, anneaux d'entiers de corps de nombres, corps hybrides, anneaux de valuation discrète, anneaux de Dedekind trivialement valués (cf. exemples 1.1.16 à 1.1.21). Alors, toute partie compacte et connexe de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une base de Stein de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

En effet, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de V . En utilisant la description explicite de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, on montre que l'on peut raffiner $\mathcal{U}$ en un recouvrement compact fini $\mathcal{V}$ tel que l'intersection de deux parties quelconques de $\mathcal{V}$ soit vide ou réduite à un point non associé à la valuation triviale sur $\mathcal{A}$. On peut alors associer un système de Cousin-Runge fort par restriction, à partir du procédé décrit dans les exemples 8.1.7 et 8.1.13. Le résultat s'en déduit.

Lemme 8.2.10. — Soit x un point très décent de X_{um} . Alors, pour tout $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, la partie compacte $\overline{D}_x(r)$ de $\mathbf{A}_X^1$ est une base de Stein.

Démonstration. — Soit $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. Les points i) et iv) de la définition 8.2.8 découlent du théorème 7.3.6. Le point ii) suit de la proposition 1.6.4. Le point iii) est trivialement vérifié.

Démontrons le point v). Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de V . D'après le corollaire 8.1.31, il existe un arbre binaire de compacts élémentaire $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ sur V qui soit bien découpé, adapté à $\mathcal{U}$ et de Cousin-Runge fort. D'après la remarque 8.1.27, il est à intersections simples. Par construction, pour toutes feuilles $f \neq g$ de $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, le compact $K(f) \cap K(g)$ est une étoile, donc possède assez d'arbres de Cousin, d'après le corollaire 8.1.31. $\square$

Corollaire 8.2.11. — Soit V une base de Stein de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Alors, pour tout $q \geq 1$, on a

$$H^q(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0.$$

Démonstration. — D'après la proposition 8.2.4 et le corollaire 8.2.7, pour tout point x de V , on a $H^q(\overline{D}_x(\mathbf{r}), \mathcal{O}) = 0$. Le résultat découle alors de la proposition 8.2.5 et du lemme 8.2.6. $\square$

Rappelons que, d'après le théorème 7.3.7, si V est une partie linéaire ou d'Ostrowski de X , alors, tout disque fermé relatif sur V est de dimension de recouvrement finie.

Corollaire 8.2.12. — Soit V une base de Stein de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}$ -modules sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Supposons qu'il existe une résolution libre

$$\mathcal{O}^{N_d} \longrightarrow \mathcal{O}^{N_{d-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}^{N_1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

où $d := \dim_r(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$. Alors, pour tout $q \geq 1$, on a

$$H^q(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. — Pour $m \in \llbracket 1, d \rrbracket$, notons $\mathcal{R}_m$ le noyau de $\mathcal{O}^{N_m} \rightarrow \mathcal{F}$. Par récurrence sur m , en utilisant des suites exactes longues de cohomologie et le corollaire 8.2.11, on démontre que, pour tout $m \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et tout $q \geq 1$, on a

$$H^q(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = H^{q+m}(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{R}_m).$$

Pour $m = d$, ces groupes sont nuls car $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ est de dimension de recouvrement d . $\square$

Proposition 8.2.13. — Soit V une base de Stein de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$.

Supposons que, pour tout point x de V , tout faisceau cohérent sur $\overline{D}_x(\mathbf{r})$ soit globalement engendré. Alors, tout faisceau cohérent sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ est globalement engendré.

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Soit x un point de V . Par hypothèse, il existe un morphisme de $\mathcal{O}_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}$ -modules surjectif $\varphi_x: \mathcal{O}_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}^{N_x} \rightarrow \mathcal{F}|_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}$. Ce dernier s'étend en un morphisme surjectif $\psi_x: \mathcal{O}^{N_x} \rightarrow \mathcal{F}$ défini sur un voisinage de $\overline{D}_x(\mathbf{r})$, que l'on peut supposer de la forme $\overline{D}_{V_x}(\mathbf{r})$, où V_x est un voisinage ouvert de x dans V . Notons $\mathcal{R}$ le noyau de ψ_x . Le faisceau $\mathcal{O}$ est cohérent d'après le théorème 1.6.34, le faisceau $\mathcal{F}$ l'est aussi par hypothèse, donc le faisceau $\mathcal{R}$ l'est également.

En appliquant de façon répétée l'hypothèse de l'énoncé, on montre le faisceau $\mathcal{R}|_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}$ possède une résolution libre

$$\mathcal{O}_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}^{N_d} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}^{N_{d-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{D}_x(\mathbf{r})}^{N_1} \longrightarrow \mathcal{R}|_{\overline{D}_x(\mathbf{r})} \longrightarrow 0,$$

où d est la dimension de recouvrement de $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Cette résolution s'étend en une résolution de $\mathcal{R}$ sur un voisinage de $\overline{D}_x(\mathbf{r})$, que l'on peut supposer de la forme $\overline{D}_{V'_x}(\mathbf{r})$, où V'_x est un voisinage ouvert de x dans V_x .

D'après le corollaire 8.2.12, pour toute partie compacte W de V'_x qui possède assez d'arbres de Cousin, nous avons $H^1(\overline{D}_W(\mathbf{r}), \mathcal{R}) = 0$. On en déduit que le morphisme $\mathcal{O}^{N_x}(\overline{D}_W(\mathbf{r})) \rightarrow \mathcal{F}(\overline{D}_W(\mathbf{r}))$ induit par ψ_x est surjectif.

Considérons le recouvrement $\mathcal{V}$ de V défini par les V'_x . Par hypothèse, il existe un arbre de Cousin-Runge fort à intersections simples $\mathcal{T}$ adapté à $\mathcal{V}$ tel que, pour toutes feuilles $f \neq g \in \mathcal{T}$, le compact $K(f) \cap K(g)$ possède assez d'arbres de Cousin. Soit f une feuille de $\mathcal{T}$. Il existe un point x de V tel que V'_x contienne $K(f)$. Pour toute feuille g de $\mathcal{T}$, le compact $K(f) \cap K(g)$ possède assez d'arbres de Cousin. Le raisonnement ci-dessus montre alors que le morphisme $\mathcal{O}^{N_x}(\overline{D}_{K(f) \cap K(g)}(\mathbf{r})) \rightarrow \mathcal{F}(\overline{D}_{K(f) \cap K(g)}(\mathbf{r}))$ induit par ψ_x est surjectif. Le résultat découle alors de la proposition 8.1.23. $\square$

Corollaire 8.2.14. — *Soit x un point très décent de X_{um} et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Alors, tout faisceau cohérent sur $\overline{D}_x(\mathbf{r})$ est globalement engendré.*

Démonstration. — Démontrons le résultat par récurrence sur n . Pour $n = 0$, le résultat est évident.

Supposons que le résultat est vrai pour les disques de dimension n et démontrons-le pour la dimension $n + 1$. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{n+1}) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^{n+1}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_x(\mathbf{r})$. Considérons le morphisme de projection sur la dernière coordonnée $\pi: \overline{D}_x(\mathbf{r}) \rightarrow \overline{D}_x(r_{n+1})$. Posons $\mathbf{r}' := (r_1, \dots, r_n)$. Par hypothèse de récurrence, pour tout point y de $\overline{D}_x(r_{n+1})$, le faisceau $\mathcal{F}$ est globalement engendré sur $\overline{D}_y(\mathbf{r}')$. En outre, d'après le lemme 8.2.10, le disque $\overline{D}_x(r_{n+1})$ est une base de Stein. On conclut par la proposition 8.2.13. $\square$

Corollaire 8.2.15. — *Soit V une base de Stein de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Alors, tout faisceau cohérent sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ est globalement engendré.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Pour tout point x de V , le faisceau $\mathcal{F}$ est globalement engendré sur $\overline{D}_x(\mathbf{r})$. Cela découle de la proposition 8.2.4 si x est archimédien et du corollaire 8.2.14 si x est ultramétrique. On conclut par la proposition 8.2.13. $\square$

Corollaire 8.2.16. — *Soit V une base de Stein de X et soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ et tout $q \geq 1$, on a $H^q(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. En appliquant de façon répétée le corollaire 8.2.15, on montre que le faisceau $\mathcal{F}$ possède des résolutions libres de longueur arbitraire. Le résultat découle alors du corollaire 8.2.12. $\square$

8.3. Affinoïdes surconvergents

Dans cette section, nous introduisons les espaces affinoïdes surconvergents et montrons qu'ils satisfont des propriétés analogues aux affinoïdes de la géométrie rigide tels que le théorème d'acyclicité de Tate et théorème de Kiehl.

Rappelons que toute partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est munie de son faisceau de fonctions surconvergentes, cf. notation 1.4.2. Par exemple, si V est un polydisque fermé $\overline{D}_B(r_1, \dots, r_n)$, chaque section globale converge sur un disque $\overline{D}_B(r'_1, \dots, r'_n)$ avec $r'_i > r_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Définition 8.3.1. — On dit qu'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X est $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent s'il existe un polydisque fermé $\overline{D}_B(\mathbf{r})$, avec $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, et un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ sur $\overline{D}_B(\mathbf{r})$ tels que X soit isomorphe au fermé analytique de $\overline{D}_B(\mathbf{r})$ défini par $\mathcal{I}$.

Remarque 8.3.2. — Le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ lui-même est un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent, obtenu en choisissant le rayon $\mathbf{r}$ vide et le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ nul.

Remarque 8.3.3. — Dans la théorie classique sur un corps ultramétrique, on ne considère généralement que des polydisques dont tous les rayons sont strictement positifs. Cette restriction apparente ne nuit pas à la généralité car un disque dont l'un des rayons est nul est isomorphe à un disque de dimension plus petite. Dans notre cadre, surconvergent et non plus convergent, les disques dont certains rayons sont nuls fournissent des espaces supplémentaires, et nous ne souhaitons pas les exclure.

En géométrie analytique rigide, on dispose de procédés classiques de constructions de domaines affinoïdes. Nous en proposons ici l'analogue.

Définition 8.3.4. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et Y une partie de X .

On dit que Y est un *domaine de Weierstraß* de X s'il existe $p \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(X)$ et $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| \leq r_i\}.$$

On dit que Y est un *domaine de Laurent* de X s'il existe $p, q \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q \in \mathcal{O}(X)$, $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $s_1, \dots, s_q \in \mathbf{R}_{> 0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| \leq r_i, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, |g_j(x)| \geq s_j\}.$$

On dit que Y est un *domaine rationnel* de X s'il existe $p \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p, g \in \mathcal{O}(X)$ sans zéros communs sur X et $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| \leq r_i |g(x)|\}.$$

Remarque 8.3.5. — Dans le cadre classique sur un corps ultramétrique, seuls les rayons strictement positifs sont autorisés dans la définition des différents domaines. Dans notre cas, la théorie fonctionne encore avec certains rayons nuls, grâce au fait que nous considérons des faisceaux structuraux surconvergents et non seulement convergents.

Proposition 8.3.6. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent. Les domaines de Weierstraß, les domaines de Laurent et les domaines rationnels de X sont des espaces $\mathcal{A}$ -affinoïdes surconvergents.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un polydisque fermé E sur B et un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ sur E tels que X soit isomorphe au fermé analytique de E défini par $\mathcal{I}$.

Soit Y un domaine de Weierstraß de X . Alors, il existe $p \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(X)$ et $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| \leq r_i\}.$$

Posons $E' := \overline{D}_E(r_1, \dots, r_p)$ avec coordonnées $T_1, \dots, T_p$. C'est encore un polydisque fermé sur B . Notons $\pi: E' \rightarrow E$ la projection. Le faisceau d'idéaux

$$\mathcal{I}' := \pi^* \mathcal{I} + (T_1 - f_1, \dots, T_p - f_p) \mathcal{O}_{E'}$$

est cohérent sur E' et la projection π induit un isomorphisme entre le fermé analytique de E' défini par $\mathcal{I}'$ et Y (dont l'inverse est le morphisme associé à $(f_1, \dots, f_p)$ par l'application bijective de la proposition 4.1.1). On en déduit que Y est un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent.

Le cas des domaines de Laurent se traite de façon similaire. Si Y est un domaine de Laurent donné comme dans la définition 8.3.4, on reprend la preuve précédente en considérant, cette fois-ci, le disque $E' := \overline{D}_E(r_1, \dots, r_p, s_1, \dots, s_q)$ avec coordonnées $T_1, \dots, T_p, S_1, \dots, S_q$ et le faisceaux d'idéaux

$$\mathcal{I}' := \pi^* \mathcal{I} + (T_1 - f_1, \dots, T_p - f_p, S_1 g_1 - 1, \dots, S_q g_q - 1) \mathcal{O}_{E'}.$$

Remarquons que les fonctions $g_1, \dots, g_q$ sont inversibles sur Y . On peut donc considérer le morphisme de source Y associé à $(f_1, \dots, f_p, g_1^{-1}, \dots, g_q^{-1})$. Son

image s'identifie au fermé analytique Z' de E' défini par $\mathcal{I}'$ et il fournit un inverse au morphisme $Z' \rightarrow Y$ induit par la projection $\pi: E' \rightarrow E$.

La même stratégie s'applique encore pour les domaines rationnels. Si Y est un domaine de Laurent donné comme dans la définition 8.3.4, on reprend la preuve en considérant, cette fois-ci, le disque $E' := \overline{D}_E(r_1, \dots, r_p)$ avec coordonnées $T_1, \dots, T_p, S$ et le faisceau d'idéaux

$$\mathcal{I}' := \pi^* \mathcal{I} + (gT_1 - f_1, \dots, gT_p - f_p) \mathcal{O}_{E'}.$$

Puisque les fonctions $f_1, \dots, f_p, g$ sont supposées sans zéros communs sur X , la fonction g ne peut s'annuler sur Y et elle y est donc inversible. On peut donc considérer le morphisme de source Y associé à $(f_1 g^{-1}, \dots, f_p g^{-1})$. Son image s'identifie au fermé analytique Z' de E' défini par $\mathcal{I}'$ et il fournit un inverse au morphisme $Z' \rightarrow Y$ induit par la projection $\pi: E' \rightarrow E$. $\square$

Corollaire 8.3.7. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Tout point de X possède une base de voisinages formée d'espaces $\mathcal{A}$ -affinoïdes surconvergents.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Le résultat à démontrer étant local, on peut supposer que X est un fermé analytique d'un ouvert U d'un espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Puisque tout fermé analytique d'un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent est encore $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent, il suffit de montrer le résultat pour U , et donc pour $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Or, par définition de la topologie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, les domaines de Laurent forment une base de voisinages de tout point. Le résultat découle donc de la proposition 8.3.6. $\square$

Passons maintenant aux analogues des résultats classiques sur les affinoïdes. Le premier que nous énonçons s'apparente à une partie du théorème d'acyclicité de Tate, affirmant que les sections globales sur un affinoïde surconvergent sont celles auxquelles on s'attend d'après sa définition.

Théorème 8.3.8. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une base de Stein. Soit $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ et soient $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}}(\overline{D}_B(\mathbf{r}))$. Alors, le fermé analytique X de $\overline{D}_B(\mathbf{r})$ défini par $f_1, \dots, f_m$ est un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent et on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}}(\overline{D}_B(\mathbf{r})) / (f_1, \dots, f_m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X).$$

Démonstration. — Notons $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux cohérent de $\overline{D}_B(\mathbf{r})$ engendré par $(f_1, \dots, f_m)$. Posons $I := \mathcal{I}(\overline{D}_B(\mathbf{r}))$. D'après le corollaire 8.2.16, on a

$H^1(\overline{D}_B(\mathbf{r}), \mathcal{I}) = 0$. En utilisant la suite exacte longue associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I} \rightarrow 0$, on en déduit que

$$\mathcal{O}_X(X) = (\mathcal{O}/\mathcal{I})(\overline{D}_B(\mathbf{r})) \simeq \mathcal{O}(\overline{D}_B(\mathbf{r}))/I.$$

Le morphisme de faisceau

$$\begin{array}{ccc} \varphi: & \mathcal{O}^m & \longrightarrow \mathcal{O} \\ & (a_1, \dots, a_m) & \longmapsto \sum_{i=1}^m a_i f_i \end{array}$$

a pour image $\mathcal{I}$. Son noyau $\mathcal{K}$ est un faisceau cohérent sur $\overline{D}_B(\mathbf{r})$. La suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0$ fournit une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{D}_B(\mathbf{r}))^m \xrightarrow{\varphi(\overline{D}_B(\mathbf{r}))} \mathcal{I}(\overline{D}_B(\mathbf{r})) \longrightarrow H^1(\overline{D}_B(\mathbf{r}), \mathcal{K}) \longrightarrow \dots$$

D'après le corollaire 8.2.16, on a $H^1(\overline{D}_B(\mathbf{r}), \mathcal{K}) = 0$, d'où l'on déduit que $I = \mathcal{I}(\overline{D}_B(\mathbf{r})) = (f_1, \dots, f_m)\mathcal{O}(\overline{D}_B(\mathbf{r}))$. Cela conclut la preuve. $\square$

Le résultat qui suit contient la partie manquante du théorème d'acyclicité de Tate, ainsi que le théorème de Kiehl.

Théorème 8.3.9. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une base de Stein. Soient X un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors,*

- i) *pour tout entier $q \geq 1$, on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$;*
- ii) *le $\mathcal{O}(X)$ -module $\mathcal{F}(X)$ est de type fini et engendre $\mathcal{F}$.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un polydisque fermé $\overline{D}$ sur B et un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ sur $\overline{D}$ tels que X soit isomorphe au fermé analytique de $\overline{D}$ défini par $\mathcal{I}$. Notons $j: X \rightarrow \overline{D}$ l'inclusion.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent. Son poussé en avant $\varphi_*\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $\overline{D}$ avec des groupes de cohomologie associés identiques. Le point i) découle donc du corollaire 8.2.16. D'après le corollaire 8.2.15, $\varphi_*(\mathcal{F})(\overline{D})$ engendre $(\varphi_*\mathcal{F})_y$ en tout point y de $\overline{D}$ et on en déduit que $\mathcal{F}(X) = \varphi_*(\mathcal{F})(\overline{D})$ engendre $\mathcal{F}_x = (\varphi_*\mathcal{F})_x$ en tout point x de X .

Il reste à montrer que $\mathcal{F}(X)$ est de type fini sur $\mathcal{O}(X)$. Soit $x \in X$. On vient de montrer que $\mathcal{F}_x$ est engendré par $\mathcal{F}(X)$. Par conséquent, il existe un morphisme $\mathcal{O}^{q_x} \rightarrow \mathcal{F}$ qui est surjectif en x , et donc sur un voisinage U_x de x . Par compacité de X , on peut le recouvrir par un nombre fini de U_x et donc construire un morphisme de faisceaux surjectif $\varphi: \mathcal{O}^q \rightarrow \mathcal{F}$. Puisque $H^1(X, \text{Ker}(\varphi)) = 0$, le morphisme $\mathcal{O}(X)^q \rightarrow \mathcal{F}(X)$ induit entre les sections globales est encore surjectif.

□

Corollaire 8.3.10. — Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une base de Stein. Soit X un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde surconvergent. Alors le foncteur sections globales $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et celle des modules de type fini sur $\mathcal{O}(X)$. □

8.4. Quelques compléments

Dans cette section, nous utilisons la théorie des espaces de Stein, que nous venons de développer, pour raffiner ou étendre quelques résultats antérieurs.

Commençons par des résultats sur les algèbres de couronnes. Nous pouvons maintenant étendre la proposition 1.4.9 au-delà du cas ultramétrique.

Proposition 8.4.1. — Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s \leq t$. Notons $\overline{C}(s, t)$ la couronne relative au-dessus de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, avec coordonnée T , et $\overline{C}_x(s, t)$ sa fibre au-dessus de x . Alors, le morphisme naturel

$$\operatorname{colim}_{V \ni x, u < s \leq t < v} \mathcal{B}(V) \langle u \leq |T| \leq v \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_x(s, t)),$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, est un isomorphisme.

Démonstration. — L'injectivité du morphisme est claire. Pour montrer la surjectivité, considérons le disque relatif $\overline{D}(t, s^{-1})$ de dimension 2 au-dessus de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, avec coordonnées T, S , et son fermé analytique Z défini par l'idéal engendré par $ST - 1$. Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 8.3.6, on montre que Z est isomorphe à $\overline{C}(s, t)$. En se restreignant aux fibres au-dessus de x , on en déduit un isomorphisme $Z_x \simeq \overline{C}_x(s, t)$.

D'après le corollaire 8.2.16, les groupes de cohomologie supérieurs de tout faisceau cohérent sur la fibre $\overline{D}_x(t, s^{-1})$ de $\overline{D}(t, s^{-1})$ au-dessus de x sont nuls. En raisonnant comme dans la preuve du théorème 8.3.8, on en déduit un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(\overline{D}_x(t, s^{-1})) / (ST - 1) \simeq \mathcal{O}(Z_x)$.

On obtient finalement un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \left(\operatorname{colim}_{V \ni x, u < s \leq t < v} \mathcal{B}(V) \langle |T| \leq v, |S| \leq u^{-1} \rangle \right) / (ST - 1) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\overline{D}_x(t, s^{-1})) / (ST - 1) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \operatorname{colim}_{V \ni x, u < s \leq t < v} \mathcal{B}(V) \langle u \leq |T| \leq v \rangle & \longrightarrow & \mathcal{O}(\overline{C}_x(s, t)), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est donnée par l'évaluation en $S = T^{-1}$. D'après la proposition 1.4.8, dans une version en plusieurs variables qui se démontre sans difficultés supplémentaires⁽¹⁾, la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme. Le résultat s'en déduit. $\square$

En appliquant la proposition précédente fibre à fibre et en recollant, on obtient le résultat suivant, cf. corollaire 1.4.11.

Corollaire 8.4.2. — Soit V une partie compacte de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Soient $s, t \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que $s \leq t$. Alors le morphisme naturel

$$\operatorname{colim}_{W \supset V, u < s \leq t < v} \mathcal{O}(W) \langle u \leq |T| \leq v \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t)),$$

où W parcourt l'ensemble des voisinages compacts de V dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, est un isomorphisme.

Nous allons maintenant énoncer un résultat technique qui permet de remplacer, dans certains énoncés, des anneaux de la forme $\mathcal{B}(V)$ par des anneaux de la forme $\mathcal{O}(U)$, plus naturels. Au préalable, introduisons une définition.

Définition 8.4.3. — Soit U un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et V une partie compacte de U . On dit qu'un élément f de $\mathcal{O}(U)$ est $\mathcal{B}$ -défini sur V s'il existe un élément F de $\mathcal{B}(V)$ tel que $f|_V = F|_V$, au sens où

$$\forall y \in V, f(y) = F(y).$$

Remarque 8.4.4. — Nous avons déjà introduit la propriété d'être $\mathcal{B}$ -défini pour les éléments d'un anneau local $\mathcal{O}_x$ à la définition 1.6.12. Si U est un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, x un point de U et V un voisinage compact de x dans U , alors tout élément f de $\mathcal{O}(U)$ qui est $\mathcal{B}$ -défini sur V est également $\mathcal{B}$ -défini en tant qu'élément de $\mathcal{O}_x$.

Définition 8.4.5. — On dit qu'un point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est $\mathcal{B}$ -adapté si, pour tout voisinage U de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, il existe un voisinage compact V de x dans U tel que tout élément de $\mathcal{O}(U)$ soit $\mathcal{B}$ -défini sur V .

On dit que $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est $\mathcal{B}$ -adapté si tous ses points sont $\mathcal{B}$ -adaptés.

⁽¹⁾On démontre d'abord le résultat dans le cas des rayons nuls, cf [Poi10a, théorème 2.4.8], puis le cas général en utilisant le principe du prolongement analytique, comme dans la preuve de [Poi13a, corollaire 2.7]

Exemple 8.4.6. — Lorsque l'anneau de Banach $\mathcal{A}$ est l'un de nos exemples habituels (corps valué, $\mathbf{Z}$ ou anneau d'entiers de corps de nombres, corps hybride, anneau de valuation discrète, anneau de Dedekind trivialement valué, cf. exemples 1.1.16 à 1.1.21), le spectre $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté.

Proposition 8.4.7. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est $\mathcal{B}$ -adapté.*

Démonstration. — Démontrons le résultat par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est vrai par hypothèse.

Supposons que le résultat est vrai pour $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et démontrons-le pour $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$. Considérons $\pi: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ la projection sur la dernière coordonnée, notée S .

Soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$ et soit U un voisinage de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n+1,\text{an}}$. D'après le corollaire 3.1.12, il existe un voisinage compact W_0 de $\pi(x)$ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, une base de voisinages compacts $\mathcal{W}_{\pi(x)}$ de $\pi(x)$ dans W_0 , un polynôme $P \in \mathcal{B}(W_0)[S]$ unitaire non constant et des nombres réels $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ tels que, pour tout $W \in \mathcal{W}_{\pi(x)}$, $\overline{C}_W(P, r, s)$ soit un voisinage de x dans U et la couronne $\overline{C}_W(r, s)$ (avec coordonnée T) satisfasse la propriété $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$.

Soit $W_1 \in \mathcal{W}_{\pi(x)}$. Par hypothèse, il existe un voisinage compact W_2 de $\pi(x)$ dans W_1 tel que tout élément de $\mathcal{O}(W_1)$ soit $\mathcal{B}$ -défini sur W_2 . Quitte à restreindre W_2 , on peut supposer qu'il appartient à $\mathcal{W}_{\pi(x)}$.

Soit $a \in \mathcal{O}(\overline{C}_{W_1}(r, s))$. D'après le corollaire 8.4.2, c'est l'image d'une série a' de $\mathcal{O}(W_1)\langle r \leq |T| \leq s \rangle$ par l'application canonique. Par définition de W_2 , il existe une série A' de $\mathcal{B}(W_2)\langle r \leq |T| \leq s \rangle$ dont les coefficients coïncident avec ceux de a' sur W_2 . Par conséquent, l'image A de A' dans $\mathcal{B}(\overline{C}_{W_2}(r, s))$ coïncide avec a sur $\overline{C}_{W_2}(r, s)$.

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Notons encore f son image dans $\mathcal{O}(\overline{C}_{W_1}(P, r, s))$. D'après le théorème 1.6.7, on a un isomorphisme

$$\varphi: \mathcal{O}(\overline{C}_{W_1}(P, r, s)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\overline{C}_{W_1}(r, s))[S]/(P(S) - T).$$

Représentons $\varphi(f)$ par un élément g de $\mathcal{O}(\overline{C}_{W_1}(r, s))[S]$. Le résultat du paragraphe précédent assure qu'il existe un élément G de $\mathcal{B}(\overline{C}_{W_2}(r, s))[S]$ dont la restriction à $\overline{C}_{W_2}(r, s)$ coïncide avec g . Notons $\bar{G}$ son image dans $\mathcal{B}(\overline{C}_{W_2}(r, s))[S]/(P(S) - T)$. Puisque la couronne $\overline{C}_{W_2}(r, s)$ satisfait la propriété $(\mathcal{BN}_{P(S)-T})$, on a un isomorphisme

$$\psi: \mathcal{B}(\overline{C}_{W_2}(P, r, s)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\overline{C}_{W_2}(r, s))[S]/(P(S) - T).$$

Par construction, $\psi^{-1}(\bar{G})$ coïncide avec f sur $\bar{C}_{W_2}(P, r, s)$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Comme exemple d'application, énonçons une version plus générale du résultat de fermeture des idéaux du faisceau structural, cf. corollaire 3.3.12.

Corollaire 8.4.8. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Soient x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, $p \geq 1$ un entier et M un sous-module de $\mathcal{O}_x^p$. Soient U un voisinage de x dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}(U)^p$ qui converge vers un élément g de $\mathcal{O}(U)^p$. Si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'image de g_n dans $\mathcal{O}_x^p$ appartient à M , alors l'image de g dans $\mathcal{O}_x^p$ appartient à M . $\square$*

8.5. Théorème B sur certains ouverts

Pour démontrer des résultats d'annulation cohomologique sur des ouverts à partir de résultats sur des fermés, nous nous inspirons de la stratégie utilisée dans le cas complexe, et en particulier de la notion d'exhaustion de Stein, cf. [GR04, chapter IV]. Signalons que le second auteur a déjà mis en œuvre une stratégie similaire dans le cas de la droite affine dans [Poi10a, §6.6].

Les changements à apporter dans notre cadre sont mineurs. Pour faciliter la lecture, nous allons cependant procéder à quelques rappels et indiquer les grandes lignes du raisonnement.

Définition 8.5.1. — Soit T un espace topologique. Une *exhaustion* de T est une suite de parties compactes $(K_m)_{m \geq 0}$ de T telle que, pour tout $m \geq 0$, K_m soit incluse dans l'intérieur de K_{m+1} et

$$T = \bigcup_{m \geq 0} K_m.$$

Théorème 8.5.2 ([GR04, IV, §1, theorem 4]). — *Soient T un espace topologique et $(K_m)_{m \geq 0}$ une exhaustion de T . Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur T et $q \geq 2$ un entier. Supposons que, pour tout $m \geq 0$, on a*

$$H^{q-1}(K_m, \mathcal{F}) = H^q(K_m, \mathcal{F}) = 0.$$

Alors, on a

$$H^q(T, \mathcal{F}) = 0.$$

$\square$

Ce résultat ne présente pas de difficulté particulière. On voit cependant que l'annulation du H^1 reste hors d'atteinte. Pour l'obtenir, on utilise une notion plus fine qui fait intervenir des conditions topologiques sur les espaces de sections.

Définition 8.5.3 ([GR04, IV, §1, definition 6]). — Soient T un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur T . Une *exhaustion de Stein* de T relativement à $\mathcal{F}$ est une exhaustion $(K_m)_{m \geq 0}$ de T telle que

$$\text{pour tous } m \geq 0, q \geq 1, H^q(K_m, \mathcal{F}) = 0$$

et, pour tout $m \geq 0$, il existe une semi-norme $\|\cdot\|_m$ sur $\mathcal{F}(K_m)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) l'image du morphisme de restriction $\mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(K_m)$ est dense pour $\|\cdot\|_m$;
- ii) le morphisme de restriction $(\mathcal{F}(K_{m+1}), \|\cdot\|_{m+1}) \rightarrow (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|_m)$ est borné ;
- iii) le morphisme de restriction $(\mathcal{F}(K_{m+1}), \|\cdot\|_{m+1}) \rightarrow (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|_m)$ envoie toute suite de Cauchy sur une suite convergente ;
- iv) tout élément s de $\mathcal{F}(K_{m+1})$ tel que $\|s\|_{m+1} = 0$ est nul sur K_m .

Théorème 8.5.4 ([GR04, IV, §1, theorem 7]). — Soient T un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur T . Soit $(K_m)_{m \geq 0}$ une exhaustion de Stein de T relativement à $\mathcal{F}$. Alors, on a

$$\text{pour tout } q \geq 1, H^q(T, \mathcal{F}) = 0.$$

□

Nous allons démontrer l'annulation des groupes de cohomologie supérieurs de certains ouverts de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, et notamment des disques ouverts relatifs, en exhibant des exhaustions de Stein. Nous suivrons de près [Poi10a, §6.6]. La succession de lemmes est identique et nous nous contenterons de démontrer ceux qui demandent des modifications. Nous utiliserons de façon cruciale le résultat de fermeture des modules locaux (cf. corollaire 8.4.8).

Définition 8.5.5. — Soit U une partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Une *exhaustion de Stein universelle* de U est une exhaustion $(K_m)_{m \geq 0}$ de U telle que, pour tout $m \geq 0$, les propriétés suivantes soient satisfaites :

- i) tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur U est globalement engendré sur K_m ;
- ii) pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur U et tout entier $q \geq 1$, on a $H^q(K_m, \mathcal{F}) = 0$;

iii) l'image du morphisme de restriction $\mathcal{O}(K_{m+1}) \rightarrow \mathcal{O}(K_m)$ est dense pour $\|\cdot\|_{K_m}$.

Exemple 8.5.6. — Soit V une base de Stein de B . Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, fixons une suite strictement croissante $(t_{i,m})_{m \geq 0}$ d'éléments de $\mathbf{R}_{>0}$ qui tend vers t_i . Alors $(\overline{D}_V(t_{1,m}, \dots, t_{n,m}))_{m \geq 0}$ est une exhaustion de Stein universelle de $D_V(t_1, \dots, t_n)$. Le point i) découle du corollaire 8.2.15, le point ii) du corollaire 8.2.16 et le point iii) de la proposition 1.4.8.

Soit U une partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et supposons qu'elle possède une *exhaustion de Stein universelle* $(K_m)_{m \geq 0}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U .

Soit $m \in \mathbf{N}$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est globalement engendré sur K_m , donc il existe $l_m \in \mathbf{N}$ et un morphisme surjectif $\alpha_m: \mathcal{O}_{K_m}^{l_m} \rightarrow \mathcal{F}|_{K_m}$. Les propriétés d'annulation cohomologique entraînent que le morphisme induit

$$\varepsilon_m: \mathcal{O}(K_m)^{l_m} \longrightarrow \mathcal{F}(K_m)$$

est surjectif.

Munissons $\mathcal{O}(K_m)^{l_m}$ de la norme définie par le maximum des normes des coordonnées. On la note encore $\|\cdot\|_{K_m}$. On définit alors une semi-norme $\|\cdot\|_m$ sur $\mathcal{F}(K_m)$ par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_m: \mathcal{F}(K_m) &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ s &\longmapsto \inf(\{\|t\|_{K_m} : t \in \varepsilon_m^{-1}(s)\}) \end{aligned}$$

Considérons les morphismes de restriction

$$r_m: (\mathcal{O}(K_{m+1})^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_{m+1}}) \longrightarrow (\mathcal{O}(K_m)^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_m})$$

et

$$\rho_m: (\mathcal{F}(K_{m+1}), \|\cdot\|_{m+1}) \longrightarrow (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|_m).$$

Le morphisme r_m est borné.

Les propriétés d'annulation cohomologique entraînent que le morphisme $\alpha_{m+1}: \mathcal{O}_{K_{m+1}}^{l_{m+1}} \rightarrow \mathcal{F}|_{K_{m+1}}$ induit un morphisme surjectif

$$\varepsilon'_m: \mathcal{O}(K_m)^{l_{m+1}} \longrightarrow \mathcal{F}(K_m).$$

On définit alors une nouvelle semi-norme $\|\cdot\|'_m$ sur $\mathcal{F}(K_m)$ par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|'_m: \mathcal{F}(K_m) &\longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ s &\longmapsto \inf(\{\|t\|_{K_m} : t \in \varepsilon'_m{}^{-1}(s)\}) \end{aligned}$$

Considérons maintenant le morphisme

$$\sigma_m : (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|'_m) \longrightarrow (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|_m)$$

qui induit l'identité sur $\mathcal{F}(K_m)$. Il est borné.

Lemme 8.5.7 ([Poi10a, lemme 6.6.21]). — *Il existe un morphisme borné η_m qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}(K_m)^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_m}) & \xrightarrow{\varepsilon'_m} & (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|'_m) \\ \downarrow \eta_m & & \downarrow \sigma_m \\ (\mathcal{O}(K_m)^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_m}) & \xrightarrow{\varepsilon_m} & (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|_m) \end{array} .$$

□

On a maintenant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}(K_{m+1})^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_m}) & \xrightarrow{\varepsilon_{m+1}} & (\mathcal{F}(K_{m+1}), \|\cdot\|_{m+1}) \\ \downarrow r_m & & \downarrow \cdot|_{K_m} \\ (\mathcal{O}(K_m)^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_m}) & \xrightarrow{\varepsilon'_m} & (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|'_m) \\ \downarrow \eta_m & & \downarrow \sigma_m \\ (\mathcal{O}(K_m)^{l_{m+1}}, \|\cdot\|_{K_m}) & \xrightarrow{\varepsilon_m} & (\mathcal{F}(K_m), \|\cdot\|_m) \end{array} \quad \rho_m$$

Lemme 8.5.8 ([Poi10a, lemme 6.6.22]). — *Le morphisme ρ_m est borné.* □

Reprenons maintenant [Poi10a, lemme 6.6.23] en apportant les modifications nécessaires à sa preuve.

Lemme 8.5.9. — *Le morphisme ρ_m est d'image dense.*

Démonstration. — Puisque le morphisme σ_m est surjectif et borné, il suffit de montrer que l'image du morphisme de restriction $\mathcal{F}(K_{m+1}) \rightarrow \mathcal{F}(K_m)$ est dense pour la norme $\|\cdot\|'_m$.

Soit $s \in \mathcal{F}(K_m)$. Soit $\delta > 0$. Puisque ε'_m est surjectif, il existe $t \in \mathcal{O}(K_m)^{k_{m+1}}$ tel que $\varepsilon'_m(t) = s$. Par hypothèse, $\mathcal{O}(K_{m+1})$ est dense dans $\mathcal{O}(K_m)$, donc il existe $t' \in \mathcal{O}(K_{m+1})$ tel que $\|r_m(t') - t\|_{K_m} \leq \delta$. On a alors $\|\varepsilon_{m+1}(t')|_{K_m} - s\|'_m \leq \delta$. □

Reprenons de même [Poi10a, lemme 6.6.24].

Lemme 8.5.10. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Soit $s \in \mathcal{F}(K_{m+1})$ tel que $\|s\|_{m+1} = 0$. Alors, s est nulle sur l'intérieur de K_{m+1} dans U . En particulier, $s|_{K_m} = 0$.*

Démonstration. — Soit $t \in \varepsilon_{m+1}^{-1}(s)$. Par hypothèse, il existe une suite $(t_j)_{j \geq 0}$ d'éléments de $\text{Ker}(\varepsilon_{m+1})$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|t - t_j\|_{K_{m+1}} = 0$. En d'autres termes, $(t_j)_{j \geq 0}$ converge uniformément vers t sur K_{m+1} .

Soit x un point de l'intérieur de K_{m+1} dans U . D'après le corollaire 8.4.8, on a $t \in \text{Ker}(\alpha_{m+1})_x$, donc l'image de $\varepsilon_{m+1}(t)$ dans $\mathcal{F}_x$ est nulle.

On a montré que s est nulle sur l'intérieur de K_{m+1} dans U , et, en particulier, sur K_m . $\square$

En utilisant les résultats qui précèdent, les autres lemmes s'adaptent maintenant sans changements.

Lemme 8.5.11 ([Poi10a, lemme 6.6.25]). — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Soit $(s_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}(K_{m+1})$ qui est de Cauchy pour la semi-norme $\|\cdot\|_{m+1}$. Alors, il existe un élément s de $\mathcal{F}(K_m)$ tel que la suite $(\rho_m(s_k))_{k \geq 0}$ converge vers s pour la semi-norme $\|\cdot\|_m$.*

De plus, si $s' \in \mathcal{F}(K_m)$ est une limite de la suite $(\rho_m(s_k))_{k \geq 0}$, elle coïncide avec s sur l'intérieur de K_m dans U . $\square$

Lemme 8.5.12 ([Poi10a, lemme 6.6.25]). — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. L'image du morphisme de restriction $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(K_m)$ est dense pour la semi-norme $\|\cdot\|_m$.* $\square$

Nous disposons maintenant de toutes les propriétés constitutives d'une exhaustion de Stein. Résumons le résultat obtenu.

Proposition 8.5.13. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Soit U une partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Soit $(K_m)_{m \geq 0}$ une exhaustion de Stein universelle de U . Alors, $(K_m)_{m \geq 0}$ est une exhaustion de Stein de U relativement à tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur U* $\square$

En appliquant le théorème 8.5.4, on obtient un résultat d'annulation cohomologique.

Théorème 8.5.14. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Soit U une partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Supposons qu'elle possède une exhaustion de Stein universelle. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur U et tout entier $q \geq 1$, on a*

$$H^q(U, \mathcal{F}) = 0.$$

$\square$

L'exemple 8.5.6 permet d'appliquer ce résultat dans le cas des disques ouverts relatifs.

Corollaire 8.5.15. — Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est $\mathcal{B}$ -adapté. Soit V une base de Stein de B . Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $D_V(t_1, \dots, t_n)$ et tout entier $q \geq 1$, on a

$$H^q(D_V(t_1, \dots, t_n), \mathcal{F}) = 0.$$

□

De la même façon que les propriétés des affinoïdes surconvergers se déduisent de celles des disques fermés, du corollaire 8.5.15 découlent des résultats d'annulation cohomologique pour d'autres espaces. Nous introduisons un peu de terminologie de façon à pouvoir les énoncer plus commodément.

Définition 8.5.16. — Un espace de la forme $D_B(t_1, \dots, t_n)$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$ est appelé *polydisque ouvert généralisé sur B* .

Exemple 8.5.17. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace affine analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ est un polydisque ouvert généralisé.

Définition 8.5.18. — On dit qu'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X est *$\mathcal{A}$ -affinoïde ouvert* s'il existe un polydisque ouvert généralisé D sur B et un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$ sur D tel que X soit isomorphe au fermé analytique de D défini par $\mathcal{I}$.

Exemple 8.5.19. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma affine de présentation finie sur $\mathcal{A}$. Alors son analytifié $\mathcal{X}^{\text{an}}$ est un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde ouvert, par construction (cf. théorème 4.1.4 et sa preuve).

Définition 8.5.20. — Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et Y une partie de X .

On dit que Y est un *domaine de Weierstraß ouvert* de X s'il existe $p \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(X)$ et $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| < r_i\}.$$

On dit que Y est un *domaine de Laurent ouvert* de X s'il existe $p, q \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q \in \mathcal{O}(X)$ et $r_1, \dots, r_p, s_1, \dots, s_q \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| < r_i, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, |g_j(x)| > s_j\}.$$

On dit que Y est un *domaine rationnel ouvert* de X s'il existe $p \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_p, g \in \mathcal{O}(X)$ sans zéros communs sur X et $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{R}_{>0}$ tels que

$$Y = \{x \in X : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |f_i(x)| < r_i |g(x)|\}.$$

Exemple 8.5.21. — Une polycouronne est un domaine rationnel ouvert d'un espace affine analytique.

Les deux résultats qui suivent se démontrent respectivement comme la proposition 8.3.6 et le corollaire 8.3.7.

Proposition 8.5.22. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde ouvert. Les domaines de Weierstraß, les domaines de Laurent et les domaines rationnels de X sont des espaces $\mathcal{A}$ -affinoïdes ouverts.* $\square$

Corollaire 8.5.23. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Tout point de X possède une base de voisinages formée d'espaces $\mathcal{A}$ -affinoïdes ouverts.* $\square$

En suivant la même stratégie que dans la preuve du théorème 8.3.9, on déduit le résultat suivant du corollaire 8.5.15.

Corollaire 8.5.24. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une base de Stein $\mathcal{B}$ -adaptée. Soit X un espace $\mathcal{A}$ -affinoïde ouvert. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout entier $q \geq 1$, on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.* $\square$

Corollaire 8.5.25. — *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une base de Stein $\mathcal{B}$ -adaptée. Alors, tout espace $\mathcal{A}$ -analytique possède une base d'ouverts satisfaisant le théorème B.* $\square$

8.6. Noéthérianité d'anneaux de séries arithmétiques convergentes

Dans cette section finale, nous proposons une application de nos résultats aux anneaux de séries arithmétiques convergentes. Ceux-ci ont été introduits par D. Harbater dans le cadre de son étude du problème inverse de Galois (cf. [Har84, Har88]). Un exemple typique est

$$\mathbf{Z}_{r+}[[T]] := \{f \in \mathbf{Z}[[T]] : R_\infty(f) > r\},$$

où r est un nombre réel positif et $R_\infty(f)$ désigne le rayon de convergence complexe de la série f , c'est-à-dire son rayon de convergence en tant que fonction analytique complexe ($\mathbf{C}$ étant muni de la valeur absolue usuelle).

Nous n'étudierons pas ici les propriétés galoisiennes de ces anneaux. Nous renvoyons le lecteur intéressé par une approche géométrique de ces questions à l'article [Poi10b], dans lequel figure une preuve, basée sur la construction de revêtements de disques analytiques sur $\mathbf{Z}$, du fait que tout groupe fini peut se réaliser comme groupe de Galois d'une extension régulière de $\mathbf{Z}_{r+}[[T]]$, lorsque $r \in [0, 1[$.

En ce qui concerne les aspects algébriques des anneaux de séries arithmétiques convergentes, on dispose du résultat suivant.

Théorème 8.6.1 ([Har84, theorem 1.8]). — *Pour tout $r \in [0, 1[$, l'anneau $\mathbf{Z}_{r+}[[T]]$ est noethérien, régulier, factoriel et de dimension 2.* $\square$

Nous allons montrer que la propriété de noethérianité s'étend aux anneaux de séries arithmétiques convergentes en plusieurs variables.

La preuve du théorème 8.6.1 que propose D. Harbater est de nature très algébrique. La noethérianité, par exemple, est obtenue en exhibant, pour chaque idéal premier, une famille génératrice explicite. Une telle stratégie semble difficile à généraliser.

Notre approche est, au contraire, géométrique. Elle s'inspire de celle adoptée par J. Frisch dans le cadre d'anneaux de fonctions analytiques complexes.

Théorème 8.6.2 ([Fri67, théorème (I, 9)]). — *Soit A une partie compacte semi-analytique et de Stein d'un espace analytique complexe X . Alors, l'anneau $\mathcal{O}(A)$ est noethérien.*

En particulier, pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{r}))$ est noethérien. $\square$

Signalons que Y.-T. Siu a, par la suite, obtenu une démonstration simplifiée d'un résultat un peu plus général dans [Siu69]. Pour le cas particulier des polydisques, K. Langmann a proposé une preuve plus courte dans [Lan77]. Nous nous sommes grandement inspirés de cette dernière.

Il n'est guère difficile de passer du résultat sur $\mathbf{C}$ à un résultat valable sur tout corps valué archimédien complet.

Corollaire 8.6.3. — *Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet archimédien. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Alors l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$ est noethérien.*

Démonstration. — D'après le théorème 1.2.6, il existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que $(k, |\cdot|)$ soit isométriquement isomorphe à $(\mathbf{R}, |\cdot|_{\infty}^{\varepsilon})$ ou $(\mathbf{C}, |\cdot|_{\infty}^{\varepsilon})$. Traitons séparément ces deux cas.

- Supposons que $(k, |\cdot|) = (\mathbf{C}, |\cdot|_{\infty}^{\varepsilon})$. L'élévation à la puissance $1/\varepsilon$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$ et $\mathcal{O}(\overline{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{r}^{1/\varepsilon}))$, où $\mathbf{C}$ est muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_{\infty}$ (cf. [Poi10a, proposition 1.3.10] pour un résultat permettant de comparer chacun de ces anneaux à l'anneau d'un disque relatif sur l'espace hybride $\mathcal{M}(\mathbf{C}^{\text{hyb}}) \setminus \{|\cdot|_0\}$). Le résultat découle alors du théorème 8.6.2.

- Supposons que $(k, |\cdot|) = (\mathbf{R}, |\cdot|_{\infty}^{\varepsilon})$. Posons $(k', |\cdot|) = (\mathbf{C}, |\cdot|_{\infty}^{\varepsilon})$. Pour toute série $h = \sum_{i \geq 0} a_i \mathbf{T}^i \in \mathbf{C}[[\mathbf{T}]]$, on pose $\bar{h} := \sum_{i \geq 0} \bar{a}_i \mathbf{T}^i \in \mathbf{C}[[\mathbf{T}]]$. Remarquons

que, pour tout élément h de $\mathcal{O}(\overline{D}_{k'}(\mathbf{r}))$, $\bar{h}$ appartient à $\mathcal{O}(\overline{D}_{k'}(\mathbf{r}))$ et $h + \bar{h}$ à $\mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$.

Soit $(f_m)_{m \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$. D'après le cas précédent, l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_{k'}(\mathbf{r}))$ est noethérien, donc il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $m > M$, on ait $f_m \in (f_0, \dots, f_M) \mathcal{O}(\overline{D}_{k'}(\mathbf{r}))$. Soit $m > M$. Il existe $h_0, \dots, h_M \in \mathcal{O}(\overline{D}_{k'}(\mathbf{r}))$ tels que $f_m = \sum_{j=0}^M h_j f_j$. On a

$$f_m = \bar{f}_m = \sum_{j=0}^M \bar{h}_j f_j = \sum_{j=0}^M \frac{h_j + \bar{h}_j}{2} f_j,$$

donc $f_m \in (f_0, \dots, f_M) \mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$. On en déduit que $\mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$ est noethérien. $\square$

Un résultat similaire vaut également dans le cas ultramétrique. Le cas du polydisque unité a été traité par E. Grosse-Klönne dans [GK00, 1.4]. Un résultat général proche de celui de J. Frisch et de Y.-T. Siu a été obtenu par le second auteur dans [Poi08, théorème A.5]. Pour éviter d'introduire des notions techniques supplémentaires, nous nous contenterons d'en énoncer la conséquence suivante.

Théorème 8.6.4. — *Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet ultramétrique. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Alors l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_k(\mathbf{r}))$ est noethérien.* $\square$

Soit K un corps de nombres et A son anneau d'entiers. Notons Σ_f l'ensemble des places finies de K (vues comme des idéaux maximaux de A) et Σ_∞ l'ensemble des places infinies de K (vues comme des classes de conjugaison de plongements complexes). Posons $\Sigma := \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$. On utilisera les notations de l'exemple 1.1.18 pour les points de $\mathcal{M}(A)$.

Soit $\Sigma_{f,0}$ un sous-ensemble fini de Σ_f . Posons $\Sigma_0 := \Sigma_{f,0} \cup \Sigma_\infty$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_{f,0}$, fixons $\varepsilon_\sigma \in]0, +\infty[$ et, pour tout $\sigma \in \Sigma_\infty$, fixons $\varepsilon_\sigma \in]0, 1]$. Posons

$$V := \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \{a_\sigma^\varepsilon : \varepsilon \in [0, \varepsilon_\sigma]\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} \{a_\sigma^\varepsilon : \varepsilon \in [0, +\infty]\}.$$

Notons $A[1/\Sigma_0]$ l'ensemble des éléments de K qui sont entiers pour toutes les places de $\Sigma_f \setminus \Sigma_{f,0}$. Décrivons maintenant les fonctions globales sur V .

Lemme 8.6.5. — *L'application $A \rightarrow \mathcal{O}(V)$ induit un isomorphisme $A[1/\Sigma_0] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)$ et on a $\|\cdot\|_V = \max_{\sigma \in \Sigma_0} (|\cdot|_\sigma^{\varepsilon_\sigma})$.*

Démonstration. — C'est une conséquence des descriptions explicites démontrées dans [Poi10a, §3.1.2]. $\square$

Passons maintenant aux fonctions sur des polydisques relatifs.

Notation 8.6.6. — Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, on note $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i < s_i$.

Lemme 8.6.7. — Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$. L'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$ est constitué des séries

$$f = \sum_{\mathbf{i} \geq 0} f_{\mathbf{i}} \mathbf{T}^{\mathbf{i}} \in \mathcal{A}\left[\frac{1}{\Sigma_0}\right][[\mathbf{T}]]$$

vérifiant la condition suivante :

$$\exists \mathbf{s} > \mathbf{r}, \forall \sigma \in \Sigma_0, \lim_{\mathbf{i} \rightarrow \infty} |f_{\mathbf{i}}|_{\sigma}^{\varepsilon_{\sigma}} \mathbf{s}^{\mathbf{i}} = 0.$$

Démonstration. — Pour $\beta \in \mathbf{R}_{>1}$, posons

$$V_{\beta} := \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \varepsilon \in [0, \beta \varepsilon_{\sigma}]\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \varepsilon \in [0, +\infty]\}.$$

La famille $(V_{\beta})_{\beta > 1}$ forme une base de voisinages compacts de V dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Le résultat découle alors de la proposition 1.4.8 et du lemme 8.6.5 en remarquant que la condition $\lim_{\mathbf{i} \rightarrow \infty} |f_{\mathbf{i}}|_{\sigma}^{\beta \varepsilon_{\sigma}} \mathbf{s}^{\mathbf{i}} = 0$ peut se retraduire par $\lim_{\mathbf{i} \rightarrow \infty} |f_{\mathbf{i}}|_{\sigma}^{\varepsilon_{\sigma}} (\mathbf{s}^{1/\beta})^{\mathbf{i}} = 0$. $\square$

Ajoutons un résultat technique utile sur les fonctions sur des disques relatifs contenus dans une branche.

Lemme 8.6.8. — Soit $\sigma \in \Sigma$. Soient $u, v \in]0, +\infty[$ avec $u \leq v$. Si $\sigma \in \Sigma_{\infty}$, supposons que $v \leq 1$. Posons $W := \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \varepsilon \in [u, v]\}$. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in [0, 1]^n$. Alors, le morphisme de restriction $\mathcal{O}(\overline{D}_W(\mathbf{r})) \rightarrow \mathcal{O}(\overline{D}_{\mathcal{H}(a_{\sigma}^v)}(\mathbf{r}))$ est un isomorphisme.

En particulier, l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_W(\mathbf{r}))$ est noethérien.

Démonstration. — Notons $P := \{(u', v') \in \mathbf{R}_{>0}^2 : 0 < u' < u \leq v < v'\}$. Pour $(u', v') \in P$, posons $W_{u', v'} := \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \varepsilon \in [u', v']\}$. On a $\mathcal{O}(W_{u', v'}) = \hat{K}_{\sigma}$ et $\|\cdot\|_{W_{u', v'}} = \max(|\cdot|_{\sigma}^u, |\cdot|_{\sigma}^v)$.

La famille $(W_{u', v'})_{(u', v') \in P}$ forme une base de voisinages compacts de W dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On déduit alors de la proposition 1.4.8 que l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_W(\mathbf{r}))$ est constitué des séries $f = \sum_{\mathbf{i} \geq 0} f_{\mathbf{i}} \mathbf{T}^{\mathbf{i}} \in \hat{K}_{\sigma}[[\mathbf{T}]]$ vérifiant la condition suivante :

$$\exists \mathbf{s} > \mathbf{r}, \lim_{\mathbf{i} \rightarrow \infty} \max(|f_{\mathbf{i}}|_{\sigma}^u \mathbf{s}^{\mathbf{i}}, |f_{\mathbf{i}}|_{\sigma}^v \mathbf{s}^{\mathbf{i}}) = 0,$$

ou encore

$$\exists \mathbf{s} > \mathbf{r}, \lim_{\mathbf{i} \rightarrow \infty} \max(|f_{\mathbf{i}}|_{\sigma} \mathbf{s}^{i/u}, |f_{\mathbf{i}}|_{\sigma} \mathbf{s}^{i/v}) = 0,$$

Or $\mathbf{r} \in [0, 1]^n$ et, pour tout $\mathbf{s} \in [0, 1]^n$, on a $\mathbf{s}^{1/u} \leq \mathbf{s}^{1/v}$. La condition est donc encore équivalente à

$$\exists \mathbf{s} > \mathbf{r}, \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i|_{\sigma} \mathbf{s}^{i/v} = 0.$$

On en déduit que $\mathcal{O}(\overline{D}_W(\mathbf{r})) = \mathcal{O}(\overline{D}_{\mathcal{H}(a_v)}(\mathbf{r}))$.

La dernière partie du résultat découle des théorèmes 8.6.3 et 8.6.4. $\square$

Nous utiliserons également un résultat de noethérianité pour les faisceaux qui s'énonce sous la forme suivante.

Proposition 8.6.9. — *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $(\mathcal{F}_m)_{m \geq 0}$ une suite croissante de sous-faisceaux cohérents de $\mathcal{F}$. Alors, tout point de X possède un voisinage sur lequel la suite $(\mathcal{F}_m)_{m \geq 0}$ stationne.* $\square$

Dans le cadre surconvergent qui est le nôtre, la difficulté pour appliquer ce théorème réside dans le fait qu'il requière que tous les faisceaux soient définis sur un même ouvert.

Théorème 8.6.10. — *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in [0, 1]^n$. Alors l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$ est noethérien.*

Démonstration. — Soit $(f_m)_{m \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$. Pour tout $m \geq 0$, notons $\mathcal{I}_m$ le faisceau d'idéaux engendré par $f_1, \dots, f_m$. Insistons sur le fait qu'il est *a priori* défini sur un voisinage de $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ qui dépend de m .

Soit $\sigma \in \Sigma_0$. Posons $W_{\sigma} := \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \varepsilon \in [\varepsilon_{\sigma}/3, \varepsilon_{\sigma}]\}$. D'après le lemme 8.6.8, l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_{W_{\sigma}}(\mathbf{r}))$ est noethérien. Il existe donc m_{σ} tel que, pour tout $m \geq m_{\sigma}$, on ait

$$(f_0, \dots, f_m) \mathcal{O}(\overline{D}_{W_{\sigma}}(\mathbf{r})) = (f_0, \dots, f_{m_{\sigma}}) \mathcal{O}(\overline{D}_{W_{\sigma}}(\mathbf{r})).$$

D'après le corollaire 8.2.15, pour tout $m \geq m_{\sigma}$ et tout $x \in \overline{D}_{W_{\sigma}}(\mathbf{r})$, on a donc $(\mathcal{I}_m)_x = (\mathcal{I}_{m_{\sigma}})_x$.

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, posons

$$V_{\alpha} = \{b^{\alpha} : b \in V\} \\ = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \sigma \in [0, \alpha \varepsilon_{\sigma}]\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f \setminus \Sigma_{f,0}} \{a_{\sigma}^{\varepsilon} : \sigma \in [0, +\infty]\}.$$

Il suit du lemme 8.6.7 que l'on a $\mathcal{O}(\overline{D}_{V_{\alpha}}(\mathbf{r}^{\alpha})) = \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$. En particulier, toute fonction analytique définie au voisinage de $\overline{D}_V(\mathbf{r})$ est encore définie sur au voisinage de $\overline{D}_{V_{1/2}}(\mathbf{r}^{1/2})$. Notons $U_{1/2}$ l'intérieur de ce dernier polydisque dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Puisque $\mathbf{r} \in [0, 1]^n$, il contient $\overline{D}_{V_{1/3}}(\mathbf{r})$. On déduit alors de la

proposition 8.6.9 qu'il existe $m' \geq 0$ tel que, pour tout $m \geq m'$ et tout $x \in \overline{D}_{V_{1/3}}(\mathbf{r})$, on ait $(\mathcal{I}_m)_x = (\mathcal{I}_{m'})_x$.

Posons $M := \max(m', \max_{\sigma \in \Sigma_0}(m_\sigma))$. Soit $m \geq M$. Pour tout $x \in \overline{D}_V(\mathbf{r})$, on a alors $(\mathcal{I}_m)_x = (\mathcal{I}_M)_x$. En d'autres termes, le morphisme de faisceaux

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathcal{O}^M &\longrightarrow \mathcal{I}_m \\ (g_1, \dots, g_M) &\longmapsto \sum_{i=1}^M g_i f_i \end{aligned}$$

est surjectif sur $\overline{D}_V(\mathbf{r})$. Son noyau $\mathcal{K}$ est un faisceau cohérent. De la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}^M \rightarrow \mathcal{I}_m \rightarrow 0$, on tire une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))^M \xrightarrow{\varphi(\overline{D}_V(\mathbf{r}))} \mathcal{I}_m(\overline{D}_V(\mathbf{r})) \longrightarrow H^1(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{K}) \longrightarrow \dots$$

Or, d'après le corollaire 8.2.16, on a $H^1(\overline{D}_V(\mathbf{r}), \mathcal{K}) = 0$, d'où il découle que $f_m \in (f_1, \dots, f_M) \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$. On en déduit que l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$ est noethérien. $\square$

Traduisons ce résultat en termes plus concrets.

Notation 8.6.11. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $f \in \mathcal{A}[1/\Sigma_0][\mathbf{T}]$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_0$ et tout $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, on écrit $R_\sigma(f) > \mathbf{r}$ si l'image de f dans $\hat{K}_\sigma[\mathbf{T}]$ converge au voisinage du disque $D_{\hat{K}_\sigma}(\mathbf{r})$, le corps $\hat{K}_\sigma$ étant muni de la valeur absolue $|\cdot|_\sigma$.

Corollaire 8.6.12. — Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in [0, 1]^n$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_0$, soit $\alpha_\sigma \in \mathbf{R}_{>0}$. Alors, le sous-anneau de $\mathcal{A}[1/\Sigma_0][\mathbf{T}]$ constitué des séries f telles que

$$\forall \sigma \in \Sigma_0, \quad R_\sigma(f) > \mathbf{r}^{\alpha_\sigma}$$

est noethérien.

Démonstration. — Quitte à multiplier les α_σ par une constante $\gamma > 0$ et remplacer $\mathbf{r}$ par $\mathbf{r}^{1/\gamma}$, on peut supposer que, pour tout $\sigma \in \Sigma_0$, on a $\alpha_\sigma \in]0, 1[$.

Posons

$$V := \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \{a_\sigma^\varepsilon : \varepsilon \in [0, \alpha_\sigma]\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} \{a_\sigma^\varepsilon : \varepsilon \in [0, +\infty]\}.$$

D'après le lemme 8.6.7, l'anneau décrit dans l'énoncé n'est autre que $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{r}))$. Le théorème 8.6.10 assure qu'il est noethérien. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161 (1994), 1993.
- [Ber08] Vladimir G. Berkovich. Non-Archimedean analytic geometry : first steps. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 1–7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Ber09] Vladimir G. Berkovich. A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 49–67. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
- [Ber23] Dorian Berger. Espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$: morphismes étales. *Math. Z.*, 304(4) :Paper No. 66, 32, 2023.
- [BGR84] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.

- [BJ17] Sébastien Boucksom and Mattias Jonsson. Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms. *J. Éc. polytech. Math.*, 4 :87–139, 2017.
- [Bou71] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [Bou74] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 5 à 10*. Hermann, Paris, 1974.
- [Bou06a] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4*. Berlin : Springer, reprint of the 1985 original edition, 2006.
- [Bou06b] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7*. Berlin : Springer, reprint of the 1985 original edition, 2006.
- [Bou16] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. Chapitres 1 à 4*. Springer, Heidelberg, 2016.
- [CCL10] Serge Cantat and Antoine Chambert-Loir. Dynamique p -adique (d’après les exposés de Jean-Christophe Yoccoz). In *Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux*, volume 30 of *Panor. Synthèses*, pages 295–341. Soc. Math. France, Paris, 2010.
- [DF19] Romain Dujardin and Charles Favre. Dégénérescences de représentations dans $SL(2, \mathbb{C})$ et Exposants de Lyapunov. *Ann. Henri Lebesgue*, 2 :515–565, 2019.
- [DKY20] Laura DeMarco, Holly Krieger, and Hexi Ye. Uniform Manin-Mumford for a family of genus 2 curves. *Ann. Math. (2)*, 191(3) :949–1001, 2020.
- [Duc07a] Antoine Ducros. Espaces analytiques p -adiques au sens de Berkovich. Number 311, pages Exp. No. 958, viii, 137–176. 2007. Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006.

- [Duc07b] Antoine Ducros. Variation de la dimension relative en géométrie analytique p-adique. *Compos. Math.*, 143(6) :1511–1532, 2007.
- [EGA1] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas.*, volume 8 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [EGAII] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 8 :222, 1961.
- [Eng95] Ryszard Engelking. *Theory of dimensions finite and infinite*, volume 10 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- [Fan18] Lorenzo Fantini. Normalized Berkovich spaces and surface singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(11) :7815–7859, 2018.
- [Fav18] Charles Favre. Degeneration of endomorphisms of the complex projective space in the hybrid space. *J. Inst. Math. Jussieu*, pages 1–43, 2018.
- [Fri67] Jacques Frisch. Points de platitude d’un morphisme d’espaces analytiques complexes. *Invent. Math.*, 4 :118–138, 1967.
- [GK00] Elmar Grosse-Klönne. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. Reine Angew. Math.*, 519 :73–95, 2000.
- [God73] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux. 3e ed. revue et corrigée*, volume 13 of *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*. Hermann, Paris, 1973.
- [GR84] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Coherent analytic sheaves*, volume 265 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [GR04] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.

- [GR09] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.
- [Har84] David Harbater. Convergent arithmetic power series. *Amer. J. Math.*, 106(4) :801–846, 1984.
- [Har88] David Harbater. Galois covers of an arithmetic surface. *Amer. J. Math.*, 110(5) :849–885, 1988.
- [Lan77] Klaus Langmann. Zum Satz von J. Frisch : “Points de platitude d’un morphisme d’espaces analytiques complexes” (Invent. Math. **4** (1967), 118–138). *Math. Ann.*, 229(2) :141–142, 1977.
- [Liu88] Qing Liu. Un contre-exemple au “critère cohomologique d’affinoidité”. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(2) :83–86, 1988.
- [LS19] Thibaud Lemanisser and Matthew Stevenson. Topology of Hybrid Analytifications. arXiv, 2019. <http://arxiv.org/abs/1903.01926>.
- [MR84] Michel Matignon and Marc Reversat. Sous-corps fermés d’un corps valué. *J. Algebra*, 90(2) :491–515, 1984.
- [Poi08] Jérôme Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p -adiques. Privilège et noethérianité. *Compos. Math.*, 144(1) :107–133, 2008.
- [Poi10a] Jérôme Poineau. La droite de Berkovich sur $\mathbf{Z}$. *Astérisque*, 334 :xii+284, 2010.
- [Poi10b] Jérôme Poineau. Raccord sur les espaces de Berkovich. *Algebra Number Theory*, 4(3) :297–334, 2010.
- [Poi13a] Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur $\mathbf{Z}$: étude locale. *Invent. Math.*, 194(3) :535–590, 2013.
- [Poi13b] Jérôme Poineau. Les espaces de Berkovich sont angéliques. *Bull. Soc. Math. France*, 141(2) :267–297, 2013.

- [Poi19] Jérôme Poineau. Non-archimedean compactifications of complex analytic spaces, 2019. <https://poineau.users.lmno.cnrs.fr/Textes/Compactifications.pdf>.
- [Poi22a] Jérôme Poineau. Dynamique analytique sur $\mathbf{Z}$. I : Mesures d'équilibre sur une droite projective relative. arXiv, 2022. <https://arxiv.org/abs/2201.08480>.
- [Poi22b] Jérôme Poineau. Dynamique analytique sur $\mathbf{Z}$. II : Écart uniforme entre Lattès et conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel. arXiv, 2022. <https://arxiv.org/abs/2207.01574>.
- [PT21] Jérôme Poineau and Daniele Turchetti. Berkovich curves and Schottky uniformization. I : The Berkovich affine line. In *Arithmetic and geometry over local fields. VIASM 2018. Based on lectures given during the program "Arithmetic and geometry of local and global fields", summer 2018, Hanoi, Vietnam*, pages 179–223. Cham : Springer, 2021.
- [Ser56] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6 :1–42, 1955–1956.
- [Siu69] Yum-Tong Siu. Noetherianness of rings of holomorphic functions on Stein compact series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 :483–489, 1969.
- [Sta20] The Stacks project authors. The stacks project. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2020.
- [Tat71] John Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12 :257–289, 1971.
- [Tem15] Michael Temkin. Introduction to Berkovich analytic spaces. In *Berkovich spaces and applications. Based on a workshop, Santiago de Chile, Chile, January 2008 and a summer school, Paris, France, June 2010*, pages 3–66. Cham : Springer, 2015.
- [Tem21] Michael Temkin. Topological transcendence degree. *J. Algebra*, 568 :35–60, 2021.

- [Thu07] Amaury Thuillier. Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels. *Manuscripta Math.*, 123(4) :381–451, 2007.

INDEX

- Algèbre
 - d'un disque, *voir* Disque
 - d'un domaine polynomial, *voir* Domaine polynomial
 - d'une couronne, *voir* Couronne
- Analytification, 118–122, 182–194
 - d'un faisceau, **184**
 - exactitude du foncteur d', 190
 - d'un morphisme, **122**
 - d'un schéma, **122**, 124, 127
- Anneau
 - basique, *voir* de base
 - de Banach, **20**
 - uniforme, **23**, 24
 - de base, 52, 58, **58**, 93
 - géométrique, **110**
 - de Dedekind analytique, **186**
 - de Dedekind trivialement valué, **27**, 30, 52, 58, 93, 110, 187, 204, 224, 226, 250, 259
 - de valuation discrète, **27**, 52, 58, 93, 110, 187, 204, 224, 226, 250, 259
 - des entiers d'un corps de nombres, **26**, 29, 30, 52, 58, 93, 110, 187, 204, 224, 226, 250, 259
 - des entiers relatifs **Z**, **24**, 29, 30, 52, 58, 93, 110, 187, 204, 222, 223, 225, 250, 259
 - fortement de valuation discrète, **57**, 63, 103, 109
 - fortement régulier, **57**, 63
 - noethérien, 63, 266–271
- Application
 - fermée, 144
 - finie, **144**
 - finie et ouverte, 196, 199, 200
 - propre, **130**, 130–131, 137, 144
 - quasi-finie, **144**
 - séparée, **139**, 144
- Arbre, 235–245
 - à intersections simples, **236**
 - adapté à un recouvrement, **236**
 - assez d', **236**
 - bien découpé, **238**
 - binaire, **236**
 - de compacts, **236**
 - de Cousin, **236**
 - élémentaire, **238**
 - sur un disque, 243, 244
 - sur une étoile, 239, 242
- Atlas analytique, **72**
- $\mathcal{B}$ -définie, *voir* Fonction
- Base de Stein, **249**
- Base de voisinages, *voir* Voisinage
 - fine, **57**
- Bord analytique, **52**, 86
 - fort, **91**, 91–93
- Carte analytique, **72**
- Catégorie
 - des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, **74**
 - des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$, **77**

- Changement de base fini, *voir* Morphisme analytique fini
- Changement de variables, 55
- Chemin, **197**
 - élastique, **197**
 - pur, **204**
- Composantes locales, **174**, 192
- Condition
 - $(\mathcal{B}N_G)$, 85–89
 - $(\mathcal{B}N_{P(S)-T})$, 87–89
 - (N_G) , 86
 - $(\mathcal{O}N_G)$, **90**, 90–93
 - $(\mathcal{O}N_{P(S)-T})$, 92, 93, 231, 235
 - $(\mathcal{O}R_G)$, **93**
- Corps
 - fort, **57**, 63, 109
 - hybride, **26**, 29, 52, 58, 93, 110, 187, 204, 224, 226, 250, 259
 - résiduel, **34**, **73**
 - résiduel complété, **22**, **30**, **73**
 - archimédien, 32
 - valué, **24**, 52, 58, 93, 110, 187, 204, 224, 226, 250, 259
- Couronne, **38**, 207
 - algèbre d'une, 39–43, 87, 257, 258
 - connexe par arcs, 206
 - élastique, 211
- Dimension
 - en un point, *voir* Espace analytique topologique, *voir* Espace topologique
- Disque, **38**
 - algèbre d'un, 39–43, 87
 - noethérianité de l', 267–271
 - arbre sur un, *voir* Arbre
 - connexe par arcs, 206
 - dimension d'un, 214–217
 - élastique, 211
 - fonction sur un, 269
 - fonctions sur un, 269
 - ouvert généralisé, 265
 - système sur un, *voir* Système
- Domaine
 - de Laurent, **253**
 - ouvert, **265**
 - de Weierstraß, **253**
 - ouvert, **265**
 - rationnel, **253**
 - ouvert, **265**
- Domaine polynomial, **38**, 92
 - algèbre d'un, 54–55, 87
 - connexe, 49
 - norme sur un, 44–45
 - système sur un, *voir* Système
- Endomorphisme de la droite, 87, 102, 145, 168
- Espace affine analytique, **30**
 - $\mathcal{B}$ -adaptée, **258**
 - connexe par arcs, 206
 - dimension d'un, 214–217
 - extension des scalaires, 123
 - faisceau structural, **32**
 - foncteur représenté, 121
 - intègre, 172
 - localement connexe par arcs, 211
 - métrisable, 213
 - morphisme, *voir* Morphisme analytique vers un espace affine
 - produit d', 125
 - réduit, 167
 - sur un corps archimédien, 33
- Espace affinoïde
 - ouvert, **265**
 - surconvergent, **253**
- Espace analytique, **72**, 72–74
 - affine, *voir* Espace affine analytique
 - au-dessus de $\mathcal{A}$, **74**, 74–77
 - dimension d'un, **180**, **182**, 180–182, 192–194
 - intègre, **172**, 172–175, 177
 - irréductible, **172**, 172–173
 - localement connexe par arcs, 212
 - produit d', *voir* Produit
 - produit fibré d', *voir* Produit fibré
 - projectif, 183
 - réduit, **166**
 - séparé, **138**
 - vertical en un point, **180**
- Espace topologique
 - connexe, 196
 - connexe par arcs, **197**, 199, 200
 - dimension d'un, **212**, 212–214
 - élastique, **197**, 195–201
 - métrisable, 213
 - normal, **212**
- Étoile, **239**
 - arbre sur une, *voir* Arbre
- Évaluation, **22**, **30**, **32**, 73, **73**
- Exhaustion, **260**

- de Stein, **261**, 264
- universelle, **261**
- Extension des scalaires, **122**, 122–125, 127, 128, 131, 139, 152, 158, 159, 167
- Faisceau
 - analytifié, *voir* Analytification
 - annulateur d'un, 78
 - cohérent, 257
 - cohérent, 64, 146, 175, 184
 - dual d'un, 175
 - globalement engendré, 229, 231, 236, 252
 - image d'un, *voir* Immersion fermée et Morphisme fini
 - lieu des zéros d'un, 166
 - noethérien, 270
 - plat, 190
 - radical d'un, 166
 - sans torsion, 190
 - support d'un, 78, 164
 - surconvergent, 38, 253
 - torsion d'un, 175
- Fermé analytique, **70**, **77**, 151
 - faisceau associé à un, 166
- Fonction
 - $\mathcal{B}$ -définie, **57**, 67, 258
 - nilpotente, 166
 - sur un disque, 269
 - surconvergente, 54, 253
- Fraction rationnelle sans pôles, **32**
- Idéal
 - $\mathcal{B}$ -système de générateurs forts, **57**
 - $\mathcal{B}$ -fortement de type fini, **57**, 103, 108, 110
 - fermé, 9, 111, 115, 260
- Immersion, **78**, 77–81, 129, 141, 183
 - fermée, **71**, **78**, 129, 138, 141
 - image d'un faisceau par une, 146
 - ouverte, **78**
- Intérieur, **36**
- Lemme
 - de Cartan, 228
 - de normalisation de Noether, 177
- Modèle local analytique, **71**, 70–72
 - produit de, 126
 - produit fibré de, 127
- Morphisme
 - analytique, *voir* Morphisme analytique
 - de corps résiduels, 66, 72, 74, 76
 - structural, **70**, 71, **71**, **72**, 74, 179, 181, 191
 - topologique, *voir* Application
- Morphisme analytique, **66**, **71**, 66–73, **73**, 74
 - analytifié, *voir* Analytification
 - associé à un point, 77, 124, 134
 - au-dessus d'un morphisme d'anneaux de Banach, **75**, **76**, 75–77
 - diagonal, **128**, 128–130
 - fibre d'un, 134
 - fini, **145**, 143–169, 183, 192
 - changement de base d'un, 157–159
 - et plat, 167–169, 207
 - image d'un faisceau par un, 146, 184
 - image d'un fermé par un, 151
 - fini en un point, *voir* Morphisme analytique fini, **145**, 151
 - graphe d'un, 140, 141
 - image d'un, 183
 - ouvert, 166–169, 175, 179, 192
 - plat, 167, 179, 181, 190, 191
 - propre, **130**, 130–132, 138, 183
 - quasi-fini, *voir* Morphisme analytique fini, **145**, 151
 - séparé, **138**, 138–141, 145
 - surjectif, 183
 - vers un espace affine, 10, 68, 118
- Nilpotent, *voir* Fonction nilpotente
- Norme, **20**
 - comparaison, 40, 84–93
 - divisorielle, **84**, 85–87
 - résiduelle, **84**, 85–87, 90
 - sous-multiplicative, **20**
 - spectrale, **23**, 40, **85**, 86, 90
 - sur un domaine polynomial, *voir* Domaine polynomial
 - tensorielle, 132
 - uniforme, **23**, 32, 40, 85–87, 90
- Nullstellensatz, 164, 166
- Partie
 - archimédienne, **31**
 - d'Ostrowski, **29**, 215
 - décente, **52**
 - linéaire, **29**, 215
 - peu mixte, **204**
 - pro-rationnelle, **35**
 - rationnelle, **35**
 - spectralement convexe, 25, **36**, 133, 135

- très décente, **92**
- ultramétrique, **31**
- ultramétrique typique, **52**
- Point
 - $\mathcal{B}$ -adapté, **258**
 - archimédien, **31**
 - décent, **52**
 - isolable, **181**, 187
 - localement transcendant, **59**
 - purement localement transcendant, 59, **59**
 - rigide, **47**
 - degré, **47**
 - polynôme minimal, **47**, 61
 - rigide épais, 59, **59**, 59–61, 109, 163, 169
 - épaisseur, **61**
 - polynôme minimal, **60**, 60–61
 - voisinage, *voir* Voisinage
 - très décent, **92**
 - ultramétrique, **31**
 - ultramétrique très typique, **92**
 - ultramétrique typique, **52**
- Produit, **126**
 - fibré, **126**, 125–130, 134, 135, 137–139, 152, 157, 158, 167
- Produit tensoriel complété, 132, 133, 135
- Projection, **34**, 70
 - fibres d'une, 34, 37
 - ouverte, 51
 - section d'une, 202
- Prolongement analytique, **63**, 63–64
- Recouvrement élémentaire, **237**
- Résultant, 86, 93, 235, 239, 242
- Semi-norme, *voir* Norme
- Séries arithmétiques convergentes, 266–271
- Sous-module, *voir* Idéal
- Spectre analytique, **21**
 - d'Ostrowski, **29**
 - exemples, 24–28
 - linéaire, **29**
- Système, 221–231
 - de Banach, **221**
 - de Banach fort, **221**
 - de Cousin, **222**, 231
 - de Runge, **225**, 231
 - sur un disque, 226
 - sur un domaine polynomial, 231
- Théorème
 - A, 219, 252, 256
 - B, 219, 246, 252, 256, 260, 261, 264–266
 - d'acyclicité de Tate, 255, 256
 - de Cartan, 228
 - de division de Weierstraß, 53
 - avec contrôle des normes, 94
 - généralisé, 53
 - généralisé avec contrôle des normes, 101
 - de Kiehl, 256
 - de normalisation de Noether, 177
 - de préparation de Weierstraß, 62
 - Nullstellensatz, 164, 166
- Théorème de Weierstraß
 - division, 7
- Valeur absolue triviale, **23**
- Voisinage, 51, 88, 207, 237, 255, 266
 - d'un point de type 1 ou 4, 47
 - d'un point de type 2 ou 3, 47
 - d'un point rigide, 49
 - d'un point rigide épais, 89
 - élémentaire, **237**

LISTE DES NOTATIONS

$\mathcal{A}$ anneau de Banach

Normes et anneaux de Banach

$ \cdot _\infty$	Valeur absolue usuelle sur $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$, etc., page 23
$ \cdot _p$	Valeur absolue p -adique normalisée sur $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_p, \mathbf{C}_p$, etc., page 23
$ \cdot _0$	Valeur absolue triviale sur un anneau, page 23
R^{triv}	Anneau R muni de la valeur absolue triviale, page 27
k^{hyb}	corps k muni de la norme hybride, page 26
$s \prec t$	relation entre $s, t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ satisfaite si $s = 0$ ou $s < t$, page 40
$\ \cdot\ _t$	norme 1 sur $\mathcal{A}\langle T \leq t \rangle$, page 39
$\ \cdot\ _{s,t}$	norme 1 sur $\mathcal{A}\langle s \leq T \leq t \rangle$, page 39
$\ \cdot\ _t$	norme ∞ sur $\mathcal{A}\{ T \leq t\}$, page 42
$\ \cdot\ _{s,t}$	norme ∞ sur $\mathcal{A}\{s \leq T \leq t\}$, page 42
$\ \cdot\ _\infty$	norme ∞ sur $\mathcal{A}[S]$, page 48
$\ \cdot\ _v$	norme ∞ de rayon v sur $\mathcal{A}[S]$, page 84
$\ \cdot\ _{\text{div}}$	norme divisorielle sur $\mathcal{A}[S]/(G(S))$, héritée de $\mathcal{A}^d$ par division euclidienne, page 84
$\ \cdot\ _{v,\text{rés}}$	norme résiduelle $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ induite par $\ \cdot\ _v$, page 84
$\ \cdot\ _{\text{sp}}$	semi-norme spectrale de $\ \cdot\ _{v,\text{rés}}$ sur $\mathcal{A}[S]/(G(S))$ pour v assez grand, page 85
$\ \cdot\ _{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}}$	pour $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ des $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach, semi-norme tensorielle sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$, page 132

$\mathcal{M} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$	séparé complété de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ pour la semi-norme $\ \cdot\ _{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}}$, page 132
$\mathcal{M} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^{\text{sp}} \mathcal{N}$	séparé complété de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ pour la semi-norme spectrale associée à $\ \cdot\ _{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}}$, page 132

Séries

$\mathcal{A}\langle T \leq t \rangle$	séries à coefficients dans $\mathcal{A}$ normalement convergentes sur $\overline{D}(t)$, page 39
$\mathcal{A}\langle s \leq T \leq t \rangle$	séries de Laurent à coefficients dans $\mathcal{A}$ normalement convergentes sur $\overline{C}(s, t)$, page 39
$\mathcal{A}\{ T \leq t\}$	pour $\mathcal{A}$ ultramétrique, séries à coefficients dans $\mathcal{A}$ convergentes sur $\overline{D}(t)$, page 42
$\mathcal{A}\{s \leq T \leq t\}$	pour $\mathcal{A}$ ultramétrique, séries de Laurent à coefficients dans $\mathcal{A}$ convergentes sur $\overline{C}(s, t)$, page 42
$R_{\infty}(f)$	rayon de convergence complexe d'une série f , page 266
$R_{\sigma}(f)$	rayon de convergence d'une série f en une place σ d'un corps de nombres, page 271
$\mathbf{Z}_{r+}[[T]]$	sous-anneau de $\mathbf{Z}[[T]]$ formé des séries f telles que $R_{\infty}(f) > r$, page 266

Espaces topologiques

$\dim_r$	dimension de recouvrement d'un espace topologique, page 212
$\overset{\circ}{V}$	intérieur d'une partie V d'un espace topologique, page 36

Faisceaux cohérents

$\mathcal{F}(V)$	sections d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une partie V , page 38
$\text{Ann}(\mathcal{F})$	annulateur de $\mathcal{F}$, page 78
$\mathcal{F}^{\text{tors}}$	sous-faisceau des sections de torsion de $\mathcal{F}$, page 175
$\mathcal{F}^{\vee}$	dual de $\mathcal{F}$, page 175
$\mathcal{F}^{\text{an}}$	analytifié d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un schéma, page 184
$\sqrt{\mathcal{J}}$	radical d'un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J}$, page 166
$V(\mathcal{J})$	lieu des zéros d'un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J}$, page 166
$\mathcal{I}(Z)$	faisceau d'idéaux des fonctions s'annulant en tout point d'un fermé analytique Z d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique, page 166

Spectre analytique d'un anneau de Banach

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$	spectre analytique de $\mathcal{A}$, page 21
$\mathcal{M}(\tau)$	application $\mathcal{M}(\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ induite par un morphisme d'anneaux de Banach $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, page 22
$ \cdot _x$	semi-norme sur $\mathcal{A}$ associée à point x de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, page 22
$\text{Ker}(x)$	noyau de $ \cdot _x$, page 22
$\mathcal{H}(x)$	corps résiduel complété de x , page 22
$\tau_{x,x'}$	application $\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(x')$ induite par un morphisme τ d'anneaux de Banach, page 22
ev_x	morphisme d'évaluation en x , page 22
$a(x)$	évaluation en x d'un élément a de $\mathcal{A}$, page 22
x^ε	point associé à la semi-norme $ \cdot _x^\varepsilon$ sur $\mathcal{A}$, page 28
I_x	ensemble des $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ pour lesquels x^ε est défini, page 28

• Cas de $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$

a_0	point de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ associé à la valeur absolue triviale $ \cdot _0$, page 24
a_p^ε	point de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ associé à la valeur absolue $ \cdot _p^\varepsilon$, page 24
a_∞^ε	point de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ associé à la valeur absolue $ \cdot _\infty^\varepsilon$, page 24

• Cas de $\mathcal{A} = A$, anneau des entiers d'un corps de nombres K

a_0	point de $\mathcal{M}(A)$ associé à la valeur absolue triviale $ \cdot _0$, page 26
$a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon$	point de $\mathcal{M}(A)$ associé à une valeur absolue $\mathfrak{m}$ -adique, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A , page 26
a_σ^ε	point de $\mathcal{M}(A)$ associé à une valeur absolue σ -adique, où σ est une place de K , page 26

Espace affine analytique sur un anneau de Banach

$\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$	espace affine analytique de dimension n sur $\mathcal{A}$, page 30
$\mathbf{A}_\tau^{n,\text{an}}$	application $\mathbf{A}_{\mathcal{A}'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ induite par un morphisme d'anneaux de Banach $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, page 31
π_n	projection $\pi_n: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$, page 34
$\pi_{n,m}$	projection $\pi_{n,m}: \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{m,\text{an}}$ sur les m premières coordonnées, page 34
$ \cdot _x$	semi-norme sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ associée à point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, page 31

$\mathcal{H}(x)$	corps résiduel complété de x , page 31
$\tau_{x,x'}$	application $\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(x')$ induite par un morphisme τ d'anneaux de Banach, page 31
ev_x	morphisme d'évaluation en x sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, page 31 morphisme d'évaluation en x sur $\mathcal{K}(V)$, page 32
$f(x)$	évaluation en x d'un élément f de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, page 31 évaluation en x d'un élément f de $\mathcal{K}(V)$, page 32 évaluation en x d'une section f de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}}$, page 33
$\varepsilon(x)$	pour x archimédien, élément de $]0, 1]$ tel que $ \cdot _x = \cdot _{\infty}^{\varepsilon(x)}$, page 32
x^{ε}	point associé à la semi-norme $ \cdot _x^{\varepsilon}$, page 35
V_{um}	partie ultramétrique d'une partie V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, page 31
V_{arc}	partie archimédienne de V , page 31
$\ \cdot\ _V$	semi-norme uniforme sur une partie compacte V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, page 32
$\mathcal{K}(V)$	fractions rationnelles sans pôles sur V , page 32
$\mathcal{B}(V)$	séparé complété de $\mathcal{K}(V)$ pour $\ \cdot\ _V$, page 35
$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}}$	faisceau structural sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, page 33
$\mathcal{O}_x$	anneau local en un point x de $\mathcal{E}n\mathcal{A}$, page 34
$\mathfrak{m}_x$	idéal maximal de $\mathcal{O}_x$, page 34
$\kappa(x)$	$= \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$, corps résiduel de x , page 34
$\mathcal{O}(V)$	fonctions surconvergentes sur un compact V de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, page 38
$\overline{\mathcal{O}(V)}$	séparé complété de $\mathcal{O}(V)$ pour $\ \cdot\ _V$, page 43
$\gamma_{\mathbf{R}}$	pour U ouvert de la partie archimédienne de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, morphisme canonique $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{O}(U)$, page 33
ρ_b	pour b point archimédien de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, plongement canonique $\mathbf{R}^n \rightarrow \pi_n^{-1}(b)$, page 202
T	$= (T_1, \dots, T_n)$, n -uplet de coordonnées, page 202
r	$= (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$, page 202
$r < s$	relation satisfaite si $r_i < s_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, page 269
i	$= (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$, page 202
r^i	$= \prod_{m=1}^n r_m^{i_m}$, page 202
η_r	sur un corps valué ultramétrique complet, unique point du bord de Shilov du polydisque centré en 0 de polyrayon r , page 202

σ_r	une section de la projection π_n , page 202
$\mathbf{A}_U^{n,\text{an}}$	espace affine relatif au-dessus de U , page 205
$D_U(\mathbf{t})$	polydisque ouvert relatif au-dessus de U , page 205
$\overline{D}_U(\mathbf{t})$	polydisque fermé relatif au-dessus de U , page 205
$C_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$	polycouronne ouverte relative au-dessus de U , page 205
$\overline{C}_U(\mathbf{s}, \mathbf{t})$	polycouronne fermée relative au-dessus de U , page 205

Droite affine analytique sur un anneau de Banach

$\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$	droite affine analytique sur un anneau de Banach $\mathcal{A}$, page 30
$D_V(P, t)$	domaine polynomial ouvert relatif au-dessus de V , page 38
$\overline{D}_V(P, t)$	domaine polynomial fermé relatif au-dessus de V , page 38
$C_V(P, s, t)$	domaine polynomial ouvert relatif au-dessus de V , page 38
$\overline{C}_V(P, s, t)$	domaine polynomial fermé relatif au-dessus de V , page 38
$D_V(t)$	disque ouvert relatif au-dessus de V , page 38
$\overline{D}_V(t)$	disque fermé relatif au-dessus de V , page 38
$C_V(s, t)$	couronne ouverte relative au-dessus de V , page 38
$\overline{C}_V(s, t)$	couronne fermée relative au-dessus de V , page 38
μ_x	polynôme minimal d'un point rigide x de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ (dans $k[T]$), page 47
$\deg(x)$	degré de μ_x , page 47
$\mu_{\kappa, x}$	polynôme minimal épais d'un point rigide épais x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ (dans $\kappa(b)[T]$ si x est au-dessus de $b \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$), page 60
φ_P	endomorphisme de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ induit par $P \in \mathcal{A}[T]$, page 87
Z_G	fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1,\text{an}}$ défini par $G \in \mathcal{A}[S]$, page 85
φ_G	morphisme $Z_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A})$, page 85
$\psi_{G,U}$	morphisme naturel $\mathcal{O}(U)[T]/(G(T)) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_G}(\varphi_G^{-1}(U))$, page 90
Rés	résultant, page 86

Espace analytique sur un anneau de Banach

$\kappa(x)$	corps résiduel d'un point x d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique, page 73
$\mathcal{H}(x)$	corps résiduel complété du point x , page 73
$f(x)$	évaluation en x d'une section f de $\mathcal{O}_X$, page 73
$\text{Hom}_{\mathcal{A}\text{-loc}}(X, Y)$	pour X, Y espaces localement $\mathcal{A}$ -annelés, ensemble des morphismes d'espaces localement $\mathcal{A}$ -annelés de X dans Y , page 121
$\mathcal{A}\text{-An}$	catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, page 74

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-}\mathrm{An}}(X, Y)$	pour X, Y espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, ensemble des morphismes analytiques de X dans Y , page 73
$\mathrm{An}_{\mathcal{A}}$	catégorie des espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$, page 77
$\mathrm{Hom}_{\mathrm{An}_{\mathcal{A}}, \tau}(X, Y)$	pour X espace $\mathcal{B}$ -analytique, Y espace $\mathcal{B}'$ -analytique et $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ morphisme d'anneaux de Banach, ensemble des morphismes analytiques de X dans Y au-dessus de τ , page 76
$\mathrm{Hom}_{\mathrm{An}_{\mathcal{A}}}(X, Y)$	pour X, Y espaces analytiques au-dessus de $\mathcal{A}$, ensemble des morphismes analytiques de X dans Y , page 77
γ_x	morphisme analytique $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$ associé à un point x d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X , page 77
$\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$	analytifié d'un schéma $\mathcal{X}$, page 122
$\rho_{\mathcal{X}}$	morphisme canonique $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \rightarrow \mathcal{X}$, page 122
φ^{an}	analytifié d'un morphisme de schémas φ , page 122
$X_{\mathcal{B}}$	extension des scalaires d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X à un anneau de Banach $\mathcal{B}$, page 122
$X \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$	extension des scalaires d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X à un anneau de Banach $\mathcal{B}$, page 122
$X \times_{\mathcal{A}} Y$	produit d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques X et Y , page 126
$X \times_Z Y$	produit fibré d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques X et Y au-dessus d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique Z , page 127
$X \times_Z Y$	produit fibré d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X et d'un espace $\mathcal{B}$ -analytique Y au-dessus d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique Z , page 128
Δ_X	pour un espace $\mathcal{A}$ -analytique X , morphisme diagonal $X \rightarrow X \times_{\mathcal{A}} X$, page 128
$\Delta_{X/Y}$	pour un espace $\mathcal{A}$ -analytique X au-dessus d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique Y , morphisme diagonal $X \rightarrow X \times_Y X$, page 128
Γ_{φ}	graphe d'un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques φ , page 140
$\dim_x(X/\mathcal{M}(\mathcal{A}))$	dimension relative d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique X en un point x , page 180
$v_x(X)$	$= 0$ si X est vertical en x , 1 sinon, page 181
$\dim_x(X)$	dimension de X en x , page 182

Systèmes de Banach

K^-, K^+	compacts d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique, page 221
L	intersection $K^- \cap K^+$ des compacts K^- et K^+ , page 221

M	union $K^- \cup K^+$ des compacts K^- et K^+ , page 221
$(\mathcal{B}_m^-, \ \cdot\ _m^-)$	famille d'espaces de Banach associée à K^- dans un système de Banach, page 221
$(\mathcal{B}_m^+, \ \cdot\ _m^+)$	famille d'espaces de Banach associée à K^+ dans un système de Banach, page 221
$(\mathcal{C}_m^-, \ \cdot\ _m^-)$	famille d'espaces de Banach associée à L dans un système de Banach, page 221

Arbres binaires de compacts

$\mathcal{T}$	arbre binaire de compacts, page 236
$\mathcal{I}(\mathcal{T})$	ensemble des nœuds internes de $\mathcal{T}$, page 236
$K(v)$	compact étiquetant un nœud v de $\mathcal{T}$, page 236
$\mathcal{F}(\mathcal{T})$	famille des compacts associés aux feuilles de $\mathcal{T}$, page 236
G_v	ensemble des nœuds $w \neq v$ situés entre la racine et v tels que v soit à gauche de w , page 238
D_v	ensemble des nœuds $w \neq v$ situés entre la racine et v tels que v soit à droite de w , page 238
$\mathcal{T}(\mathcal{E})$	arbre binaire de compacts élémentaire, page 238